UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "C"

TRABAJOS DE MATEMÁTICA

N^o 34/06

Notas de Análisis Complejo

Guido A. Raggio

Editores: Jorge R. Lauret - Elvio A. Pilotta

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Las notas que siguen surgen del curso de Análsis Complejo dictado en el segundo cuatrimestre de 1998 en FAMAF como parte de la materia *Análisis IV* de las Licenciaturas en Física y Astronomía y como materia *Elementos de Funciones Complejas* del Profesorado en Matemática.

Es tradición basar el curso en el libro de Churchill & Brown (*Variable Compleja y Aplicaciones*, McGraw-Hill, 1992; traducción de la quínta edición de "Complex Variables and Applications" de los mismos autores en la misma editorial) pero he usado constantemente la presentación ofrecida en el libro de Saff & Snider (*Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall, 1993) que considero excelente y, por supuesto, el magnifico libro de Ahlfors (*Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Mc-Graw-Hill, 1966, segunda edición) del cual aprendí estos asuntos hace ya mucho. También he consultado con mucho beneficio los libros más avanzados de J.B. Conway *Functions of one complex variable* (Springer-Verlag, New York 1973) y de W. Rudin *Real and Complex Analysis* (Tata McGraw-Hill Publ. Co. Ltd., New Delhi 1980). La sucesión temática de las notas tiene poco que ver con el curso dictado. Los motivos de este desfasaje son dos: la función exponencial, y el Teorema de Cauchy-Goursat.

En el curso, la función exponencial fué introducida "a mano" apelando a la buena voluntad y a los conocimientos previos de los alumnos. Aquí anteponemos la discusión de las series de potencia que permite una introducción límpida de exp. Y ya que estamos demostramos que las series de potencias y sus derivadas son analíticas.

En cualquíer curso elemental la discusión del Teorema de Cauchy-Goursat presenta un problema serio. Este resultado crucial no puede demostrarse sin usar compacidad. Es notable que los alumnos del curso no tenían ninguna familiaridad con este concepto. En la demostración ofrecida por Churchill & Brown, la compacidad no se menciona explícitamente pero está escondida (y relegada a un ejercicio) en la construcción de un retículo de cuadrados que cubre apropiadamente la región de la acción. En el curso he optado por ser mas explícito y menos general. Introducimos compacidad y demostramos el Teorema de Cauchy-Goursat sólo para un disco siguiendo la presentación de Ahlfors.

En el curso, los fenómenos asociados con caminos cerrados no simples se mencionaron muy sucintamente o para nada. Aquí agregamos un apéndice con una discusión de "winding numbers" y presentamos la demostración del Teorema de Cauchy dada por Dixon.

El lector encontará aquí solo algunas pocas "aplicaciones" y ninguna concreta a la física. Algunas de estas cosas se hicieron en los prácticos. Como solía decir el Profesor Res Jost: "Verallgemeinerungen und Anwendungen folgen automatisch" (Generalizaciones y aplicaciones siguen automáticamente).

Mi agradecimiento a Roberto Miatello y a Patricia Kisbye por lo mucho que me enseñaron sobre el Análisis Complejo en el diario trajinar con los prácticos y los exámenes.

Córdoba, Marzo de 2006 Guido A. Raggio

Índice general

Capítulo 1

Números complejos

1.1 ¿Qué son?

En general un polinomio en una variable real x

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

no tiene porque tener raíces reales, i.e. soluciones de la ecuación $P(x) = 0$. Si x_1 es una raíz entonces $P(x) = (x - x_1)Q(x)$ donde Q es un polinomio de grado menor. La existencia de raíces permite entonces factorizar polinomios cosa que simplifica su análisis. El polinomio más simple que no admite raíces reales es

$$x^2 + 1 \ , \tag{1.1}$$

ya que el cuadrado de un número real es siempre un número no-negativo.

A partir de estas y otras consideraciones surge la idea (la necesidad, el capricho, ...) de extender los números reales a un conjunto más rico y poderoso. La extensión más pequeña (en un sentido matemáticamente preciso) resulta ser el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Al físico a quien no le convencen estas elucubraciones le diría que tenga muy en cuenta que la mecánica cuántica es una teoría genuinamente compleja. Y no es atrevido conjeturar que no hubiese sido descubierta sin los complejos. También le recordaría, a otro nivel, la enorme simplificación y economía que se produce al introducir los números complejos en el análisis de fenómenos oscilatorios, o la impedancia compleja en el análisis de circuitos de corriente.

La extensión que se busca deberá –si se quiere por ejemplo atacar el problema de la factorización de polinomios– permitir una suma y una multiplicación que tengan las mismas propiedades que estas operaciones para los reales.

Considere un número imaginario i, llamado **unidad imaginaria** , que multiplicado por sí mismo dé -1: $ii = i^2 = -1$. i es entonces, por decreto, una raíz del polinomio

(1.1). Si queremos, como dijimos, preservar las reglas de cálculo usuales, obtenemos inmediatamente otra raíz $-i$ ya que $(-i)(-i) = (-)(-)i^2 = -1$. Si multiplicamos a i por un número real b, $ib = bi$, hemos obtenido una raíz del polinomio $x^2 + b^2$. El conjunto de los números ib con b real arbitrario forma el conjunto de los números **imaginarios**. La suma de dos imaginarios es $(ib_1) + (ib_2) = i(b_1 + b_2)$. Al multiplicar dos imaginarios, sin innovar y usando solamente la propiedad definitoria de i, obtenemos $(ib_1)(ib_2) = i^2 b_1 b_2 = -b_1 b_2$ o sea un número real. Si ahora sumamos un número real a y un número imaginario ib obtenemos $a + ib$ que denominamos **número complejo**. La **parte real**

$$\mathrm{Re}(a + ib) = a \ ,$$

de $a + ib$ es el número real a, y su **parte imaginaria**

$$\mathrm{Im}(a + ib) = b \ ,$$

es el número real b. Conservando siempre el principio de no innovar, la suma de dos complejos será

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \ .$$

En cuanto a la multiplicación de complejos, podemos proceder cautelosamente. Primero, conservando distributividad,

$$a(a_1 + ib_2) = aa_1 + iab_1 \ , \quad \text{para } a \text{ real}$$

$$(ib)(a_1 + ib_1) = iba_1 + i^2 bb_1 = -bb_1 + iba_1 \ , \quad \text{para } ib \text{ imaginario} \ .$$

Combinando estas reglas y siempre queriendo distributividad tendremos

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2 b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \ .$$

El conjunto $\mathbb{C}$ formado por $a + ib$ donde a y b son reales con la suma y multiplicación recien establecidas conforman los números complejos.

Ejercicio 1 *Verifique que la suma y multiplicación de $\mathbb{C}$ tiene todas las propiedades usuales de estas operaciones en los reales (Conmutatividad, Asociatividad, Distributividad, ...).*

Verifique que el conjunto $\{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ de pares ordenados de números reales con:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

puede identificarse con $\mathbb{C}$ y sus operaciones via la identificación $(x, y) \equiv x + iy$. Observe que $(0, 1) \equiv i$.

Anotaremos los números complejos con letras latinas en minúscula $(z, w, \cdots)$ y cuando escribimos $z = x + iy$ sobreentendemos que x e y son reales.

El hecho que un complejo $z = x + iy$ este determinado por un par ordenado (x, y) de números reales nos permite identificar a $\mathbb{C}$ con el plano real. Esta identificación es una

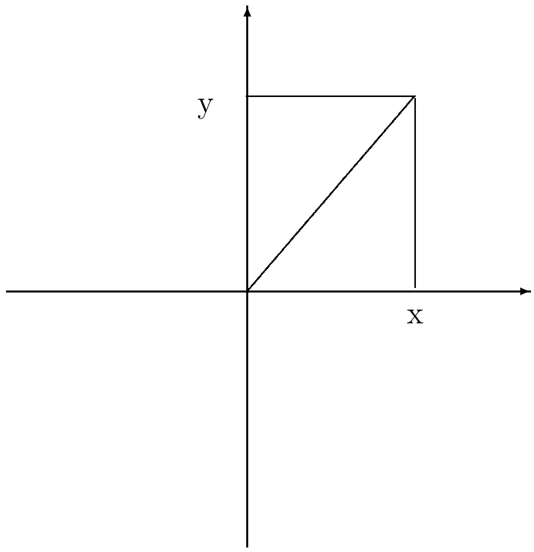


Figura 1.1: Representación de un complejo en el plano $\mathbb{R}^2$

rica fuente que debe tenerse muy presente. Así, por ejemplo, la suma de los complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se transforma en el plano en la suma de los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (ver figura 1.2).

Veremos luego que la multiplicación también tiene un correlato geométrico.

El **inverso** de un número complejo $z = x + iy$ no nulo (i.e., $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$ no son ambos nulos) es el número complejo anotado z^{-1} o $1/z$ dado por

$$z^{-1}z = 1 \ ;$$

con $z = x + iy$ y $z^{-1} = a + ib$ obtenemos $(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + xb) = 1$ o sea que $a = x/(x^2 + y^2)$, y $b = -y/(x^2 + y^2)$, con lo que

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \ .$$

Esto nos permite dividir números complejos cuando el denominador no se anula

$$z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \ , \quad z_2 \neq 0 \ ;$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \ , \quad (x_2, y_2) \neq (0, 0) \ .$$

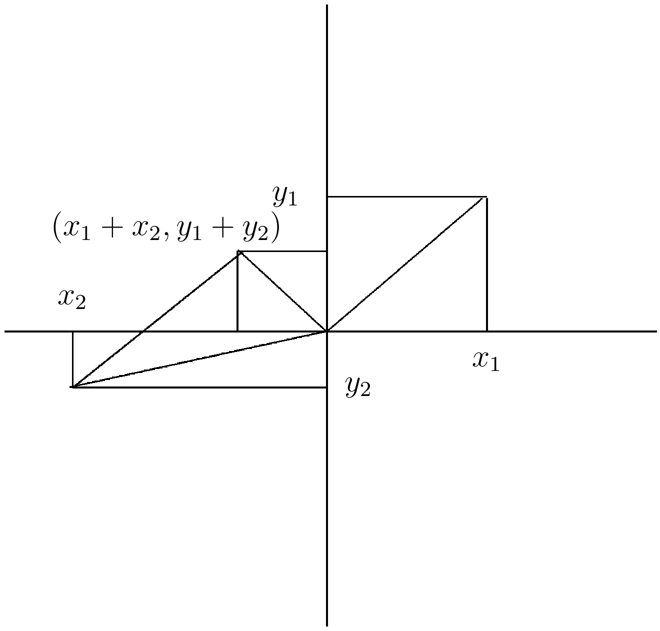


Figura 1.2: La suma de complejos

1.2 Complejo conjugado y módulo

Conviene introducir el **complejo conjugado** $\overline{z}$ del complejo $z = x + iy$ por

$$\overline{z} = x - iy = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$$

que se obtiene cambiándole el signo a la parte imaginaria de z (o sea, reflejando en el eje real). Las siguientes relaciones son inmediatas

$$\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2 \ , \quad \mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/(2i) = i(\overline{z} - z)/2 \ .$$

Es inmediato que $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ es el cuadrado de la distancia del punto (x, y) al origen. Se llama **módulo** del número complejo $z = x + iy$ al número no-negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}} \ ,$$

o sea la distancia al origen en el plano complejo. Observese que $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.

Tanto el módulo como el conjugado son sumamente útiles para realizar operaciones algebraicas con complejos. Por ejemplo, se tiene

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ , \quad z \neq 0 \ ,$$

$$z_1/z_2 = z_1\overline{z_2}/|z_2|^2 \ , \quad z_2 \neq 0 \ .$$

1.3 Desigualdades básicas para el módulo

Lema 1.1 *Para todo complejo z se tiene*

$$-|z| \leq Re(z) \leq |z| \ , \ -|z| \leq Im(z) \leq |z| \ , \tag{1.2}$$

$$|\overline{z}| = |z| \ . \tag{1.3}$$

Para todo par de complejos z y w se tiene

$$|zw| = |z|\,|w| \ . \tag{1.4}$$

Demostración: De $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq \text{máx}\{\mathrm{Re}(z)^2, \mathrm{Im}(z)^2\}$ se obtienen las desigualdades (1.2). Como $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$ se sigue (1.3). Por último

$$|zw|^2 = \mathrm{Re}(zw)^2 + \mathrm{Im}(zw)^2 = (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w))^2$$
$$+ (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w))^2$$
$$= \mathrm{Re}(z)^2\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(z)^2\mathrm{Im}(w)^2 + \mathrm{Re}(z)^2\mathrm{Im}(w)^2 + \mathrm{Re}(w)^2\mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2\,|w|^2 \ . \ \square$$

Las siguientes desigualdades son básicas y se usarán constantemente en el curso:

Lema 1.2 *Para todo par de complejos z_1, z_2, se tiene:*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ ;$$

en particular

$$|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| \ .$$

Demostración:

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1} \pm \overline{z_2}) = |z_1|^2 \pm (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \ .$$

Con (1.2), (1.3), y (1.4), $\pm\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2|$, luego

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \ ,$$

y la desigualdad de la derecha se obtiene tomando la raíz cuadrada.

Con las mismas relaciones, $\pm\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \geq -|z_1\overline{z_2}| = -|z_1|\,|z_2|$, luego

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2 \ ,$$

y la desigualdad de la izquierda se obtiene tomando la raíz cuadrada.

Luego, $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |i\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Re}(z)| + |i|\,|\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$. $\square$

Ejercicio 2 *Interprete geométricamente la desigualdad $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ que se denomina* **desigualdad del triángulo***.*

1.4 Representación polar; el argumento de un número complejo

El hecho que un número complejo es un punto en el plano $\mathbb{R}^2$ sugiere que se lo puede caracterizar por medio de la distancia al origen y un ángulo apropiado; se obtiene así la **representación polar**. Si $z = x+iy$, la distancia la origen es como vimos $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Cualquier ángulo α que cumpla con

$$x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\alpha) \ , \ \ y = \mathrm{Im}(z) = |z|\,\mathrm{sen}(\alpha) \tag{1.5}$$

se llama **argumento** de z [1].

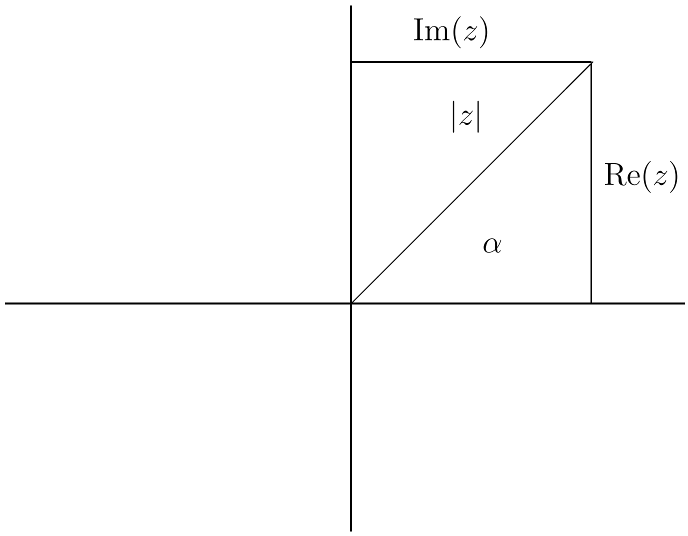


Figura 1.3: El argumento

Siempre hay infinitos argumentos: si $z = 0$ las ecuaciones no imponen ninguna condición sobre α; si $z \neq 0$ entonces hay al menos un argumento[2] α_o de z y entonces, ya que tanto cos como sen son funciones periódicas de período 2π, también $\alpha_o + 2k\pi$ es un argumento de z para todo número entero $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$. Además, estos son todos los argumentos, i.e. dos argumentos de un complejo z no-nulo se diferencian por un múltiplo entero de 2π. En efecto, si α_1 y α_2 son dos argumentos de $z \neq 0$, entonces

$$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2) \ , \ \ \mathrm{sen}(\alpha_1) = \mathrm{sen}(\alpha_2)$$

[1] Es frecuente la afirmación de que α está determinado por la ecuación $\tan(\alpha) = y/x$; esto no es enteramente correcto. La tangente es de período π con lo que la condición admite dos soluciones en todo intervalo de largo 2π. Si α es una solución también lo es $\alpha+\pi$ y como $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, $\mathrm{sen}(\alpha+\pi) = -\,\mathrm{sen}(\alpha)$ sólo uno de estos dos números satisface (1.5).

[2] $x/|z|$ y $y/|z|$ son números reales de módulo menor o igual a 1 y sus cuadrados se suman a 1.

y esto implica que $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$ para algún entero k.

Se anotará $\arg(z)$ al conjunto (infinito) de argumentos de z. ¡Atención: arg **no es una función**! Observe que $\arg(0) = \mathbb{R}$. La representación polar suele ser muy útil, por ejemplo para multiplicar: si $\alpha_1 \in \arg(z_1)$ y $\alpha_2 \in \arg(z_2)$, entonces usando los teoremas de adición de las funciones trigonométricas,

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \mathrm{sen}(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2)) = |z_1|\,|z_2|\cos(\alpha_1 + \alpha_2)\ ;$$

$$\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)\mathrm{Re}(z_2)$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,(\mathrm{sen}(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \mathrm{sen}(\alpha_2)\cos(\alpha_1)) = |z_1|\,|z_2|\,\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Luego, $\alpha_1 + \alpha_2 \in \arg(z_1 z_2)$. El producto se obtiene entonces multiplicando los módulos y sumando los argumentos.

La construcción geométrica del producto es la de la Figura 4. Observe que los triángulos de vértices $0, z_1, 1$ y $0, z_2, z_1 z_2$ son similares; el producto se puede construir con regla y compás.

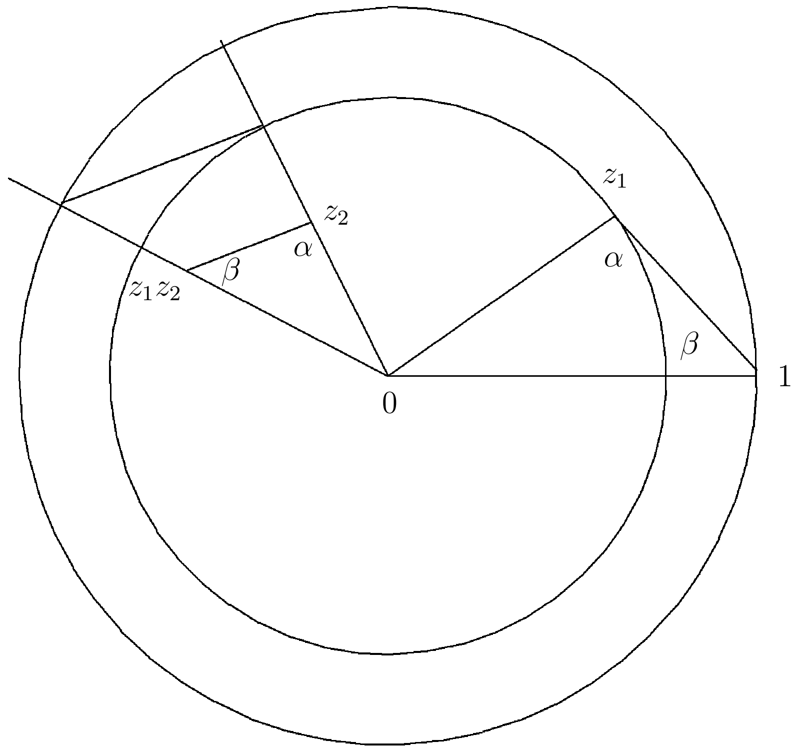


Figura 1.4: El producto de complejos

Se tiene entonces la relación

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{1.6}$$

entendida como "la suma de cualquiera de los argumentos de los factores es un argumento del producto".

Ejercicio 3 *En el mismo sentido, se tiene*

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ \ , y \ \ \arg(1/z) = -\arg(z) \ \textit{para } z \neq 0 \ .$$

Es inmediato ver (verifíquelo) que en cada intervalo de la forma $(a, a + 2\pi]$, donde a es un número real arbitrario, hay un único argumento de un complejo no-nulo; este número se anota $\arg_a(z)$. Esto define una función $0 \neq z \mapsto \arg_a(z)$ que, como veremos más adelante, resulta ser continua salvo sobre la semi-recta que nace en 0 y forma el ángulo a con el semi-eje real positivo. Esto resulta del hecho que un punto sobre esta recta tiene a $a + 2\pi$ como argumento mientras que hay puntos muy cercanos que tienen argumentos $a + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ tan chico como se quiera.

El **argumento principal** es el único argumento en el intervalo $(-\pi, \pi]$ y se anotará $\mathrm{Arg}(z) = \arg_{-\pi}(z)$.

Aunque aún no disponemos de la función exponencial para los complejos, adelantamos y definimos, para cualquier número complejo $z = x + iy$,

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \,\mathrm{sen}(y)) \ . \tag{1.7}$$

Observamos que si $z = x$ es real entonces se recupera la función exponencial conocida. Además, si $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$ entonces

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = e^{x_1}(\cos(y_1) + i\,\mathrm{sen}(y_1))e^{x_2}(\cos(y_2) + i\,\mathrm{sen}(y_2))$$

$$= e^{x_1+x_2}\left\{[\cos(y_1)\cos(y_2) - \mathrm{sen}(y_1)\,\mathrm{sen}(y_2)] + i\,[\cos(y_1)\,\mathrm{sen}(y_2) + \cos(y_2)\,\mathrm{sen}(y_1)]\right\} \ ,$$

que por las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas es igual a

$$e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1 + y_2) + i\,\mathrm{sen}(y_1 + y_2)\right) \ ;$$

por lo tanto,

$$\boxed{\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)} \tag{1.8}$$

y se recupera la relación conocida de la exponencial real. En particular, para cualquier real α, se tiene

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)\ .$$

Faltará ver, lo que se hará más adelante, que $\exp(z) = e^z$ donde e es el número real conocido y e^z es "e elevado a la z".

Esto permite escribir la representación polar de un complejo no-nulo z como

$$\boxed{z = |z| \exp(i\alpha)\ ,\ \alpha \in \arg(z)} \tag{1.9}$$

esta relación junto con la relación (1.8) facilita enormemente los cálculos algebraicos en la representación polar. Se tiene $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2| \exp(i(\alpha_1+\alpha_2))$ y $z_1/z_2 = (|z_1|/|z_2|) \exp(i(\alpha_1 - \alpha_2))$ con $\alpha_{1,2} \in \arg(z_{1,2})$.

1.5 Potencias enteras y racionales

Si p es un número entero no nulo ($p = \pm 1, \pm 2, \cdots$) la definición de z^p es inequívoca:

$$z^p = \begin{cases} \overbrace{z \cdot z \cdots z}^{p \text{ veces}} & , \quad \text{si } p > 0 \\ \underbrace{z^{-1} \cdot z^{-1} \cdots z^{-1}}_{p \text{ veces}} & , \quad \text{si } p < 0 \text{ y } z \neq 0 \end{cases} .$$

La definición de la q-ésima raíz $z^{1/q}$ de un número complejo es menos directa. Dado $q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$ y $z \in \mathbb{C}$ buscamos un número complejo w (la q-ésima raíz de z) tal que

$$w^q = z\ .$$

Debemos tener que el módulo de w^q sea igual al módulo de z o sea,

$$|w^q| = |w|^q = |z|\ ,$$

esto determina unívocamente al módulo de w como la q-ésima raíz positiva del número $|z|$. Si $\alpha \in \arg(w)$ obtenemos con (1.6)

$$\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{q \text{ veces}} \in \arg(z)\ .$$

Si $\beta \in \arg(z)$ debemos tener

$$q\alpha = \beta + 2\pi m\ \ , \quad \text{con } m \text{ entero arbitrario}\ .$$

Luego,

$$\alpha = \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi m}{q} .$$

Cuando m recorre los enteros ¿cuantos argumentos distintos obtenemos? Los números

$$\alpha_m = \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi m}{q}$$

para $m = 0, 1, \cdots, q-1$ toman los valores

$$\alpha_0 = \frac{\beta}{q} , \quad \alpha_1 = \frac{\beta + 2\pi}{q} , \quad \cdots \alpha_{q-1} = \frac{\beta + 2\pi(q-1)}{q}$$

que además de ser todos distintos tienen la propiedad de que la diferencia de cualquier par de ellos no es un múltiplo entero de 2π (pues $q \geq 2$). Por lo tanto estos q números conducen a q argumentos distintos. Veamos ahora que para cualquier otro entero m distinto de $0, 1, \cdots,$ y $q-1$ se tiene que $\alpha_m - \alpha_j$ es un múltiplo entero de 2π para algún $j \in \{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$. En efecto, cualquier entero $m \notin \{0, 1, \cdots, q-1\}$ puede escribirse como $m = nq + j$ donde n es un entero y $j \in \{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$, luego

$$\alpha_m = \alpha_{nq+j} = \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi(nq+j)}{q} = \alpha_j + n2\pi .$$

Estos m no conducen a nuevos argumentos. Esto demuestra el siguiente resultado

Lema 1.3 *Para todo complejo z no-nulo y todo natural q mayor o igual a 1 existen exactamente q números complejos w_k distintos ($k = 0, 1, 2, \cdots, q-1$) tales que*

$$w_k^q = z ;$$

estos números son

$$|w_k| = \sqrt[q]{|z|} , \quad \arg(w_k) = \frac{\arg(z) + 2k\pi}{q} , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, q-1 .$$

La única q-ésima raíz de 0 es 0.

Hemos conseguido encontrar todas las q-ésimas raíces de z. Nuevamente, $z^{1/q}$ no es una función sino un conjunto de q números complejos distintos.

Es obvio cómo definir las raíces negativas: $z^{-1/q} = (1/z)^{1/q}$ para $z \neq 0$. También conviene convenir que $z^0 = 1$. Con esto, definimos las potencias racionales como (p es un entero arbitario, y q es un entero arbitrario no nulo):

$$z^{p/q} = (z^p)^{1/q}$$

donde se supone que $z \neq 0$ si $q < 0$.

Ejercicio 4 *Convénzase que valen la reglas usuales:* $z^{p_1/q_1} z^{p_2/q_2} = z^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}$ *y* $(z^{p_1/q_1})^{p_2/q_2} = z^{p_1 p_2/(q_1 q_2)}$.

1.6 Conjuntos de números complejos

1.6.1 Entornos

Dado un número complejo z_o y $r > 0$ llamamos:

1. **disco abierto de radio** r **alrededor de** z_o al conjunto

$$D(z_o; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_o| < r\} \ ;$$

2. **disco cerrado de radio** r **alrededor de** z_o al conjunto

$$\overline{D(z_o; r)} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_o| \leq r\} \ ;$$

3. **disco abierto pinchado de radio** r **alrededor de** z_o al conjunto

$$D_o(z_o; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - z_o| < r\} \ .$$

Se llama **entorno** de un punto $z \in \mathbb{C}$ a cualquier disco abierto alrededor de z. Cuando se quiere especificar el radio del disco se habla de r-**entorno**.

Dado un conjunto de números complejos $S \subset \mathbb{C}$, decimos que $z \in S$ es un **punto interior de** S si existe algún entorno de z contenido en S. Un punto $z \in \mathbb{C}$ se denomina **punto de frontera de** S si todo entorno de z contiene (a lo menos) un punto de S y (a lo menos) un punto que no pertenece a S. El **borde** o **frontera** de S es el conjunto de sus puntos de frontera.

Ejercicio 5 *Determine los puntos interiores y de frontera de un disco abierto, de un disco cerrado, de un disco abierto pinchado y de los conjuntos discretos* $\{1/n : \ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ *y* $\{1/n : \ n = 1, 2, 3, \cdots\} \cup \{0\}$.

¿Cuál es la frontera de $\mathbb{C}$*?*

1.6.2 Puntos de acumulación; Teorema de Bolzano-Weierstraß

$z \in \mathbb{C}$ es un **punto de acumulación** del conjunto $S \subset \mathbb{C}$ si todo entorno de z contiene infinitos puntos de S; equivalentemente, si todo disco abierto pinchado alrededor de z contiene (a lo menos) un punto de S.

Ejercicio 6 *¿Cuáles son los puntos de acumulación de* $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 0\} \cup \{i\} \cup \{-2\}$*?*

¿Cuáles son los puntos de acumulación de los conjuntos del ejercicio anterior?

Verifique que $S \subset \mathbb{C}$ *es cerrado si contiene sus puntos de acumulación.*

Uno de los resultados fundamentales del análisis real es el siguiente

Teorema 1.1 *(Teorema de Bolzano-Weierstraß) Todo conjunto infinito de números reales acotados tiene un punto de acumulación real.*

Ejercicio 7 *Demuestre que todo conjunto infinito de números complejos acotados tiene un punto de acumulación complejo.*

1.6.3 Conjuntos abiertos y cerrados

El conjunto S se dice **abierto** si todos sus puntos son interiores. El conjunto S es **cerrado** si contiene a su frontera (equivalentemente, si $\mathbb{C} \setminus S$ es abierto). El **cierre** de S es la unión de S y su frontera.

Ejercicio 8 *Convénzase que $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*

Verifique que si un conjunto no tiene puntos de frontera entonces es abierto.

1.6.4 Conjuntos conexos

Dados dos complejos distintos z_1 y z_2 llamamos $[z_1, z_2]$ al segmento de recta que une a estos puntos: $[z_1, z_2] = \{tz_1 + (1-t)z_2 : 0 \leq t \leq 1\}$.

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice **conexo** si dado cualquier par de puntos distintos z_1, z_2 en S existen finitos puntos $z_1 = w_0, w_1, w_2, \cdots w_n = z_2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que los n segmentos de recta $[w_k, w_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ pertenecen a S. O sea, cualquier par de puntos de S puede unirse por medio de una poligonal que no sale de S.

Ejercicio 9 *Demuestre que $S \subset \mathbb{C}$ es conexo si y sólo si no existen dos subconjuntos abiertos no vacíos S_1, S_2 de $\mathbb{C}$ tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $S = S_1 \cup S_2$.*

Un **dominio** es cualquier conjunto abierto y conexo.

1.6.5 Conjuntos acotados

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice acotado si está contenido en algún disco; equivalentemente, si existe $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in S$.

1.7 Límites

Decimos que una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números complejos z_n **converge** a $z \in \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0 \,. \tag{1.10}$$

En tal caso, z es el **límite** de la sucesión y decimos que la sucesión es **convergente**; también escribimos $z_n \to z$.

Recuerde que $\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$ significa precisamente que dado $\epsilon > 0$ existe n_o tal que $|z - z_n| \leq \epsilon$ para $n \geq n_o$. Luego

Lema 1.4 *Si $\{z_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de complejos entonces las condiciones*

1. $z_n \to z$*;*
2. *Para todo entorno E de z existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in E$ cuando $n \geq n_o$;*

son equivalentes.

Una aplicación de las relaciones (1.2)-(1.4) y del Lema 1.2 produce inmediatamente el siguiente resultado:

Lema 1.5 $z_n \to z$ *si y sólo si* $\overline{z_n} \to \overline{z}$ *si y sólo si* $Re(z_n) \to Re(z)$ *y* $Im(z_n) \to Im(z)$.

Ejercicio 10 *Demuestre*

Lema 1.6 *Si $z_n \to z$ entonces $|z_n| \to |z|$.*

y convénzase que $|z_n| \to |z|$ no implica que $z_n \to z$.

Decimos que una sucesión $\{z_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ de complejos es una **sucesión de Cauchy** si dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| \leq \epsilon$ para $n, m \geq n_o$. Como en el caso de los reales (propiedad de "completitud"),

Proposición 1.1 *Una sucesión de complejos converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración: Reducimos la demostración a la del caso real que no repetimos aquí.

$\{z_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ converge si y sólo si existe $z \in \mathbb{C}$ con $z_n \to z$, si y sólo si $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$, si y sólo si $\{\mathrm{Re}(z_n) :\ n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\mathrm{Im}(z_n) :\ n \in \mathbb{N}\}$ son de Cauchy. Basta entonces ver que $\{z_n\}$ es de Cauchy si y sólo si $\{\mathrm{Re}(z_n)\}$ y $\{\mathrm{Im}(z_n)\}$ son ambas de Cauchy; pero esto se sigue del Lema 1.2. $\square$

El punto $z \in \mathbb{C}$ se llama **punto límite de la sucesión** $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ si para todo entorno E de z existen infinitos $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in E$. Hay que distinguir bien la noción de punto límite de una sucesión con la noción de punto de acumulación de un conjunto. Considere la sucesión $\{z_n = (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces tanto 1 como -1 son puntos límites, sin embargo el conjunto $\{-1, 1\}$ formado por los valores de z_n no tiene puntos de acumulación.

Lema 1.7 *Si z es un punto límite de la sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces z pertenece al cierre del conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración: Sea K el conjunto de los valores que asume z_n, $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in K$ entonces z está a fortiori en el cierre de K. Si $z \notin K$ entonces todo entorno E de z contiene a z (que no pertenece a K) y a infinitos z_n que pertenecen a K (pueden ser todos iguales); luego z pertenece a la frontera de K. $\square$

Si $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión y $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de números naturales $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $n(k+1) > n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ es una **subsucesión** de la sucesión original.

Ejercicio 11 *Demuestre que una sucesión es convergente a z si y sólo si toda subsucesión también lo es.*

Usaremos la siguiente notación: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ para una sucesión de números reales x_n significa que dado $R > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq R$ para todo $n \geq n_o$.

1.8 Conjuntos compactos

Teorema 1.2 *Sea $S \subset \mathbb{C}$ no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *S es cerrado y acotado;*
2. *Toda sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de S admite un punto límite en S;*
3. *Toda sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de S admite una subsucesión $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ convergente cuyo límite pertenece a S.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Sea K el conjunto de valores que toma la sucesión. Los conjuntos $\mathrm{Re}(K)$ e $\mathrm{Im}(K)$ son acotados por la desigualdad (1.2).

Si tanto $\mathrm{Re}(K)$ como $\mathrm{Im}(K)$ son finitos, entonces K es finito y existirá $w \in K$ tal que $z_n = w$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ con lo que w es un punto de acumulación de la sucesión.

En caso contrario, uno de los dos conjuntos es infinito, por ejemplo, $\mathrm{Re}(K)$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstraß, hay un $a \in \mathbb{R}$ tal que a es punto de acumulación de $\mathrm{Re}(K)$: para todo $\epsilon > 0$ existen infinitos puntos $x \in \mathrm{Re}(K)$ con $|x - a| \leq \epsilon/2$. Luego existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ con $|\mathrm{Re}(z_n) - a| \leq \epsilon/2$; sea $M = \{n \in \mathbb{N} : |\mathrm{Re}(z_n) - a| \leq \epsilon\}$. Si $Y = \{\mathrm{Im}(z_n) : n \in M\}$ es finito hay un $y \in Y$ tal que $\mathrm{Im}(z_n) = y$ para infinitos $n \in M$. Entonces $a + iy$ es un punto de acumulación de la sucesión. Si en cambio Y es infinito entonces admite un punto de acumulación $b \in \mathbb{R}$, y hay infinitos $n \in M$ tal que $|\mathrm{Im}(z_n) - b| \leq \epsilon/2$. Entonces para estos n se tiene

$$|z_n - (a + ib)| = |\mathrm{Re}(z_n) - a + i(\mathrm{Im}(z_n) - b)| \leq |\mathrm{Re}(z_n) - a| + |\mathrm{Im}(z_n) - b| \leq \epsilon \ .$$

Esto demuestra que la sucesión tiene un punto límite p. Como S es cerrado se tiene $p \in S$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $z \in S$ un punto límite de la sucesión. Para todo $k = 1, 2, \cdots$ el conjunto $M_k = \{n \in \mathbb{N} : \ |z - z_n| \leq (1/k)\}$ es infinito. Sea $n(0) = 0$. Suponga que ha elegido $n(k)$ para $k = 1, 2, \cdots m$ de tal manera que $0 < n(1) < n(2) < \cdots < n(m)$ y $n(k) \in M_k$. El conjunto M_{m+1} es infinito y se puede por ende elegir $n(m+1) \in M_{m+1}$ tal que $n(m+1) > n(m)$. Entonces la sucesión $\{z_{n(k)} : k = 1, 2, \cdots\}$ es una subsucesión que converge a z. Pues dado $\epsilon > 0$ sea $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $(1/k_o) \leq \epsilon$ entonces $|z - z_{n(k)}| \leq 1/k \leq \epsilon$ para todo $k \geq k_o$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Se prueba la negación.

Si S no es acotado existe una sucesión $\{z_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ con $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Suponga que $\{z_{n(k)} : \ k \in \mathbb{N}\}$ es una subsucesión convergente a z. Entonces, $\lim_{k\to\infty} |z_{n(k)}| = |z|$ por un lado y $\lim_{k\to\infty} |z_{n(k)}| = \infty$ por el otro. La subsucesión no puede ser convergente.

Si S no es cerrado y su frontera es vacía entonces S y $\mathbb{C} \setminus S$ son abiertos. Como $\mathbb{C}$ es conexo debemos tener $S = \mathbb{C}$ y volvemos al caso no acotado. En caso contrario sea z un punto de frontera de S que no pertenece a S. Como todo entorno de z contiene a lo menos un punto de S (por ende distinto de z) se puede construir una sucesión $\{z_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de S que converge a z. Toda subsucesión converge tanbién a z, pero $z \notin S$. $\square$

Un conjunto no vacío de números complejos se dice **compacto** si satisface las condiciones equivalentes del teorema.

Lema 1.8 *Si $\{K_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de $\mathbb{C}$ tal que $K_{n+1} \subset K_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y K_o es acotado, entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seleccione algún punto $z_n \in K_n$. La sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ pertenece a K_o que es compacto. Existe entonces un punto límite $z \in K_o$. Pero z es punto límite de toda subsucesión $\{z_k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$ que pertenece a K_n. Luego z está en el cierre de cada K_n. Como K_n es cerrado, $z \in K_n$. $\square$

Lema 1.9 *Si K es un subconjunto compacto de un abierto $A \subset \mathbb{C}$ existe $r > 0$ tal que $\overline{D(z,r)} \subset A$ para todo $z \in K$, y $\cup_{z \in K} \overline{D(z,r)}$ es compacto.*

Demostración: Supongamos que la afirmación sobre r es falsa; vale decir que para todo $r > 0$ hay $z \in K$ tal que $\overline{D(z,r)}$ contiene puntos que no están en A. Para $n = 1, 2, \cdots$ sea $z_n \in K$ tal que $\overline{D(z_n, 1/n)}$ tiene puntos que no pertenecen a A. Por la compacidad de K la sucesión $\{z_n : n \geq 1\}$ tiene un punto límite $z \in K$. Ya que $K \subset A$ y A es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $D(z, \epsilon) \subset A$. Ya que z es punto límite de la sucesión, existen infinitos $z_n \in \overline{D(z, \epsilon/2)}$. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \epsilon/2$ y $z_k \in \overline{D(z, \epsilon/2)}$. Si $w \in D(z_k, 1/k)$ entonces $| z - w | \leq | z - z_k | + | z_k - w | < (\epsilon/2) + (1/k) < \epsilon$ o sea que $w \in D(z, \epsilon) \subset A$ lo que contradice la construcción de z_k. Por lo tanto hay $r > 0$ con la propiedad requerida. Sea $L = \cup_{z \in K} \overline{D(z,r)}$. Si $z \in L$ hay $w \in K$ con $| z - w | \leq r$ y por ende $| z | \leq | w | + r$, con lo cual L es acotado pues K lo es. Suponga que la sucesión $\{z_n\} \subset L$ converge a z. Dado $\epsilon > 0$ hay un n_o tal que $z_n \in D(z, \epsilon/2)$ para $n \geq n_o$. Hay $w_n \in K$ tal que $z_n \in \overline{D(w_n, r)}$. Entonces hay una subsucesión $\{w_{n(j)} : j \geq 0\}$ que converge a $w \in K$. Ahora,

$$| z - w | \leq | z - z_{n(j)} | + | z_{n(j)} - w_{n(j)} | + | w - w_{n(j)} | \leq r + | z - z_{n(j)} | + | w - w_{n(j)} | ,$$

y tomando el límite $j \to \infty$ obtenemos $z \in \overline{D(w,r)}$. $\square$

Capítulo 2

Funciones

2.1 Funciones sobre los complejos

Hablaremos de **función compleja** cuando la función definida en algún subconjunto de $\mathbb{C}$ toma valores en $\mathbb{C}$. Si f es una función compleja anotamos $|f|$ para la función compleja definida para los z donde esté definida f por $|f(z)|$ ($|f|$ toma valores no negativos). Las funciones complejas $\mathrm{Re}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ se definen análogamente ambas toman valores reales).

La notación $f = u + iv$ indica que estamos viendo la función compleja $f(z)$ como función de dos variables reales ($x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$) y que $\mathrm{Re}(f) = u$, $\mathrm{Im}(f) = v$.

2.2 Continuidad y consecuencias

Si f es una función compleja definida en un entorno de $z \in \mathbb{C}$ decimos que f es **continua en** z si para todo entorno G de $f(z)$ existe un entorno H de z tal que $f(H) \subset G$.

Ejercicio 12 *Demuestre*

Lema 2.1 *La función compleja f definida en un entorno E de z es continua si y sólo si para toda sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ que converge a z se tiene $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$.*

Lema 2.2 *La función compleja $f = u + iv$ definida en un entorno de $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ es continua si y sólo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son ambas continuas en (x_o, y_o).*

2.2.1 Ejemplos

El argumento. Ya hemos adelantado alguna información sobre el argumento de un complejo en el Capítulo 1. Llamamos argumento de un complejo z no nulo a cualquier número real α tal que $z =| z | \exp(i\alpha)$. $\arg(z)$ es entonces el conjunto de los argumentos de z. En el Teorema 4.1 demostramos que $\exp(it) = 1$ para un real t si y sólo si t es un múltiplo entero de 2π (π también se define en el Teorema citado). Tomando esto como dato, es inmediato verificar que si $\alpha, \beta \in \arg(z)$ entonces $\alpha = \beta + 2n\pi$ para algún entero n. Dado cualquier $a \in \mathbb{R}$ y cualquier complejo $z \neq 0$, sea $\alpha \in \arg(z)$. Considere el menor número entero n tal que $a - \alpha < 2n\pi$; entonces $a < \alpha + 2n\pi$ y ya que $a - \alpha \geq 2(n-1)\pi$, se tiene $\alpha + 2n\pi \leq a + 2\pi$. Como $\alpha \in \arg(z)$ hemos demostrado que para todo $z \neq 0$ hay un único argumento en el intervalo $(a, a + 2\pi]$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Esto define la función $\arg_a(z)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Fijemos a y veamos qué propiedades de continuidad tiene la función $\arg_a$. Sea L_a la semirecta infinita definida por los puntos z con $\arg_a(z) = a + 2\pi$. Sea $z \neq 0$ con $a < \arg_a(z) < a + 2\pi$, y sea $\delta > 0$ tal que $\overline{D(z;\delta)}$ no tiene puntos de L_a. Entonces es inmediato ver (haga la figura) que $\mid \arg_a(w) - \arg_a(z) \mid \leq \arcsin(\delta/\sqrt{\delta^2 + \mid z \mid^2})$ para todo $w \in \overline{D(z;\epsilon)}$. La continuidad del arcsin implica que $\arg_a$ es continua en z para todo $z \neq 0$ con $a < \arg_a(z) < a + 2\pi$. Si en cambio $z \in L_a$ con $z \neq 0$ tenemos $\arg_a(z) = a + 2\pi$. Cualquiera sea $\delta > 0$, tal que el disco cerrado $\overline{D(z;\delta)}$ no toque ni el eje real ni el imaginario, la semirecta L_a parte a este disco por la mitad y se tiene

$$\arg_a(w) = \begin{cases} a + \arcsin(\delta/\sqrt{\delta^2 + \mid z \mid^2}) & , \quad \text{si } \arg_a(w) \in (a, a + \pi/2] \\ a + 2\pi - \arcsin(\delta/\sqrt{\delta^2 + \mid z \mid^2}) & , \quad \text{si } \arg_a(w) \in [a + 3\pi/2, a + 2\pi] \end{cases} ,$$

para todo $w \in \overline{D(z;\delta)}$. Por lo tanto si $w \to z$ con $\arg_a(w) \in (a, a + \pi/2]$ se tiene $\lim_{w \to z} \arg_a(w) = a \neq \arg_a(z)$. La función $\arg_a$ es discontinua en todo punto no nulo de L_a y no está definida $z = 0$.

La raíz cuadrada

Hemos visto que dado cualquier complejo z no-nulo hay dos complejos $w_1(z)$ y $w_2(z)$ ($w_2(z) = -w_1(z)$ aunque esto no viene al caso ahora) distintos tales que $w_1(z)^2 = w_2(z)^2 = z$. Para armar la función "raíz cuadrada", llamemosla f, tal que $f(z)^2 = z$, debemos elegir para cada z alguno de los dos números $w_1(z), w_2(z)$. Por ejemplo:

$$f(z) = \begin{cases} w_1(z) & , \quad \text{si Re}(z)\text{Im}(z) \text{ es racional} \\ w_2(z) & , \quad \text{sino} \end{cases} .$$

Esta es una función definida sobre todo $\mathbb{C}$, aunque sea bastante inútil y difícil de calcular.

Las dos ramas $w_1(z)$ y $w_2(z)$ de la raíz están dadas por

$$|w_1(z)| = |w_2(z)| = \sqrt{|z|} \ , \quad \arg(w_1(z)) = (1/2)\arg(z) \ ,$$

$$\arg(w_2(z)) = (1/2)\arg(z) + (\pi/2) \ .$$

Tomando el argumento principal para especificar el ángulo,

$$f_{\pm}(z) = \pm\sqrt{|z|}(\cos(\operatorname{Arg}(z)/2) + i\sin(\operatorname{Arg}(z)/2))$$

define dos funciones sobre $\mathbb{C}$ cuyo cuadrado es z. Ambas funciones son continuas fuera de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0 \ , \ \operatorname{Re}(z) < 0\}$ que no es otra cosa que los números reales negativos. Observe que si $x < 0$, entonces $f_{\pm}(x) = \pm i\sqrt{|x|}$. Si $\{z_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión con $\pi/2 \leq \operatorname{Arg}(z_n) \leq \pi$, y $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_{\pm}(z_n) = f_{\pm}(x)$. Mientras que si la sucesión $\{z_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ satisface $-\pi < \operatorname{Arg}(z_n) \leq -\pi/2$, y $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_{\pm}(z_n) = f_{\mp}(x)$.

Cuando z no es un real negativo y $\{z_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión que converge a z entonces puedo suponer que hay un n_o lo suficientemente grande tal que todos los z_n con $n \geq n_o$ están en un disco abierto $D(z, r)$ alrededor de z, con r lo suficientemente chico como para que el disco no intersecte a los reales no positivos. Los argumentos principales de estos z_n estarán en un intervalo de la forma (a, b) que no contiene a π. La continuidad de la raíz cuadrada positiva de un real positivo y la continuidad del argumento principal fuera de los reales no positivos, me permiten demostrar la continuidad de $f_{\pm}$ en el punto z.

Ejercicio 13 *Demuestre el siguiente resultado. La demostración es una simple transcripción del correspondiente resultado para funciones reales.*

Proposición 2.1 *Si las funciones f y g son continuas en $z \in \mathbb{C}$ entonces las funciones $f + \alpha g$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), fg y también f/g cuando $g(z) \neq 0$ son continuas en z.*

Si la función compleja f es continua en $z \in \mathbb{C}$ y la función compleja g está definida en algún entorno de $f(z)$ y es continua allí, entonces $g(f(z))$ es continua en z.

Teorema 2.1 *Sea f una función compleja continua definida sobre un compacto $K \subset \mathbb{C}$. Entonces $f(K)$ es compacto y existen puntos z_M y z_m en K tales que $|f(z_M)| \geq |f(z)| \geq |f(z_m)|$ para todo $z \in K$.*

Demostración: Usamos la caracterización 3. de compacidad del Teorema 1.2. Sea $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $f(K)$. Existen $z_n \in K$ tales que $w_n = f(z_n)$. Por la compacidad de K existe una subsucesión $\{z_{n(k)} : \ k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = z$ y $z \in K$. Por la continuidad de f, $\lim_{k\to\infty} w_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} f(z_{n(k)}) = f(z)$ y $f(z) \in f(K)$. Luego $f(K)$ es compacto.

Sea $s = \sup_{z\in K} |f(z)|$. Existe una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ en K con $s = \lim_{n\to\infty} |f(z_n)|$. Tomando una subsucesión $\{z_{n(k)} : \ k \in \mathbb{N}\}$ con límite z_M y por la continuidad de $z \mapsto$

$|f(z)|$, tenemos $s = \lim_{k\to\infty} |f(z_{n(k)})| = |f(z_M)|$. Similarmente se procede para encontrar a z_m. $\Box$

2.3 Convergencias de sucesiones de funciones

Decimos que la sucesión $\{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ de funciones complejas definidas en $X \subset \mathbb{C}$ **converge** a la función f definida sobre X si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\ , \quad z \in X\ . \tag{2.1}$$

En otras palabras, dado $\epsilon > 0$ y $z \in X$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ (que puede depender de z) tal que $|f(z) - f_n(z)| \le \epsilon$. Anotamos $f_n(z) \to f(z)$ o bien $f_n \to f$. Es inmediato que si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ entonces $(f_n + \alpha g_n) \to f + \alpha g$, $f_n g_n \to fg$ y también $f_n(z)/g_n(z) \to f(z)/g(z)$ para $g(z) \neq 0$.

Ejercicio 14 *Demuestre que si $f_n \to f$ entonces $|f_n| \to |f|$ pero lo inverso no es cierto.*

Considere las funciones $f_n(z) = z^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sobre $\mathbb{C}$. Son continuas en tanto que productos de la función continua $z \mapsto z$. Ya que

$$|f_n(z)| = |z|^{n+1}$$

tenemos que $f_n \to 0$ en el disco abierto $D(0,1)$, pues $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ con $0 \le x < 1$. La misma identidad indica que fuera del disco, i.e., $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\}$, la sucesión de funciones no converge pues la sucesión $|f_n|$ no lo hace. Sobre la frontera del disco, $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ para algún $\alpha \in \arg(z)$ y $f_n(z) = \cos(\alpha(n+1)) + i\sin(\alpha(n+1))$ que no converge salvo para valores muy especiales de α.

Si $f_n \to f$ decimos que la convergencia es **uniforme** si el límite (2.1) es uniforme en z, o sea

$$\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f(z) - f_n(z)| \le \epsilon \text{ para todo } z \in X \text{ y todo } n \ge n_o\ . \tag{2.2}$$

Reconsideremos las funciones f_n dadas por $f_n(z) = z^{n+1}$. Hemos visto que $f_n \to 0$ en el disco abierto $D(0;1)$. Veamos que la convergencia es uniforme en todo disco $\overline{D(0,r)}$ con $r < 1$. Ya que

$$|f_n(z) - 0| = |z|^{n+1} \le r^{n+1}\ ,$$

dado $\epsilon > 0$, basta tomar $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $r^{n_o+1} \leq \epsilon$ – lo que es posible pues $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$– para garantizar que $|f_n(z)| \leq \epsilon$ si $n \geq n_o$. Por otro lado, en el disco $D(0;1)$, la convergencia no es uniforme. Si lo fuera, se tendría, tomando $\epsilon = 1/7$, un $m \in \mathbb{N}$ con

$$|f_m(z)| = |z|^{m+1} \leq 1/7$$

para todo z con $|z| < 1$. Tomando cualquier sucesión $\{z_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ en $D(0;1)$ con $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ (por ejemplo $z_n = 1 - n^{-1}$) se obtendría que $1/7 \geq \lim_{n\to\infty} |z_n|^{m+1} = 1$.

Otro ejemplo de convergencia no uniforme. Considere las funciones continuas $f_n(z) = \exp(|z|/(n+1))$, para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$. Sea $f(z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$. Se tiene $f_n \to f$ pero no uniformemente. En efecto, si la convergencia fuere uniforme, dado $\epsilon > 0$ tendríamos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $z \neq 0$ arbitrario

$$\exp(|z|/(n+1)) - 1 = |1 - \exp(|z|/(n+1)| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n_o$. Y tomando el límite $|z| \to \infty$ obtendríamos una contradicción.

Una pregunta natural es la siguiente: ¿ Si $f_n \to f$ y las f_n son continuas, se puede decir algo sobre la continuidad de f? En los ejemplos recién vistos la función límite, f, resultaba ser continua. Veamos que esto no es el caso general. Consideremos $f_n(0) = 0$ y $f_n(z) = |z|^{1/n} \exp(i\text{Arg}(z)/n)$ que no es otra cosa que la rama principal de la raíz n-ésima. Claramente, $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Para $z \neq 0$, tenemos

$$|f_n(z) - 1|^2 = |z|^{2/n} + 1 - 2Re(f_n(z))$$

$$= |z|^{2/n} + 1 - 2|z|^{1/n} \cos(\text{Arg}(z)/n) = (|z|^{1/n} - 1)^2 + 2|z|^{1/n}(1 - \cos(\text{Arg}(z)/n)) \ .$$

Ya que el coseno es continuo y $\cos(0) = 1$; y ya que

$$\lim_{n\to\infty} r^{1/n} = 1 \ , \quad r > 0 \ ;$$

deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z) - 1|^2 = \{\lim_{n\to\infty}(|z|^{1/n} - 1)\}^2 + 2\{\lim_{n\to\infty} |z|^{1/n}\}(1 - \lim_{n\to\infty} \cos(\text{Arg}(z)/n)) = 0 \ .$$

Hemos verificado entonces que $f_n \to f$ donde

$$f(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z = 0 \\ 1 & , \quad z \neq 0 \end{cases} \ .$$

Esta función es discontinua en $z = 0$. Sin embargo f_n es continua fuera de los reales negativos.

La hipótesis adicional que garantiza la continuidad de la función límite es la uniformidad de la convergencia:

Teorema 2.2 *Si* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una sucesión de funciones* f_n *continuas en un abierto* A *que convergen uniformemente a* f *entonces* f *es continua en* A.

Demostración: Sea $z \in A$ y $\epsilon > 0$. Tenemos

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f(w) - f_n(w)| + |f_n(z) - f_n(w)| .$$

Seleccione $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(\zeta) - f_n(\zeta)| \leq \epsilon/3$ para todo $\zeta \in A$ por la convergencia uniforme. Como f_n es continua, existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \epsilon/3$ para todo $w \in A$ con $|z - w| \leq \delta$. Para tales w se tiene $|f(z) - f(w)| \leq 3(\epsilon/3) = \epsilon$ lo que completa la demostración. $\square$

2.4 La derivada

Si f está definida en un entorno de $z \in \mathbb{C}$, y el límite

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} \tag{2.3}$$

existe, entonces define la **derivada de** f **en** z, denotada por $f'(z)$. A primera vista, la definición parece inofensiva. Sin embargo, hay que tener en cuenta qué es lo que significa "$\lim_{w \to 0}$": Para toda sucesión $\{w_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ con $w_n \to 0$, el límite (2.3) existe y es independiente de la sucesión. En otras palabras, dado un entorno E de $f'(z)$ existe un entorno F de 0 tal que $\frac{f(z+w)-f(z)}{w} \in E$ si $w \in F$.

Ejercicio 15 *Demuestre que si* f *es* **diferenciable***(o sea existe la derivada) en* z *entonces* f *es continua en* z.

El lector recordará que las reglas obtenidas en el cálculo real para derivar: la suma de dos funciones, el producto de dos funciones, el cociente de dos funciones, las potencias, etc. fueron todas obtenidas por métodos algebraicos basados en las propiedades de la suma y la multiplicación. Las mismas demostraciones pueden aplicarse para demostrar los siguientes tres resultados básicos.

Proposición 2.2 *Si las funciones* f *y* g *son diferenciables en* z *entonces:*

1. $(f + \alpha g)'(z) = f'(z) + \alpha g'(z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
2. $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;

3. $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/g^2(z)$ *si* $g(z) \neq 0$;

Proposición 2.3 *(Regla de la Cadena) Si* $f : \mathbb{C} \supset A \to B \subset \mathbb{C}$ *y* $g : B \to \mathbb{C}$, f *es diferenciable en* $z \in A$, g *es diferenciable en* $f(z) \in B$, *entonces* $g \circ f$ *es diferenciable en* z *y* $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

Proposición 2.4 *Para un número entero* n *la derivada de* $z \mapsto z^n$ *es* $z \mapsto nz^{n-1}$ *con la provisión de que* $z \neq 0$ *si* n *es negativo.*

Como hemos visto las raíces de un número complejo son multi-valuadas. Si se elige alguna rama se obtiene una función diferenciable

Ejercicio 16 *Demuestre*

Proposición 2.5 *Si* $f(z) = z^{1/m}$, *con* m *entero no nulo, es una rama de la* m*-ésima raíz entonces* $f'(z) = (1/m)f(z)^{(1-m)/m}$.

Veamos ahora algunas funciones que no son diferenciables:

Sea $f(z) = \overline{z}$. Entonces

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \frac{\overline{w}}{w}$$

es un número de módulo 1. Si $w \in \mathbb{R}$, el cociente es 1; cuando w es puramente imaginario el cociente es igual a -1. Por lo tanto $\lim_{w \to 0} \frac{\overline{w}}{w}$ no existe.

Sea $g(z) = |z|$. Entonces

$$\frac{g(z+w) - g(z)}{w} = \frac{|z+w| - |z|}{w} \; ;$$

el numerador es un número real mientras que el denominador es complejo. Cuando $z = 0$ el cociente es $e^{-i\alpha}$ con $\alpha \in \arg(w)$; un argumento como en el ejemplo anterior demuestra que el límite no puede existir. Cuando $z \neq 0$ y w es tal que $|z + w| = |z|$ lo que sucede cuando nos acercamos a z por el círculo de radio $|z|$, entonces el cociente se anula. Si en cambio $\arg(w) = \arg(z)$, o sea nos acercamos a z por el rayo que pasa por 0 y z, entonces $|z + w| = |z| + |w|$ y el cociente es nuevamente $|w|/w$; el límite no puede existir.

2.5 Analiticidad; ecuaciones de Cauchy-Riemann

Decimos que f es **analítica** en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ si la derivada existe en todo punto del abierto A; en general se omite "en un abierto..." ya que se sobreentiende usualmente que el conjunto A donde está definida f es abierto. Una función analítica en $\mathbb{C}$ se denomina

entera.

Supongamos que $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$. Entonces tomando w real en (2.3), tenemos

$$f'(z) = \lim_{w\to 0} \frac{u(x+w,y) + iv(x+w,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{w}$$

$$= \lim_{w\to 0} \left(\frac{u(x+w,y) - u(x,y)}{w} + i\frac{v(x+w,y) - v(x,y)}{w} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$$

pues el límite existe (si y) sólo si existen los límites de la parte real e imaginaria. Tomando ahora w puramente imaginario, $w = ih$ en (2.3) tenemos

$$f'(z) = \lim_{ih\to 0} \frac{u(x,y+h) + iv(x,y+h) - u(x,y) - iv(x,y)}{ih}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left((-i)\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} \right) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\ .$$

Combinando ambas expresiones para $f'(z)$ y considerando la parte real e imaginaria, obtenemos las famosas ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) &= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) &= -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Proposición 2.6 *Si $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$ entonces las derivadas parciales de u y v existen en (x,y), se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.4) y*

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\ . \tag{2.5}$$

Estas ecuaciones son necesarias para la diferenciabilidad compleja. Suplementadas con una condición de continuidad, también son suficientes:

Proposición 2.7 *Sean u y v funciones definidas en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ tales que las derivadas parciales existen y son continuas en A. Si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(x,y) \in A$ entonces $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$, y se tiene (2.5).*

Demostración: Sea $(x, y) \in A$ y $z = x + iy$. Con $w = \xi + i\eta$, y suponiendo que tanto ξ como η son tales que $(x + \xi, y + \eta) \in A$, tenemos

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \frac{u(x+\xi, y+\eta)-u(x,y)}{\xi+i\eta} + i\frac{v(x+\xi, y+\eta)-v(x,y)}{\xi+i\eta} \ . \tag{2.6}$$

La hipótesis de existencia y continuidad de las derivadas parciales implica que

$$u(x+\xi, y+\eta)-u(x,y) = \xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,g(x,y,\xi,\eta) \ ,$$

$$v(x+\xi, y+\eta)-v(x,y) = \xi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,h(x,y,\xi,\eta) \ ,$$

donde las funciones g y h tienen la propiedad

$$\lim_{\xi\to 0\ ,\ \eta\to 0} g(x,y,\xi,\eta) = \lim_{\xi\to 0\ ,\ \eta\to 0} h(x,y,\xi,\eta) = 0 \ .$$

Insertando esto en (2.6) obtenemos

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \frac{\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,g(x,y,\xi,\eta)}{\xi+i\eta}$$

$$+i\frac{\xi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,h(x,y,\xi,\eta)}{\xi+i\eta}$$

$$= \frac{1}{\xi+i\eta}\left(\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\right) + \frac{i}{\xi+i\eta}\left(\xi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) - i\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)\right)$$

$$+\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta}\left(g(x,y,\xi,\eta) + h(x,y,\xi,\eta)\right) \ .$$

Ahora usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann y obtenemos

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) + \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta}\left(g(x,y,\xi,\eta) + h(x,y,\xi,\eta)\right) \ .$$

El factor $\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta} = \frac{\xi-i\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$ es de módulo igual a 1 y por ende tomando el límite $\xi \to 0$ y $\eta \to 0$ obtenemos la existencia de la derivada en z y la relación $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$. $\square$

Veremos más adelante que si $f = u + iv$ es analítica entonces las derivadas parciales de u y v son continuas. Con esto quedará demostrado el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.3 *La función $f = u+iv$ es analítica en un abierto A si y sólo si las funciones u y v tienen derivadas parciales continuas y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A.*

El siguiente resultado resulta de una aplicación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 2.4 *Si f es analítica en un dominio D cualquiera de las siguientes propiedades implica que f es constante:*

1. *$f'(z) = 0$ para todo $z \in D$;*
2. *$z \mapsto Re(f(z))$ es constante en D;*
3. *$z \mapsto Im(f(z))$ es constante en D;*
4. *$z \mapsto |f(z)|$ es constante en D.*

Ejercicio 17 *Demuestre el teorema y convenzase de que el resultado es falso si D es abierto pero no conexo.*

2.6 Funciones armónicas

Considere una función $f = u + iv$ que es analítica en un dominio D y suponga que las derivadas parciales de segundo orden tanto de u como de v existen. Entonces, ya que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) \; ; \; \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right) \; ,$$

obtenemos de las ecuaciones de Cauchy-Riemann la relación

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

o sea u satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0 \; . \tag{2.7}$$

Una función definida en un dominio de $\mathbb{R}^2$ con derivadas parciales de segundo orden continuas que satisface la ecuación de Laplace se llama **armónica**. Un cálculo análogo demuestra que v también es armónica.

Veremos más adelante que el hecho de que $f = u + iv$ es analítica garantiza que tanto u como v admiten derivadas parciales de segundo orden continuas; esto completará la demostración del siguiente resultado

Teorema 2.5 *Si $f = u + iv$ es analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ entonces u y v son ambas armónicas sobre D (visto como dominio de $\mathbb{R}^2$).*

Para un par (u, v) de funciones armónicas sobre el mismo dominio D la analiticidad de $f = u + iv$ en D es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D. En tal caso estas funciones se llaman **armónicas conjugadas**.

Dada un función armónica u: ¿es posible encontrar una armónica conjugada? La respuesta es: no siempre –como se verá en un ejercicio. Para encontrar la armónica conjugada es preciso resolver las ecuaciones de Cauchy-Riemann vistas como ecuaciones diferenciales parciales para la función incógnita v:

Un ejemplo: Sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$ sobre $\mathbb{R}^2$. Se calcula

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \ , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x, y) = 1 - 6xy \ ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x, y) = 6x \ , \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) = -6x \ .$$

u es armónica en $\mathbb{R}^2$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann dan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x, y) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x, y) = -1 + 6xy \ ;$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x, y) = 3(x^2 - y^2) \ .$$

Integrando la segunda ecuación (respecto de y) se obtiene

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + a(x)$$

donde a es una función arbitraria de x. Integrando la primera ecuación (respecto de x) se obtiene

$$v(x, y) = 3x^2 y - x + b(y)$$

donde b es función de y. Igualando, obtenemos $a(x) = -x + c$, $b(y) = -y^3 + c$, donde c es una constante real arbitraria, y $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 - x + c$. Por su construcción v es armónica en $\mathbb{R}^2$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es entera. Es fácil verificar que $f(z) = z^3 - i(z + c)$ y esta función es manifiestamente entera.

Capítulo 3

Series de potencias

3.1 Series

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es una expresión formal donde los sumandos son números complejos. La N-ésima ($N \in \{0, 1, 2, \cdots\} =: \mathbb{N}$) suma parcial de la serie es

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_N \ .$$

La serie es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_N : N \in \mathbb{N}\}$ es convergente: o sea si existe un número complejo S (la **suma** de la serie) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S - S_N| < \epsilon \ , \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N} \text{ con } N \geq N_o \ .$$

En tal caso se escribe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$. Si la serie no es convergente, se dice **divergente**. La serie se llama **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (formada por los módulos $|z_n|$ de los sumandos z_n de la serie) es convergente.

Si una dada serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces

$$|z_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq |S - S_n| + |S - S_{n-1}|$$

y por ende $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, lo que provee un criterio necesario simple para la convergencia. Pero esto no alcanza como es conocido del análisis real[1]. Un criterio necesario y suficiente para la convergencia de una serie es el llamado **Criterio de Cauchy** cuya demostración es idéntica que en el caso real:

Proposición 3.1 (Criterio de Cauchy) *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de números naturales N y M con*

[1] Considere, por ejemplo, la serie con $z_0 = 0$ y $z_n = 1/n$ para $n \geq 1$.

$M > N \geq N_o$ se tiene

$$|\sum_{n=N+1}^{M} z_n| < \epsilon \ .$$

La convergencia absoluta es más fuerte que la convergencia:

Proposición 3.2 *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Demostración: De la convergencia absoluta se desprende que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N_o+1}^{\infty} |z_j| < \epsilon \ .$$

Si $M > N \geq N_o$ entonces, por la desigualdad del triángulo,

$$|\sum_{j=0}^{M} z_j - \sum_{k=0}^{N} z_k| = |\sum_{j=N+1}^{M} z_j| \leq \sum_{j=N+1}^{M} |z_j| < \epsilon \ ,$$

con lo que la serie es convergente por el criterio de Cauchy. $\square$

En lo que sigue queremos estudiar series donde los sumandos z_n son funciones de una variable compleja, o sea series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

donde f_n es una función a valores complejos de una variable compleja en algún subconjunto de $\mathbb{C}$. Será crucial la noción de convergencia uniforme:

Una sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ de funciones f_n a valores complejos definidas en un conjunto $G \subset \mathbb{C}$ **converge uniformemente** a la función f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$,

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in G$.

Concordantemente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ donde f_n son funciones definidas en $G \subset \mathbb{C}$ con valores complejos **converge uniformemente** si la sucesión $\{F_N(z) := \sum_{n=0}^{N} f_n(z) : N \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente sobre G.

El siguiente criterio (M-test) es utilísimo para establecer convergencia uniforme

Proposición 3.3 *(M-test) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ una serie convergente de números reales no negativos (o sea: $t_n \geq 0$). Si para todo $z \in G$ se tiene $|f_n(z)| \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con n mayor a algún número natural, entonces la serie $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge absoluta y uniformemente en G.*

<u>Demostración</u>: Para algún $n_o \in \mathbb{N}$, se tiene $|f_n(z)| \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$. Ya que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ es convergente, para dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_1}^{\infty} t_n < \epsilon$, por el criterio de Cauchy. Luego, para $k \geq \text{máx}\{n_o, n_1\}$ se tiene $\sum_{n=k}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=k}^{\infty} t_n < \epsilon$, y la convergencia uniforme y absoluta de la serie es consecuencia del criterio de Cauchy. $\square$

Entre las series mas útiles está la serie geométrica cuyos términos se obtienen multiplicando sucesivamente un número complejo por sí mismo, i.e., $z_n = z^n$. La serie geométrica de razón z es entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad ^2 . \tag{3.1}$$

Observemos que se tiene la identidad

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^N) = (1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 - z^{N+1}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 1$, obtenemos la N-ésima suma parcial de la serie geométrica como

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} . \tag{3.2}$$

Si $|z| < 1$, entonces $\text{lím}_{N\to\infty} z^N = \text{lím}_{N\to\infty} |z|^N \exp(iN\text{Arg}(z)) = 0$, y de (3.2) deducimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad |z| < 1 .$$

Ya que reemplazando z por $|z|$ en (3.2) la identidad se mantiene, la convergencia es absoluta para $|z| < 1$.

Proposición 3.4 *La serie geométrica (3.1) es:*

1. *absolutamente convergente a $(1-z)^{-1}$ en el disco abierto de radio 1 alrededor de 0;*

2. *divergente fuera del disco cerrado de radio 1 alrededor de 0;*

[2] Aquí se usa la convención $z^0 = 1$.

3. *absoluta y uniformemente convergente a* $(1-z)^{-1}$ *en todo disco cerrado alrededor de* 0 *de radio inferior a* 1.

Demostración: Ya hemos verificado la afirmación 1.

Considere el disco cerrado alrededor de 0 de radio $r < 1$. Entonces para z en este disco

$$|\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{N} z^n| = |\frac{z^{N+1}}{1-z}| = \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-|z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} ,$$

donde hemos usado la desigualdad $|1-z| \geq 1-|z|$. Dado $\epsilon > 0$, basta elegir N lo suficientemente grande como para que $r^{N+1}/(1-r) < \epsilon$ – lo que se puede hacer ya que $r < 1$ – para que el miembro izquierdo sea menor que ϵ para todo z en el disco. El mismo argumento se puede repetir para demostrar que la convergencia es absoluta. Esto completa la demostración de la afirmación 3.

Si $|z| > 1$, entonces $\lim_{N\to\infty} z^N$ no existe – el módulo de z^N aumenta sin límite – y la fórmula (3.2) indica que la serie es divergente, demostrando la afirmación 3. $\square$

.

El resultado anterior pide a gritos la respuesta a la pregunta: ¿Qué pasa con la convergencia sobre el círculo de radio 1? Es bastante inmediato verificar que la serie geométrica diverge para todo z con $|z| = 1$.

El siguiente resultado se conoce por el nombre de **criterio del cociente**.

Proposición 3.5 (Criterio del Cociente) *Suponga que* $C = \lim_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n|$ *existe y es finito o bien* ∞*; entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente cuando* $C < 1$ *y diverge cuando* $C > 1$.

Demostración: Si $C < 1$ existe A con $C < A < 1$ y, por la existencia del límite, hay un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n+1}/z_n| < A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_o$. Entonces, para tales n,

$$|z_n| = \left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right| \left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{z_{n_o+1}}{z_{n_o}}\right| |z_{n_o}| \leq |z_{n_o}| A^{n-n_o} , \tag{3.3}$$

ya que cada cociente es de módulo menor que A y hay $n - n_o$ de ellos. La convergencia absoluta se desprende del M-test ya que $\sum_{n=n_o}^{\infty} A^{n-n_o}$ es una serie geométrica convergente pues $A < 1$.

Si $C > 1$, existe B con $1 < B < C$, y $n_o \in \mathbb{N}$ con $|z_{n+1}/z_n| > B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$. La misma factorización que en (3.3) muestra que $|z_n| \geq |z_{n_o}| B^{n-n_o}$ para estos n. Pero entonces $\lim_{n\to\infty} z_n$ no existe (en particular no es nulo) ya que $\lim_{n\to\infty} B^{n-n_o} = \infty$ al ser $B > 1$. La serie es por ende divergente. $\square$

3.2 Series de potencias

Una serie de potencias es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \; ; \tag{3.4}$$

donde los **coeficientes** a_n son números complejos, z es una variable compleja, y $z_o \in \mathbb{C}$ es el **centro** de la serie. La pregunta respecto a la convergencia de estas series tiene la siguiente respuesta:

Teorema 3.1 *Dada la serie de potencias (3.4), sea*

$$\boxed{R := \left(\text{lím}_{n\to\infty}\left(\sup_{\{k\in\mathbb{N}:k\geq n\}} \sqrt[k]{|a_k|}\right)\right)^{-1}}$$

que es un número no negativo o bien $+\infty$. Entonces,

1. *la serie converge absolutamente en $D(z_o; R)$;*
2. *la serie converge absoluta y uniformemente en todo $\overline{D(z_o;\rho)}$ con $\rho < R$;*
3. *la serie diverge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_o; R)}$.*

Antes de pasar a la demostración de este resultado conviene hacer algunas observaciones:

- R se denomina el **radio de convergencia** de la serie y el disco abierto alrededor de z_o de radio R, $D(z_o; R)$, se llama **el disco de convergencia** de la serie. Nótese que este disco es vacío si $R = 0$ y todo $\mathbb{C}$ si $R = \infty$.
- Se entiende por $\sqrt[n]{|a_n|}$ la raíz n-ésima positiva del módulo $|a_n|$ del n-ésimo coeficiente de la serie.
- El límite en la definición de R se llama el **límite superior**. Está definido para cualquier sucesión de números reales. En nuestro caso, la sucesión es $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \in \mathbb{N}\}$ y estos números son positivos. Para $n \in \mathbb{N}$ considere

$$c_n := \sup_{\{k\in\mathbb{N}:\, k\geq n\}} \sqrt[k]{|a_k|} = \sup\{\sqrt[n]{|a_n|},\ \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|},\ \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, \cdots\} \, .$$

Tenemos $R = 1/c$ donde $c := \text{lím}_{n\to\infty} c_n$. Distingamos dos casos:

1) Si la sucesión $\{\sqrt[n]{|a_n|} : \; n \in \mathbb{N}\}$ es acotada, o sea existe un número $K > 0$ con $\sqrt[n]{|a_n|} \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces c_n es la menor de las cotas superiores de

los números $\sqrt[k]{|a_k|}$ para $k \geq n$, y por ende c_n es no negativo y menor o igual que K. Tenemos $c_n \geq c_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que el conjunto de números sobre los cuales se toma el supremo para n contiene a aquellos sobre los cuales se toma el supremo para $n+1$. La sucesión $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ es en este caso no creciente y acotada por debajo por 0 ya que los c_n son no negativos. Esto garantiza que $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ existe, es finito, mayor o igual a 0 y $c \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $c = 0$, $R = \infty$.

2) En caso contrario, o sea cuando la sucesión $\{ \sqrt[n]{|a_n|} : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotada, se tiene $c_n = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ende $c = +\infty$ y $R = 0$.

- El lector podrá ejercitarse demostrando que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, entonces es igual a c.

- Supongamos que c es finito (Caso 1)). Tenemos las siguientes propiedades características que se usarán en la demostración del Teorema:

  – Si $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $c_n < c + \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$. Luego, ya que $\sqrt[k]{|a_k|} \leq c_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n$, tenemos $\sqrt[k]{|a_k|} < c + \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n_o$.

  – Si $c > 0$ y d es real con $0 < d < c$ entonces se tiene $\sqrt[n]{|a_n|} > d$ para un conjunto infinito de números naturales n. En efecto, si esto no es el caso, $\sqrt[n]{|a_n|} > d$ para un número finito de n y $\sqrt[n]{|a_n|} \leq d$ para un número infinito de n. Pero entonces podemos elegir N lo suficientemente grande para que $c_N \leq d$ con lo que $c \leq d$ contradiciendo la hipótesis $d < c$.

<u>Demostración del Teorema</u>: Haremos referencia a las observaciones previas. Demostramos primeramente las afirmaciones sobre convergencia:

a) Si $c = +\infty$ y $R = 0$, las afirmaciones 1. y 2. del Teorema son banales ya que para $z = z_o$ la serie converge a 0.

Sea $c \geq 0$ y $R > 0$ o bien $R = +\infty$. Dado $\rho < R$, elegimos un número real ℓ tal que $c < \ell < 1/\rho$. Existe entonces, por la última observación previa a esta prueba, un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell$ para todo $n \geq n_o$. Entonces,

$$|a_n(z - z_o)^n| = |a_n|\,|z - z_o|^n = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n\ |z - z_o|^n < (\ell\rho)^n$$

para todo z en el disco cerrado de radio ρ alrededor de z_o. Ya que $\ell\rho < 1$ la serie geométrica $\sum_{j=0}^{\infty}(\ell\rho)^j$ es convergente y aplicando el $M - test$, la serie de potencias (3.4) es absoluta- y uniformemente convergente. Esto demuestra la afirmación 2.

b) Siempre con la suposición $c \geq 0$ y $R > 0$ o bien $R = +\infty$, si $|z - z_o| < R$ existe ρ con $|z - z_o| < \rho < R$. La afirmación 1. se desprende entonces de la afirmación 2.

Veamos ahora la afirmación 3. Si $c = 0$ y $R = +\infty$ no hay nada que demostrar. Suponemos entonces que $c > 0$, o sea que R es finito. Para $z \in \mathbb{C}$ con $|z - z_o| > R$, elegimos p real con $|z - z_o|^{-1} < p < c$. Por la última observación previa a la prueba, hay un número infinito de a_n con $\sqrt[n]{|a_n|} > p$. Para estos últimos, se tiene

$$|a_n(z - z_o)^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n |z - z_o|^n > (p|z - z_o|)^n ,$$

con lo que $\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_o)^n$ no existe – ya que $\lim_{n\to\infty}(p|z-z_o|)^n = \infty$ pues $p|z-z_o| > 1$ – y la serie es divergente. $\Box$

El cálculo del radio de convergencia a partir de la definición suele ser complicado. El siguiente resultado derivado del criterio del cociente es útil en la práctica:

Proposición 3.6 *Dada una serie de potencias (3.4), si* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *existe y es finito o bien* ∞*, entonces es igual al radio de convergencia de la serie.*

<u>Demostración</u>: Sea $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Aplicamos el criterio del cociente a la serie. Tenemos $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}(z-z_o)^{n+1}/(a_n(z-z_o)^n)| = |z-z_o|/\rho$, entendiendo que $|z-z_o|/0 = \infty$. Si $|z - z_o| < \rho$ el límite es menor que 1 y la serie es convergente. Si $|z - z_o| > \rho$ el límite es mayor que 1 y la serie divergente. Por el Teorema anterior, ρ es el radio de convergencia. $\Box$

3.3 Analiticidad de la suma de una serie de potencias

Teorema 3.2 *Si* $f(z)$ *es la suma de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ *dentro de su disco de convergencia* $D(z_o, R)$ $(R > 0)$*, entonces* f *y todas sus derivadas* $f^{(n)}$*,* $n \geq 1$*, son analíticas en* $D(z_o, R)$*. Se tiene*

$$a_n = f^{(n)}(z_o)/n! \; , \quad n \in \mathbb{N} \; ,$$

y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_o)}{n!}(z - z_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!\; a_{n+k}}{n!}(z - z_o)^n \; , \quad z \in D(z_o, R) \; , \quad k \in \mathbb{N} \; .$$

Para demostrar el Teorema usaremos el siguiente resultado que ilustra bien cómo a veces el Teorema fundamental de las series de potencias resulta útil en el cálculo de límites numéricos.

Lema 3.1 *Si $c_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{n\pm k}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea k un entero distinto de 0 y defina $c_m = 0$ si $m \leq -1$. Considere las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} z^n \ .$$

La primera tiene a

$$R_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}}$$

y la segunda a

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{n+k}}}$$

como radios de convergencia. Sean $f_N(z)$ y $g_N(z)$ las respectivas N-ésimas sumas parciales de estas series y f y g las sumas en sus respectivos discos de convergencia. Tenemos las identidades

$$z^k g_N(z) = f_{N+k}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j \ , \ k \geq 1 \ ; \tag{3.5}$$

$$g_N(z) = z^{|k|} f_{N-|k|}(z) \ , \quad k \leq -1 \ . \tag{3.6}$$

Sea $k \geq 1$. Si $|z| \leq R_1$ entonces $f_N(z) \to f(z)$ y la identidad (3.5) implica que $z^k g_N(z)$ converge (a $f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$) y por ende $g_N(z)$ converge con lo cual $|z| \leq R_2$. Si $|z| \leq R_2$ entonces $g_N(z) \to g(z)$ y la identidad (3.5) implica que $f_N(z)$ converge (a $z^k g(z) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$); por lo tanto $|z| \leq R_1$. Esto prueba que $D(0, R_1) = D(0, R_2)$ o sea $R_1 = R_2$.

Para $k \leq -1$ se usa la identidad (3.6) del mismo modo. □

Demostración del Teorema: Las N-ésima suma $f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_o)^n$ es entera y su derivada es $f'_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} (z - z_o)^n$.

Primera parte: Queremos probar que la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_o)^n \tag{3.7}$$

tiene el mismo radio de convergencia. Veamos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$. Sea $x_n=(n+1)^{1/n}-1$ que es mayor que 0 para $n\geq 1$. Se tiene $n+1=(1+x_n)^n\geq\begin{pmatrix} n \\ 2\end{pmatrix}x_n^2=(n(n-1)/2)x_n^2$ por el Teorema Binomial. Luego $x_n\leq\sqrt{2(n+1)/(n(n-1))}$ de donde $x_n\to 0$. Ya que $\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}=\sqrt[n]{n+1}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}$, basta con verificar que $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ lo que se sigue del Lema.

Segunda parte: Sea $g(z)$ la suma de la serie de potencias (3.7) en $D(z_o,R)$. Probamos que $g=f'$. Sea $\epsilon>0$, $z\in D(z_o,R)$, $0<r<R-|z-z_o|$ y $z\neq w\in D(z,r)$. Se tiene

$$|w-z_o|\leq|w-z|+|z-z_o|\leq r+|z-z_o|<R\,.$$

Para $N\in\mathbb{N}$

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z}-g(z)=\left(\frac{f_N(w)-f_N(z)}{w-z}-f'_N(z)\right)+(f'_N(z)-g(z))+\frac{\zeta_N(w)-\zeta_N(z)}{w-z}\,,$$

donde

$$\zeta_N(\omega)=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n(\omega-z_o)^n\,,\ \ \omega\in D(z_o,R)\,.$$

Existe N_1 tal que $|f'_N(z)-g(z)|\leq\epsilon/3$ si $N\geq N_1$. Tenemos

$$\frac{\zeta_N(w)-\zeta_N(z)}{w-z}=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\frac{(w-z_o)^n-(z-z_o)^n}{(w-z_o)-(z-z_o)}\,.$$

Usando la fórmula $\frac{a^n-b^n}{a-b}=\sum_{j=0}^{n-1}a^jb^{n-1-j}$ válida para todo par de complejos a,b distintos, obtenemos

$$\left|\frac{(w-z_o)^n-(z-z_o)^n}{(w-z_o)-(z-z_o)}\right|=\left|\sum_{j=0}^{n-1}(w-z_o)^j(z-z_o)^{n-1-j}\right|\leq\sum_{j=0}^{n-1}|w-z_o|^j|z-z_o|^{n-1-j}$$

$$\leq\sum_{j=0}^{n-1}(r+|z-z_o|)^j|z-z_o|^{n-1-j}\leq\sum_{j=0}^{n-1}(r+|z-z_o|)^j(r+|z-z_o|)^{n-1-j}=n(r+|z-z_o|)^{n-1}\,.$$

Luego,

$$\left|\frac{\zeta_N(w)-\zeta_N(z)}{w-z}\right|\leq\sum_{n=N+1}n|a_n|(r+|z-z_o|)^{n-1}=\sum_{n=N}(n+1)|a_{n+1}|(r+|z-z_o|)^n\,.$$

De la convergencia absoluta de la serie (3.7) en $D(z_o,R)$ y del hecho que $r+|z-z_o|<R$, deducimos que existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{\zeta_{N_2}(w)-\zeta_{N_2}(z)}{w-z}\right|\leq\epsilon/3$$

para todo $N \geq N_2$.
Sea $N_3 = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Como $f'_{N_3}(z)$ es la derivada de f_{N_3} en z, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{f_{N_3}(w) - f_{N_3}(z)}{w - z} - f'_{N_3}(z) \right| \leq \epsilon/3$$

para todo $w \in D(z, \delta_1)$. Si tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, r\}$ obtenemos

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| \leq \left| \frac{f_{N_3}(w) - f_{N_3}(z)}{w - z} - f'_{N_3}(z) \right|$$

$$+ \left| f'_{N_3}(z) - g(z) \right| + \left| \frac{\zeta_{N_3}(w) - \zeta_{N_3}(z)}{w - z} \right| \leq \epsilon\ ,$$

para todo $w \in D(z, \delta)$ con $w \neq 0$. Esto prueba que $g = f'$.
Observe que $f(z_o) = a_o$ y $g(z_o) = f'(z_o) = a_1$.

Tercera parte: Aplicamos ahora el mismo procedimiento a la serie que define a $g = f'$ para obtener

$$f''(z) = g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (z - z_o)^n$$

y $f''(z_o) = 2a_2$. Repitiendo esto k veces obtenemos la demostración. $\square$

Capítulo 4

La función exponencial y sus amigas

4.1 La exponencial; funciones "trigonométricas" e "hiperbólicas" complejas

Teorema 4.1 *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ . \tag{4.1}$$

tiene radio de convergencia ∞ *y define una función entera* exp *llamada exponencial que es su propia derivada y satisface*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \ , \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ . \tag{4.2}$$

Además,

1. $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

2. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$ $\exp(z) \neq 0$. $\exp(0) = 1$

3. *La restricción de* exp *a* $\mathbb{R}$ *es una función positiva y estrictamente creciente con* $\lim_{x\to\infty} \exp(x)/x^n = \infty$ *y* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \mid x \mid^n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

4. *Existe un número real* $\pi \in (2,4)$ *tal que* $\exp(i\pi/2) = i$ *y tal que* $\exp(z) = 1$ *si y sólo si* $z = i2n\pi$ *para algún* $n \in \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$.

5. exp *es periódica con período* $i2\pi$.

6. $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ *es suryectiva al círculo unitario de centro* 0 *y* $\cos(t) = Re(\exp(it))$, $\sin(t) = Im(\exp(it))$.

7. exp *es suryectiva a* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración: Para el módulo del cociente entre el n-ésimo y el $(n+1)$-ésimo coeficiente tenemos,

$$\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = n+1$$

y esto tiende a ∞ para $n \to \infty$. Luego la serie es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ (por el criterio del cociente (3.6)) y por ende uniformemente convergente en todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Tenemos entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{z^\ell w^{n-\ell}}{\ell!(n-\ell)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell} z^\ell w^{n-\ell} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} \; .$$

Esto demuestra (4.2). Derivando la serie término a término y usando la convergencia uniforme,

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z) \; .$$

1. Se desprende de (4.1).

2. De (4.1), $\exp(0) = 1$. Luego $1 = \exp(0) = \exp(z)\exp(-z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ lo que demuestra que $\exp(z) \neq 0$.

3. Si $0 < x \in \mathbb{R}$, entonces (4.1) muestra que $\exp(x) > 1 + x > 1$. Si $x < 0$ entonces $\exp(x) = 1/\exp(-x) \in (0,1)$. Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > y$ entonces por (4.2) y lo visto.

   $$\exp(x) - \exp(y) = \underbrace{\exp(y)}_{>0}(\underbrace{\exp(x-y)}_{>1} - 1) > 0 \; .$$

   Si $x > 0$ tenemos de (4.1) que $\exp(x) > x^{n+1}/(n+1)!$ con lo cual $\exp(x)/x^n > x/(n+1)!$ y por ende $\lim_{x\to\infty}\exp(x)/x^n = \infty$. Pero entonces $\lim_{x\to-\infty} \mid x \mid^n \exp(x) = \lim_{x\to\infty} \mid x \mid^n / \exp(x) = 0$.

4. Para $t \in \mathbb{R}$ tenemos, por lo ya visto, que $1 = \exp(it)\exp(-it) =\mid \exp(it) \mid^2$. Sea $f(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ y $g(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$; entonces $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$. De (4.1) obtenemos

   $$f(t) = 1 - (t^2/2!) + (t^4/4!) - (t^6/6!) + \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}/(2n)! \; ;$$

   $$g(t) = t - (t^3/3!) + (t^5/5!) - (t^7/7!) + \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)! \; .$$

   De $\exp(it) = f(t) + ig(t)$ o de las series obtenemos que $f'(t) = -g(t)$ y $g'(t) = f(t)$.

Observando que para $t = 1$ la serie para f es alternante y los términos son de módulo decreciente, tenemos por el Criterio de Leibniz

$$f(1) \geq 1 - (1/2!) = 1/2 \ .$$

Observando que

$$2^{2n}/(2n)! > 2^{2(n+1)}/(2(n+1))! \ , \quad \text{para } n \geq 1 \ ,$$

y que la serie es alternante,

$$f(2) < 1 - (2^2/2!) + (2^4/4!) = -1/3 \ .$$

Por el Teorema del Valor Intermedio para la función continua f, hay $\xi \in (1,2)$ minimal con $f(\xi) = 0$. Sea $\pi = 2\xi$.

Con el mismo argumento,

$$g(1) \geq 1 - (1/3!) = 5/6 \ ,$$

y como $g'(t) = f(t) > 0$ en el intervalo $(0,\xi)$, tenemos $g(\xi) > 0$ y de $g(\xi)^2 = 1 - f(\xi)^2 = 1$ deducimos que $g(\xi) = g(\pi/2) = 1$. Luego, $\exp(i\pi/2) = i$. De aquí obtenemos sucesivamente con (4.2) $\exp(i\pi) = -1$, $\exp(i2\pi) = 1$. Por lo tanto, $\exp(i2n\pi) = 1$ para todo entero n. Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z + i2n\pi) = \exp(z)\exp(i2n\pi) = \exp(z)$ lo que demuestra 5.

Si $z = x + iy$ y $1 = \exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$, entonces $\exp(x) = \mid \exp(z) \mid = 1$ y por lo visto en 3., $x = 0$. Para demostrar que $y/(2\pi)$ es un entero, basta ver usando 5. que si $0 < y < 2\pi$ entonces $\exp(iy) \neq 1$. Tenemos que $\exp(iy/4) = f(y/4) + ig(y/4)$ y como $0 < y/4 < \pi/2$ sabemos que $f(y/4) > 0$ y $g(y/4) > 0$. Luego,

$$\exp(iy) = (f(y/4) + ig(y/4))^4$$

$$= f(y/4)^4 - 6f(y/4)^2 g(y/4)^2 + g(y/4)^4 + i4f(y/4)g(y/4)(f(y/4)^2 - g(y/4)^2)$$

y esto es real si y sólo si $f(y/4)^2 = g(y/4)^2$ lo que sucede solamente cuando $f(y/4)^2 = g(y/4)^2 = 1/2$. Y en este caso tenemos $\exp(iy) = -1$.

5. Ya se vió.

6. Ya demostramos en 4. que $t \mapsto \exp(it)$ aplica $\mathbb{R}$ en el círculo de radio 1 y centro 0 del plano complejo. Además $\exp(it) = f(t) + ig(t)$ implica que $f = \cos$ y $g = \sin$

donde definimos las funciones trigonométricas con el usual método de la geometría analítica. Sea w un punto del círculo en cuestión y sea $w = x + iy$ con lo cual $| x |, | y | \leq 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$ entonces por la definición de π, sabemos que cos es decreciente en el intervalo $[0, \pi/2]$ con $\cos(0) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$ mientras que sin es creciente en dicho intervalo con $\sin(0) = 0$ y $\sin(\pi/2) = 1$. Luego hay un único $t \in [0, \pi/2]$ tal que $\cos(t) = x$ y $\sin(t) = y$; y por ende $\exp(it) = w$.

Si $x < 0$ y $y \geq 0$ entonces las condiciones del párrafo anterior se cumplen para $-iw$ con lo cual hay $t \in [0, \pi/2]$ tal que $\exp(it) = -iw = -\exp(i\pi/2)w = \exp(i\pi)\exp(i\pi/2)w$; luego $\exp(i(t - 3\pi/2)) = w$.

Si $y < 0$ los dos párrafos anteriores muestran que hay t con $\exp(t) = -w$ y por lo tanto $\exp(i(t - \pi)) = w$.

7. Si $w \in \mathbb{C}$ no es cero, entonces $w =| w | (w/ | w |)$. Por 3. hay $x \in \mathbb{R}$ con $\exp(x) =| w |$ y por 6. hay $t \in \mathbb{R}$ con $\exp(it) = w/ | w |$. Luego, $\exp(x + it) = w$. $\square$

En analogía con las funciones trigonométricas se definen

$$\cos(z) = (\exp(iz) + \exp(-iz))/2 \ , \quad \sin(z) = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i) \ , \quad z \in \mathbb{C} \ .$$

Estas funciones son enteras, el coseno es "par" $\cos(-z) = \cos(z)$, el seno es "impar" $\sin(-z) = -\sin(z)$, y

$$\cos'(z) = -\sin(z) \ , \quad \sin'(z) = \cos(z) \ .$$

Se cumplen además todas las relaciones conocidas para las funciones trigonométricas:

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1 \ ;$$

También se definen las análogas de las funciones hiperbólicas

$$\cosh(z) = (\exp(z) + \exp(-z))/2 \ ; \quad \sinh(z) = (\exp(z) - \exp(-z))/2 \ .$$

Obviamente

$$\cosh(iz) = \cos(z) \ ; \quad \sinh(iz) = i\sin(z) \ .$$

4.2 La inversa de la exponencial: el logaritmo

Observamos que $\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z))\exp(i\mathrm{Im}(z))$ no es nulo para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado un complejo no-nulo w tenemos $w = |w|\exp(i\alpha)$ para cualquier $\alpha \in \arg(w)$. Buscamos $z \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(z) = w$. Obtenemos

$$\exp(\mathrm{Re}(z))\exp(i\mathrm{Im}(z)) = |w|\exp(i\alpha) \ ,$$

de donde

$$\mathrm{Re}(z) = \ln(|w|) \ \ , \quad \mathrm{Im}(z) = \alpha + 2n\pi \ , \quad n \text{ un entero arbitrario} \ .$$

Proposición 4.1 *Para todo* $0 \neq w \in \mathbb{C}$ *existen infinitos complejos* z *tales que* $\exp(z) = w$*. Se tiene* $Re(z) = \ln(|w|)$ *y* $Im(z) \in \arg(w)$*.*

Podemos definir una función “logaritmo” si fijamos el argumento. Así, por ejemplo, $0 \neq z \mapsto \ln(|z|) + i\arg_\alpha(z)$, para cualquier real α es una función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; veremos enseguida que esta función es discontinua.

Llamamos **rama del logaritmo** a cualquier función continua f definida sobre un abierto conexo $G \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\exp(f(z)) = z \ . \tag{4.3}$$

El siguiente resultado parece indicar que todo sucede como en el análisis real: si una función es invertible y diferenciable su inversa es diferenciable. Pero más adelante, 9.5.3, demostraremos el teorema general de la función inversa para funciones analíticas que es mucho más poderoso.

Teorema 4.2 *Sean* G *y* F *abiertos en* $\mathbb{C}$*,* $f : F \to \mathbb{C}$ *y* $g : G \to \mathbb{C}$ *funciones continuas con* $f(F) \subset G$ *y* $(g \circ f)(z) = z$ *para todo* $z \in F$*. Entonces si* g *es diferenciable en* $f(z_o)$ *con* $g'(f(z_o)) \neq 0$*,* f *es diferenciable en* z_o *y* $f'(z_o) = 1/g'(f(z_o))$*.*

<u>Demostración</u>: Sea $0 \neq h \in \mathbb{C}$ tal que $z_o + h \in F$; tenemos $g(f(z_o)) = z_o$, y $g(f(z_o+h)) = z_o + h$ con lo cual $f(z_o) \neq f(z_o + h)$ y también

$$1 = \frac{g(f(z_o+h)) - g(f(z_o))}{h} = \frac{g(f(z_o+h)) - g(f(z_o))}{f(z_o+h) - f(z_o)} \, \frac{f(z_o+h) - f(z_o)}{h} \ .$$

Luego

$$\frac{f(z_o+h) - f(z_o)}{h} = \left(\frac{g(f(z_o+h)) - g(f(z_o))}{f(z_o+h) - f(z_o)}\right)^{-1} \ .$$

Pero, por continuidad de f, y diferenciabilidad de g en z_o tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(z_o+h)) - g(f(z_o))}{f(z_o+h) - f(z_o)} = g'(f(z_o)) \ . \ \square$$

Proposición 4.2 *Si f es una rama del logaritmo definida en el abierto G entonces f es analítica y $f'(z) = 1/z$.*

Demostración: Use el teorema con $g = \exp$ para obtener $f'(z) = 1/\exp(f(z)) = z^{-1}$. □

Dado un número real α arbitrario, sea $G_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \ \alpha \in \arg(z)\}$, o sea el plano complejo sin la semi-recta (cerrada e infinita) formada por los puntos que tienen a α como argumento, o sea el rayo que parte de 0 y forma el ángulo α con el semi-eje real positivo. G_α es abierto y la función

$$f(z) = \ln(|z|) + i \arg_{\alpha-2\pi}(z)$$

satisface

$$\exp(f(z)) = \exp(\ln(|z|)) \big(\cos(\arg_{\alpha-2\pi}(z)) + i \sin(\arg_{\alpha-2\pi}(z))\big) = z$$

y, ya que el argumento $\arg_\beta$ es continuo salvo en la semi-recta que forma ángulo β con el semi-eje positivo, es por ende una rama del logaritmo. Si $z \neq 0$ es tal que $\alpha \in \arg(z)$ entonces podemos acercarnos a z por uno y otro lado de la semi-recta que define a G_α. Si nos acercamos a z por medio de puntos de G_α con argumentos inferiores y cercanos a α; o sea $\{z_n : \ n = 1, 2, \cdots\}$ es una sucesión en G_α tal que $z_n = |z_n| \exp(i(\alpha - \epsilon_n))$ con $\epsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(|z_n|) + i(\alpha - \epsilon_n)) = \ln(|z|) + i\alpha \ ;$$

si, en cambio, nos acercamos a z por puntos de G_α con argumentos superiores y cercanos a α; o sea $\{z_n : \ n = 1, 2, \cdots\}$ con $z_n = |z_n| \exp(i(\alpha + \epsilon_n))$ con $\epsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(|z_n|) + i(\alpha + \epsilon_n - 2\pi)) = \ln(|z|) + i\alpha - i2\pi \ .$$

La rama no se puede extender a una función continua sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La **rama principal del logaritmo** es la función $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$ definida en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) \leq 0 \ , \ \mathrm{Im}(z) = 0\} = G_\pi$ que se obtiene de $\mathbb{C}$ quitando el semi-eje real no positivo.

4.3 Potencias arbitrarias

Dado un complejo w, definimos la w-ésima potencia de $0 \neq z \in \mathbb{C}$ como cualquier número complejo ζ tal que

$$\zeta = \exp(w\mu) \ , \quad \text{con } \mu \text{ tal que } \exp(\mu) = z \ .$$

Sabemos que μ no es único, sino que $\mu = \ln(|z|) + i\alpha$ donde $\alpha \in \arg(z)$ es arbitrario. Por lo tanto las w-ésimas potencias de $z \neq 0$ son

$$\zeta = \exp(w \ln(|z|) + iw\alpha) \ \ , \quad \alpha \in \arg(z) \ .$$

Observe que "z^0"$= 1$. En conformidad con una convención anterior, ponemos $0^w = 0$.

Ejercicio 18 *Verifique que esta definición es consistente con la definición anterior cuando w es un número racional.*

Si llamamos e al valor de la exponencial en 1, $e = \exp(1)$, entonces como e es positivo, y $\arg(e) = \{2n\pi : \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, se tiene

$$e^z = \exp(z \ln(e) + iz2n\pi) = \exp(z) \exp(iz2n\pi) \ .$$

Sin embargo es usual y cómodo convenir que uno usa el argumento principal de e al escribir

$$e^z = \exp(z) \ .$$

Capítulo 5

Transformaciones de Möbius

Estudiamos las transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{5.1}$$

donde a, b, c y d son constantes complejas arbitrarias, salvo que $(a, b) \neq (0, 0)$ y $(c, d) \neq (0, 0)$. Observamos primeramente que:

1. Si se reemplazan las constantes por un múltiplo fijo de ellas obtenemos la misma transformación.

2. Si $c = 0$ la transformación es lineal y está definida en todo $\mathbb{C}$.

3. Si $c \neq 0$ entonces T está definida en todo $\mathbb{C}$ salvo en el punto $-d/c$. Se tiene

$$\lim_{|z|\to\infty} T(z) = a/c \; .$$

4. En el dominio donde T está definida es analítica y $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$.

Cuando $ad = bc$, T es constante y suponemos de ahora en más que $ad \neq bc$[1]. En tal caso, T es analítica en todo el plano complejo salvo en el polo $-d/c$ cuando $c \neq 0$; y su derivada no se anula.

A los fines de un tratamiento mas fluído, conviene introducir un punto "ideal" anotado ∞ y convenir que

$$T(\infty) = \begin{cases} a/c & , \quad \text{si } c \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{si } c = 0 \end{cases} \quad , \quad T(-d/c) = \infty \text{ cuando } c \neq 0 \; .$$

En el fondo el escenario adecuado para la discusión de las transformaciones de Möbius es la esfera de Riemann. Pero no lo haremos aquí. Escribimos $\mathbb{C}_\infty$ para $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

[1]Esta condición implica que ni a ni d son nulos cuando $c = 0$

Con la transformación de Möbius (5.1) especificada por a, b, c, d conviene asociar a la matriz

$$\widehat{T} = \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix} .$$

Si las transformaciones de Möbius T y S tienen asociadas las matrices $\widehat{T}$ y $\widehat{S}$ entonces la aplicación compuesta $(T \circ S)(z) = T(S(z))$ también es una transformación de Möbius y la matriz asociada es el producto de las matrices de T y de S: $\widehat{T \circ S} = \widehat{T}\widehat{S}$

Ejercicio 19 *Verifique esto.*

En particular, ya que $det(\widehat{T}) = ad - bc \neq 0$, $\widehat{T}$ es invertible

$$\widehat{T^{-1}} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & , & -b \\ -c & , & a \end{pmatrix}$$

y tiene asociada la transformación de Möbius inversa a T: $(T \circ T^{-1})(z) = (T^{-1} \circ T)(z) = z$. $T^{-1}(z) = (dz - b)/(-cz + a)$. Observe que si $c \neq 0$, el polo de T^{-1} es a/c y $\lim_{|z|\to\infty} T^{-1}(z) = -d/c$ como debe ser.

Lema 5.1 *1. Una transformación de Möbius T distinta a la identidad ($T(z) \neq z$ para algún $z \in \mathbb{C}$) tiene a lo máximo dos puntos z_1, z_2 fijos distintos ($T(z_1) = z_1$ y $T(z_2) = z_2$) en $\mathbb{C}_\infty$.*

2. Una transformación de Möbius T distinta a la identidad está determinada por las imágenes de cualquier trío (z_1, z_2, z_3) de puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$.

<u>Demostración</u>: 1): Sea T dada por (5.1). Si $c = 0$ (recuerde que $ad \neq 0$), entonces ∞ es punto fijo y ya que $T(z) = (a/d)z + (b/d)$, el otro punto fijo es $b/(a - d)$ si $a \neq d$ y en caso contrario, no hay otro punto fijo pues T no es la identidad.

Cuando $c \neq 0$ el punto ∞ no es fijo y si $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo, $az + b = z(cz + d)$ o sea $cz^2 + (d - a)z - b = 0$; esta ecuación tiene a lo sumo dos soluciones distintas (solo una si $c = 0$).

2): Si T y S son transformaciones de Möbius tal que $T(z_j) = S(z_j)$ para $j = 1, 2, 3$ donde z_1, z_2 y z_3 son distintos en $\mathbb{C}_\infty$, entonces la transformacón de Möbius $T^{-1} \circ S$ satisface $z_j = T^{-1} \circ T(z_j) = T^{-1} \circ S(z_j)$ y tiene tres puntos fijos distintos. Luego $T^{-1} \circ S$ es la identidad y $S = T$. $\square$

Este simple resultado hace mucho a la utilidad de las transformaciones de Möbius para la construcción de transformaciones que transformen un dado conjunto en otro dado conjunto (ver ejercicios).

Si z_1, z_2, z_3 son puntos arbitrarios pero distintos en $\mathbb{C}$ la transformación

$$T_{z_1,z_2,z_3}(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\frac{z - z_1}{z - z_3} \ , \ \widehat{T}_{z_1,z_2,z_3} = \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & , & z_1(z_3 - z_2) \\ z_2 - z_1 & , & z_3(z_1 - z_2) \end{pmatrix} .$$

satisface $T_{z_1,z_2,z_3}(z_1) = 0$, $T_{z_1,z_2,z_3}(z_2) = 1$ y $T_{z_1,z_2,z_3}(z_3) = \infty$.

Si w_1, w_2, w_3 son puntos arbitrarios pero distintos en $\mathbb{C}$ la transformación T^{w_1,w_2,w_3} que satisface $T^{w_1,w_2,w_3}(0) = w_1$, $T^{w_1,w_2,w_3}(1) = w_2$ y $T^{w_1,w_2,w_3}(\infty) = w_3$ es

$$T^{w_1,w_2,w_3}(z) = \frac{w_3(w_1 - w_2)z + w_1(w_2 - w_3)}{(w_1 - w_2)z + w_2 - w_3} \ ,$$

$$\widehat{T}^{w_1,w_2,w_3} = \begin{pmatrix} w_3(w_1 - w_2) & , & w_1(w_2 - w_3) \\ w_1 - w_2 & , & w_2 - w_3 \end{pmatrix} .$$

Luego, la transformación $T^{w_1,w_2,w_3} \circ T_{z_1,z_2,z_3}$ transforma el trío (z_1, z_2, z_3) de complejos distintos en el trío (w_1, w_2, w_3) de complejos distintos.

Considere las siguientes transformaciones de Möbius especiales

$$C_b(z) = z + b \ (b \in \mathbb{C}) \ , \ \ R_\alpha(z) = e^{i\alpha}z \ (\alpha \in \mathbb{R}) \ , \ \ D_r(z) = rz \ (r > 0) \ , \ \ I(z) = 1/z \ ,$$

asociadas a las matrices

$$\widehat{C}_b = \begin{pmatrix} 1 & , & b \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \ , \ \widehat{R}_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \ , \ \widehat{D}_r = \begin{pmatrix} r & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \ , \ \widehat{I} = \begin{pmatrix} 0 & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{pmatrix} .$$

C_b es una translación. R_α es una rotación pura por α ya que $|R_\alpha(z)| = |z|$ y $\arg(R_\alpha(z)) = \arg(z) + \alpha$. S_r es una "dilatación" por r pues $|S_r(z)| = r|z|$ y $\arg(S_r(z)) = \arg(z)$. Por último I es la inversión. Combinando estas transformaciones simples, podemos obtener todas las transformaciones de Möbius. Para esto observamos primeramente que cualquier transformación del tipo

$$L_a(z) = az \ , \ \ 0 \neq a \in \mathbb{C}$$

es de la forma

$$L_a = D_{|a|} \circ R_\alpha \ , \quad \text{con } \alpha \in \arg(a) \ .$$

Entonces,

Ejercicio 20 *Demuestre*

Proposición 5.1 *Si T es la transformación de Möbius dada por (5.1) entonces*

$$T = \begin{cases} L_{a/d} \circ C_{b/a} & , \quad si\ c = 0 \\ C_{a/c} \circ L_{(bc-ad)c^{-2}} \circ I \circ C_{d/c} & , \quad si\ c \neq 0 \end{cases} .$$

Encaramos ahora la demostración del siguiente hecho que redondea el estudio de las propiedades de las transformaciones de Möbius y termina de confirmar que son decididamente hermosas:

Teorema 5.1 *Una transformación de Möbius transforma círculos y rectas en círculos o rectas.*

Demostración: Basta ver que las cuatro transformaciones especiales transforman círculos y rectas en círculos o rectas. Es geométricamente bastante evidente que las transformaciones especiales C_b, R_α, y D_r transforman círculos en círculos y rectas en rectas. Para verificarlo explícitamente, observe que todo círculo o recta en el plano está determinado por las raíces de una ecuación

$$t \mid z \mid^2 + wz + \overline{wz} + s = 0 \ , \tag{5.2}$$

donde $t, s \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{C}$ con $\mid w \mid^2 > ts$. En efecto, (5.2) es

$$t(x^2 + y^2) + 2\mathrm{Re}(w)x - 2\mathrm{Im}(w)y + s = 0 \ .$$

Si $t = 0$ obtenemos cualquier recta eligiendo convenientemente a w y a s (la condición restrictiva es $w \neq 0$). Si $t \neq 0$, obtenemos

$$\left(x + \frac{\mathrm{Re}(w)}{t}\right)^2 + \left(y - \frac{\mathrm{Im}(w)}{t}\right)^2 = \frac{\mid w \mid^2 - st}{t^2} \ ,$$

el círculo de centro $(-\mathrm{Re}(w)/t, \mathrm{Im}(w)/t)$ y radio $(\mid w \mid^2 - st)/t^2$. Veamos que se obtienen todos los círculos posibles. Si la ecuación del círculo es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ con $a, b, r \in \mathbb{R}$, tomese $w = t(-a + ib)$, y $s = t(a^2 + b^2 - r^2)$.
Suponga que se tiene (5.2) y se aplica:

- R_α; entonces

  $$t \mid R_\alpha(z) \mid^2 + R_{-\alpha}(w)R_\alpha(z) + \overline{R_{-\alpha}(w)R_\alpha(z)} + s = t \mid z \mid^2 + wz + \overline{wz} + s = 0 \ ;$$

  y $\mid R_{-\alpha}(w) \mid^2 - ts = \mid w \mid^2 - ts > 0$. O sea que R_α transforma rectas en rectas y círculos en círculos.

- D_r; entonces

  $$tr^{-2} \mid D_r(z) \mid^2 + D_{1/r}(w)D_r(z) + \overline{D_{1/r}(w)D_r(z)} + s = t \mid z \mid^2 + wz + \overline{wz} + s = 0 \ ;$$

  y $\mid D_{1/r}(w) \mid^2 - (tr^{-2}s) = r^{-2} \mid w \mid^2 - r^{-2}ts = r^{-2}(\mid w \mid^2 - ts) > 0$. O sea que D_r transforma rectas en rectas y círculos en círculos.

- I; entonces

$$t + \overline{w}I(z) + w\overline{I(z)} + s \mid I(z) \mid^2 = \mid z \mid^{-2} (t \mid z \mid^2 + wz + \overline{wz} + s) = 0 \ ;$$

y la condición es invariante. Por lo tanto I transforma círculos y rectas en círculos o rectas (se puede analizar exactamente lo que sucede; hágalo).

- C_b; entonces

$$t \mid C_b(z) \mid^2 + C_{-t\overline{b}}(w)C_b(z) + \overline{C_{-t\overline{b}}(w)C_b(z)} + s - wb - \overline{wb} + t \mid b \mid^2$$

$$= t \mid z + b \mid^2 + (w - t\overline{b})(z + b) + (\overline{w} - tb)(\overline{z} + \overline{b}) + s - wb - \overline{wb} + t \mid b \mid^2$$

$$= t \mid z \mid^2 + wz + \overline{wz} + s = 0 \ ;$$

y

$$\mid C_{-t\overline{b}}(w) \mid^2 - t(s - wb - \overline{wb} + t \mid b \mid^2)$$

$$= \mid w - t\overline{b} \mid^2 - ts + twb + t\overline{wb} - t^2 \mid b \mid^2 = \mid w \mid^2 - ts > 0 \ .$$

O sea que C_b transforma rectas en rectas y círculos en círculos. $\square$

Para terminar demostramos dos resultados muy útiles cuando se trata de analizar la imagen bajo una transformación de Möbius de regiones de $\mathbb{C}$.

Lema 5.2 *Si (z_1, z_2, z_3) es un trío de puntos distintos de $\mathbb{C}$ y M es una transformación de Möbius entonces*

$$T_{z_1,z_2,z_3}(z) = T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z)) \ , \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}_\infty \ .$$

Demostración: Sea $W = T_{z_1,z_2,z_3} \circ M^{-1}$. Se tiene $W(M(z_1)) = (T_{z_1,z_2,z_3} \circ M^{-1} \circ M)(z_1) = T_{z_1,z_2,z_3}(z_1) = 0$, y similarmente $W(M(z_2)) = 1$ y $W(M(z_3)) = \infty$. Por el punto 2. del Lema anterior $W = T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}$. Luego $T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z)) = W(M(z)) = T_{z_1,z_2,z_3}(z)$. $\square$

Lema 5.3 *Si (z_1, z_2, z_3) es un trío de puntos distintos de $\mathbb{C}$ entonces $T_{z_1,z_2,z_3}(z)$ es real para $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si los cuatro puntos z, z_1, z_2 y z_3 están sobre una recta o sobre un círculo.*

Demostración: La condición $T_{z_1,z_2,z_3}(z) = \overline{T_{z_1,z_2,z_3}(z)}$ es equivalente a

$$\alpha(|z|^2 - z_1\overline{z} - \overline{z_3}z + z_1\overline{z_3}) = \overline{\alpha}(|z|^2 - \overline{z_1}z - z_3\overline{z} + \overline{z_1}z_3)$$

donde $\alpha = (z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) \neq 0$. Tenemos entonces

$$\mathrm{Im}(\alpha)|z|^2 + \mathrm{Im}((\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})z) + \mathrm{Im}(\alpha z_1\overline{z_3}) = 0 \ , \tag{5.3}$$

como ecuación determinante para los puntos z tales que $T_{z_1,z_2,z_3}(z) = \overline{T_{z_1,z_2,z_3}(z)}$.

Si $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$, entonces (5.3) se reduce a

$$\mathrm{Im}((\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})z) + \mathrm{Im}(\alpha z_1\overline{z_3}) = \mathrm{Im}(\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(\alpha z_1\overline{z_3}) = 0$$

y determina una recta.

En caso contrario, definimos

$$\zeta = \frac{i}{2\mathrm{Im}(\alpha)}(\overline{\alpha}z_3 - \alpha z_1) \ , \qquad R = \frac{|\alpha|}{4|\mathrm{Im}(\alpha)|}|z_1 - z_3| \ ,$$

y después de un espeluznante cálculo algebraico tenemos

$$\mathrm{Im}(\alpha)|z|^2 + \mathrm{Im}((\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})z) + \mathrm{Im}(\alpha z_1\overline{z_3}) = \mathrm{Im}(\alpha)\left(|z - \zeta|^2 - R^2\right)$$

con lo que (5.3) es equivalente a

$$|z - \zeta|^2 = R^2$$

la ecuación de un círculo de radio R alrededor de ζ. $\square$

Los dos Lemas proveen una demostración del Teorema que es simple y elegante. Sea M una transformación de Möbius y Γ un círculo o una recta. Considere tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 de Γ y sean $w_j = M(z_j)$ sus imágenes en $\mathbb{C}_\infty$ que son distintas en virtud de la existencia de la inversa de M. Si alguna de las imágenes es ∞ entonces, w_1, w_2, w_3 determinan aquella recta generada por las dos imágenes finitas. Si los tres puntos imagen son finitos, determinan o bien una recta o bien un círculo. Llamemos Λ a la recta o círculo determinados por w_1, w_2, w_3. Por el primer Lema, $T_{z_1,z_2,z_3}(z) = T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z))$. Si $z \in \Gamma$ entonces $T_{z_1,z_2,z_3}(z)$ es real por el segundo Lema. Luego $T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z))$ es real y, nuevamente con el segundo Lema, $(M(z), M(z_1), M(z_2), M(z_3))$ están sobre un círculo o sobre una recta; por lo tanto $M(z) \in \Lambda$ o sea $M(\Gamma) = \Lambda$.

Las transformaciones de Möbius tienen múltiples aplicaciones.

Ejercicio 21 *Determine una transformación que transforma el semiplano* $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ *en* $D(0, 1)$.

Capítulo 6

Integración de funciones complejas

6.1 Integración de funciones a valores complejos sobre los reales

Dada una función f de una variable real $t \in [a,b]$ con valores complejos $f(t)$ tal que $t \mapsto f(t)$ es continua, la integral de f sobre el intervalo $[a,b]$ es –ya que tanto $t \mapsto \mathrm{Re}(f(t))$ como $t \mapsto \mathrm{Im}(f(t))$ son continuas– el número complejo

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt\right) .$$

Valen las reglas usuales de la integración real, e.g. la integral de una suma es la suma de las integrales. Además,

Lema 6.1 *Si* $[a,b] \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ *es continua*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt .$$

<u>Demostración</u>: Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ no hay nada que demostrar. En caso contrario, sea $\alpha \in \arg\left(\int_a^b f(t)dt\right)$; se tiene

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = e^{-i\alpha}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\alpha} f(t)dt$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\alpha} f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} f(t)\right)dt \leq \int_a^b \left|e^{-i\alpha} f(t)\right|dt = \int_a^b |f(t)|dt .$$

La desigualdad es consecuencia del siguiente resultado elemental del cálculo real que recordamos. $\square$

Lema 6.2 *Si $[a,b] \ni t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}$ es continua y $g(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ entonces*

$$\int_a^b g(t)dt \geq 0$$

con igualdad si y sólo si $g(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Demostración: Recordando la definición de la integral (de Riemann) de una función continua, es evidente que si el integrando es no-negativo también lo será la integral que es límite de sumás de Riemann. También es evidente que la integral se anula cuando se anula g. Supongamos que existe $t_o \in [a,b]$ tal que $g(t_o) > 0$. Entonces, por la continuidad, dado $\epsilon > 0$ con $g(t_o) > \epsilon$, hay un sub-intervalo $[c,d]$ de $[a,b]$ tal que $g(t) \geq g(t_o) - \epsilon > 0$. Luego,

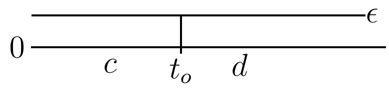


Figura 6.1:

$$\int_a^b g(t)dt \geq \int_c^d g(t)dt \geq (g(t_o) - \epsilon)(d-c) > 0 \,. \square$$

6.2 Caminos

Para poder integrar una función a valores complejos sobre los complejos debemos movernos sobre una "curva" (objeto uni-dimensional) en el "plano complejo". Un **camino suave** es una función $z : [a,b] \ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$ cuya derivada

$$z'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{z(t+s) - z(t)}{s} \quad , \quad t \in (a,b)$$

es continua y tal que los límites

$$\lim_{t \to a^+} z'(t) \quad , \quad \lim_{t \to b^-} z'(t)$$

existan y sean finitos. Observe que si $z(t)$ es constante el camino es un punto.

El camino suave $z(t) = (1+a-t)z_1 + (t-a)z_2 = z_1 + (t-a)(z_2 - z_1)$, $t \in [a, a+1]$ con $a \in \mathbb{R}$, describe el segmento de recta que parte del punto z_1 y une a este al punto z_2. Se tiene $z'(t) = z_2 - z_1$ que es constante y a fortiori continua y que satisface las condiciones impuestas en el borde del intervalo $[0, 1]$. Este camino suave se llamará **camino rectilíneo con punto inicial z_1 y punto final z_2**.

El camino suave $z(t) = a + re^{it}$ con $a \in \mathbb{C}$ fijo, $r > 0$ fijo y $t \in [\alpha_o, \alpha_o + \beta]$ ($\alpha_o, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$) describe el arco del círculo de radio r alrededor de a que parte desde $a + re^{i\alpha_o}$ y une a este punto con $a + re^{i(\alpha_o+\beta)}$. Se tiene $z'(t) = ire^{it}$ que satisface las condiciones impuestas. Nótese que nuestra convención $\beta > 0$ indica que siempre se da vueltas en el sentido anti-horario. Este camino se llamará **porción de camino circular (de radio r)**, y cuando se da la vuelta completa ($\beta = \alpha_o + 2\pi$) **camino circular (de radio r)**.

En ambos ejemplos es importante notar que el camino es más que la curva que se describe y esta distinción deberá tenerse muy en cuenta. El camino es la función que no sólo parametriza la curva que se obtiene como imagen del camino sino que indica en qué "dirección" y a qué "velocidad" se camina a lo largo de la curva.

También es importante observar que **la curva $[\gamma]$ "trazada" por un camino suave** $\gamma = \{[a, b] \ni t \mapsto z(t)\}$, o sea el conjunto $[\gamma] = \{z(t) : \ t \in [a, b]\}$, es cerrado y acotado. En efecto, por continuidad, $t \mapsto |z(t)|$ toma su valor máximo para algún $t_o \in [a, b]$ y $|z(t)| \leq |z(t_o)|$ para todo $t \in [a, b]$.

Considere el camino suave $z(t) = \phi(t)z_1 + (1-\phi(t))z_2$ con $\phi(t) = \cos(\pi t/2) - 0{,}1 \sin(4\pi t)$ para $t \in [0, 1]$. Ya que $\phi(0) = 1$, $\phi(1) = 0$ y $0 \leq \phi(t) \leq 1$, este camino describe el segmento de recta que une z_1 con z_2 pero no hay un movimiento siempre de z_1 a z_2 sino que va hacia z_2 y vuelve hacia z_1 etc. Llamamos **camino** a una sucesión de caminos suaves que se empalman. Concretamente, dados n intervalos $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ y n caminos suaves $\gamma_j = \{[a_j, b_j] \ni t \mapsto z_j(t)\}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, tales que $z_j(b_j) = z_{j+1}(a_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$. Escribimos entonces que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$. Y decimos que γ tiene a $z(a_1)$ como **punto inicial** y a $z_n(b_n)$ como **punto final**.

Como la curva trazada por un camino es la unión de las curvas trazadas por los caminos suaves que componen el camino, tenemos

Teorema 6.1 *Si γ es un camino entonces $[\gamma]$ es acotada y cerrada.*

Un camino γ se llama:

- **simple** si no pasa dos veces por el mismo punto: para todo $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ se tiene $z_j(t) = z_k(s)$ con $t \in [a_j, b_j]$ y $s \in [a_k, b_k]$ sólo si $j = k$ y $t = s$.

- **cerrado** si sus puntos incial y final coinciden, $z_1(a_1) = z_n(b_n)$;

- **cerrado simple** si es cerrado y simple cuando se desconsideran los puntos inicial y final (que coinciden)

Si $\gamma = \{[a,b] \ni t \mapsto z(t)\}$ es un camino suave, el **camino inverso** es $-\gamma$ es $\{[-b,-a] \ni t \mapsto z(-t)\}$, o sea el camino recorrido en sentido inverso. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ es un camino su inverso $-\gamma$ es el camino $(-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \cdots + (-\gamma_n)$.

Para los caminos cerrados simples vale el Teorema de Jordan: *La curva $[\gamma]$ trazada por un camino cerrado simple divide al plano complejo $\mathbb{C}$ en dos dominios de los cuales $[\gamma]$ es la frontera. Uno de ellos es acotado y el otro no.*

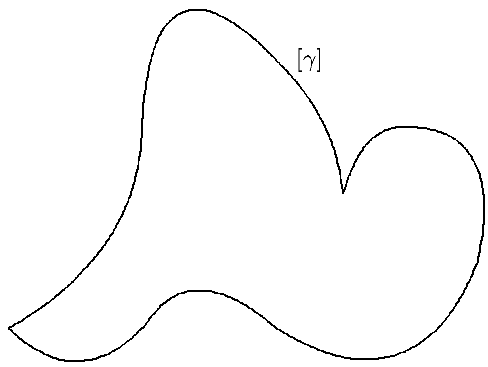


Figura 6.2: Teorema de Jordan.

Si bien el resultado es geométricamente evidente, su demostración no lo es. Aquí usaremos el Teorema de Jordan para fundamentar el siguiente lenguaje: Si γ es un camino cerrado simple, llamamos **dominio encerrado por** γ al dominio acotado. También convenimos en que la frase **"analítica dentro y sobre** γ**"** significará "analítica en un abierto que contiene al dominio encerrado por γ y a $[\gamma]$".

6.3 Integración compleja

Dado un camino suave $\gamma = \{[a,b] \ni t \mapsto z(t)\}$, y una función f a valores complejos definida y continua sobre $[\gamma]$, definimos la integral de f sobre este camino como

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \, .$$

Es importante notar que esta integral depende del camino suave elegido, y que la definición se ha reducido a la de una integral de una función continua $[a,b] \ni t \mapsto f(z(t))z'(t)$. Si el camino se reduce a un punto (i.e., $z(t)$ es constante) entonces la integral es 0.

Por el resultado anterior se tiene

Proposición 6.1 *Para un camino suave γ*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| \, |z'(t)| dt \, .$$

La integral a la derecha se abreviará como

$$\int_\gamma |f(z)|\,|dz|\;,$$

y nuevamente es importante destacar que depende del camino suave elegido.

Proposición 6.2 *Sean $\gamma_1 = \{[a,b] \ni t \mapsto z_1(t)\}$ y $\gamma_2 = \{[c,d] \ni t \mapsto z_2(t)\}$ dos caminos suaves. Si existe una función $\varphi : [a,b] \ni t \mapsto \varphi(t) \in [c,d]$ continuamente diferenciable y biyectiva tal que $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, y $z_1(t) = z_2(\varphi(t))$ para todo $t \in [a,b]$, entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

para cualquier función f continua sobre $[\gamma_1]$ ($[\gamma_2]$).

Demostración: Esto es consecuencia de la ley de substitución de integrales reales aplicada a la definición; con $s = \varphi(t)$,

$$\int_c^d f(z_2(s))z_2'(s)ds = \int_a^b f(z_2(\varphi(t)))z_2(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(z_1(t))z_1'(t)dt\;. \square$$

Si $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ es un camino formado por los caminos suaves $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

es la integral de una función a valores complejos definida sobre la curva $[\gamma]$ trazada por el camino γ y continua sobre esta curva. Del resultado anterior para caminos suaves se desprende con la desigualdad del triángulo el siguiente resultado fundamental

Teorema 6.2 *Para un camino γ*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\;.$$

Ejercicio 22 *Verifique que*

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz\;.$$

Ejercicio 23 *Demuestre que si γ es un camino, f y g son funciones complejas definidas y continuas sobre la curva trazada por γ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma (f(z) + \alpha g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \alpha \int_\gamma g(z)dz\;.$$

El **largo** $\ell(\gamma)$ del camino γ es

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |z_j'(t)|dt \ .$$

De los dos resultados anteriores obtenemos

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \max_{[\gamma]}\{|f(z)|\} \ \ell(\gamma) \ .$$

Aqui usamos la notación $\max_{[\gamma]}$ para el máximo sobre todos los puntos que pertenecen a la curva trazada por el camino γ.

6.4 Primitivas

Sea f una función definida sobre un abierto $A \subset \mathbb{C}$. Decimos que f **admite una primitiva** en A si existe una función F analítica en A tal que $F' = f$. Esta función F se llama **primitiva** de f en A. Lo que sigue es consecuencia inmediata de que una función analítica en un dominio cuya derivada se anula debe ser constante.

Proposición 6.3 *Si f admite dos primitivas F_1 y F_2 en un dominio A entonces $F_1 - F_2$ es constante.*

Teorema 6.3 *Si γ es un camino con punto inicial z_1 y punto final z_2 y f admite una primitiva F en un abierto que contiene a $[\gamma]$ entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) \ .$$

Demostración: Esto es simplemente el Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a la definición de la integral sobre un camino. Es inmediato ver que basta demostrar la afirmación para un camino suave. Sea entonces $\gamma = \{[a,b] \ni t \mapsto z(t)\}$ un camino suave; entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b F'(z(t))dt = F(z(b)) - F(z(a))$$

pues la derivada de la función $t \mapsto F(z(t))$ es $t \mapsto F'(z(t))z'(t)$ por la regla de la cadena.
$\square$

Teorema 6.4 *Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y tal que existen dominios $A_j \subset A$, $j = 1, 2, \cdots$ tales que $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$ y $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Si f es una función compleja continua sobre A entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$\int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$ para cualquier par de caminos γ y Γ tales que $[\gamma]$ y $[\Gamma]$ están en A y que sus puntos iniciales y finales coinciden;*

2. *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ tal que $[\gamma] \subset A$;*

3. *Existe una primitiva de f en A.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Si γ es cerrado , hay dos caminos γ_1 y γ_2 tales que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ y γ_1 y $-\gamma_2$ tienen los mismos puntos iniciales y finales. Luego

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{-\gamma_2} f(z)dz = 0 \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (1): $\gamma + (-\Gamma)$ es cerrado luego

$$0 = \int_\gamma f(z)dz + \int_{-\Gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz \ .$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Esto es consecuencia del Teorema anterior.

(1) $\Rightarrow$ (3): Si $z \in A$ existe un dominio no vacío A_j que contiene a z. Sea $z_o \in A_j$ con $z_o \neq z$ (recuerde que hay un entorno de z contenido en A_j; tome z_o en ese entorno) y defina $F(z_o) = 0$ y

$$F_j(z) = \int_\gamma f(z)dz$$

donde γ es algún camino con punto inicial z_o y punto final z (recuerde que A_j es conexo y existe una poligonal en A_j que une a z_o con z). El número $F_j(z)$ no depende del camino elegido. Dado $0 \neq h \in \mathbb{C}$ tal que $z + h \in A_j$, consideremos el camino rectilíneo γ_h que une z con $z + h$. Entonces $[\gamma_h] \subset A_j$ y

$$\frac{F_j(z+h) - F_j(z)}{h} = (1/h)\left(\int_{\gamma+\gamma_h} f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right) = (1/h)\int_{\gamma_h} f(z)dz$$

$$= (1/h)\int_0^1 f(z+th)h\,dt = \int_0^1 f(z+th)dt \ .$$

Ahora,

$$f(z) = f(z)\int_0^1 dt$$

con lo que

$$\frac{F_j(z+h)-F_j(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 (f(z+th)-f(z))dt \; ;$$

pero

$$\left|\int_0^1 (f(z+th)-f(z))dt\right| \le \int_0^1 |f(z+th)-f(z)|dt \; .$$

Por la continuidad de f, dado $\epsilon > 0$ existe un δ-entorno E de z tal que $|f(w)-f(z)| \le \epsilon$ para todo $w \in E$. Eligiendo h tal que $|h| < \delta$ deducimos de $|z+th-z| = t\,|h| \le |h|$ que $z+th \in E$ y por ende

$$\int_b^{b+1} |f(z+(t-b)h)-f(z)|dt \le \epsilon \; .$$

Luego, F_j es analítica en A_j y su derivada es f.

Ya que todo $z \in A$ está en algún A_j y estos dominios son disjuntos dos-a-dos:

$$F(z) = F_j(z) \;\;,\;\; z \in A_j$$

es analítica en A y su derivada es f. $\square$

La hipótesis sobre A es menos terrible de lo que parece: Es un resultado general que no demostraremos aquí que todo abierto A puede escribirse como unión denumerable de dominios disjuntos dos-a-dos. Tenga en cuenta que los A_j pueden ser vacíos (no todos claro).

Las función $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ para un entero $n \neq -1$ es entera para $n \ge 0$ y analítica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ para $n \le -2$; su derivada es $z \mapsto z^n$. Del resultado anterior obtenemos inmediatamente:

$$\int_\gamma z^n dz = 0 \; , \;\; n \ge 0 \; ,$$

para todo camino cerrado γ;

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = 0 \; , \;\; n \ge 2 \; ,$$

para todo camino cerrado γ tal que $0 \notin [\gamma]$.

La función $z \mapsto 1/z$ es especial; sabemos que es la derivada de cualquier rama del logaritmo. Si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto donde se puede definir una rama del logaritmo, entonces

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$$

para cualquier camino cerrado γ tal que $[\gamma] \subset G$.

Calculemos la integral de $1/z$ sobre el camino circular $C(0,r;\alpha,\alpha+2\pi)$:

$$\int_{C(0,r;\alpha,\alpha+2\pi)} \frac{1}{z}dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{1}{re^{it}}ire^{it}dt = i\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} dt = 2\pi i \ .$$

Esta simple fórmula será la base de muchos desarrollos posteriores del análisis complejo. Tenemos inmediatamente

Proposición 6.4 *Si una rama del logaritmo está definida en el abierto $G \subset \mathbb{C}$ entonces G no contiene ningún círculo centrado en 0.*

Teorema 6.5 *Sea γ un camino y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones f_n definidas y continuas sobre $[\gamma]$. Si la sucesión converge uniformemente a la función f, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\left(\int_\gamma f_n(z)dz\right) \ .$$

Demostración: f es continua sobre $[\gamma]$ como límite uniforme de funciones continuas. Tenemos

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz\right| = \left|\int_\gamma (f(z)dz - f_n(z))dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)dz - f_n(z)|dz \ .$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon/\ell(\gamma)$ para todo $z \in [\gamma]$ cuando $n \geq n_o$. Luego,

$$\int_\gamma |f(z)dz - f_n(z)|dz \leq \epsilon$$

y esto completa la demostración. $\square$

Corolario 6.1 *Sea $f(z)$ la suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ dentro del disco de convergencia $D(z_o,R)$ de esta serie. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado γ tal que $[\gamma] \subset D(z_o,R)$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

tiene el mismo radio de convergencia R y su suma F es una primitiva de f.

Demostración: Ya que $\int_\gamma z^n = 0$ para todo $n \geq 0$, la primera afirmación es consecuencia del Teorema anterior. Ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, y $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ por el Lema 3.1, la serie que define a F tiene el mismo radio de convergencia y su derivada se obtiene diferenciando término a término. $\square$

Los resultados obtenidos indican que: para una gran clase de funciones analíticas f se tiene $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para caminos cerrados y f admite una primitiva. El Teorema de Cauchy-Goursat permite generalizar esto a todas las funciones analíticas.

Capítulo 7

Teoremas de Cauchy-Goursat

Dado un camino cerrado simple γ y el dominio D encerrado por él, imaginemos que recorremos el camino. Al hacerlo, D quedará siempre a nuestra izquierda o siempre a nuestra derecha. En el primer caso el camino se dice **orientado positivamente**; en el segundo **orientado negativamente**.

Nuestra convención indica que un camino circular está orientado positivamente.

En este capítulo usaremos la notación

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

para la integral de f sobre el camino rectilineo que une a z_1 con z_2: $\{[0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)\}$. Con esta notación se tiene

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz \tag{7.1}$$

y si z_1, z_2 y z_3 son colineales

$$\int_{z_1}^{z_3} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \ + \int_{z_2}^{z_3} f(z)dz \ . \tag{7.2}$$

7.1 Teorema de Cauchy-Goursat (para un disco)

En lo que sigue demostraremos el Teorema de Cauchy-Goursat, no en su versión más general válida para dominios simplemente conexos sino aquella para discos.

Teorema 7.1 *(Teorema de Cauchy-Goursat (para un disco)) Si f es analítica en un disco abierto entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado tal que $[\gamma]$ pertenece al disco.

La demostración de este resultado que damos aquí se basa en el siguiente resultado clásico debido a Goursat:

Teorema 7.2 *Sea R un rectángulo cerrado en $\mathbb{C}$ y sea ∂R el camino formado por los cuatro caminos rectilíneos sucesivos que unen los vértices de R. Si f es analítica en un abierto que contiene a R entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \ .$$

Demostración: Sea R un rectángulo genérico en el plano (no necesariamente el dado). Sea $L(R)$ el largo del perímetro de R y $d(R)$ el largo de sus diagonales. Si z_1, z_2, z_3, z_4 son vértices consecutivos de R, considere los cinco puntos: $z_{12} = (z_1 + z_2)/2$, $z_{23} = (z_2 + z_3)/2$, $z_{34} = (z_3 + z_4)/2$, $z_{41} = (z_1 + z_4)/2$ y $z_{13} = (z_1 + z_3)/2$. Es inmediato verificar que los cuatro cuartetos de puntos $(z_1, z_{12}, z_{13}, z_{14})$, $(z_{12}, z_2, z_{23}, z_{13})$, $(z_{13}, z_{23}, z_3, z_{34})$ y $(z_{14}, z_{13}, z_{34}, z_4)$ son los vértices de sendos cuatro rectángulos iguales R_1,R_2, R_3 y R_4 que son congruentes con R. El perímetro de cada uno de ellos es $L(R)/2$ y el largo de las diagonales respectivas es $d(R)/2$.

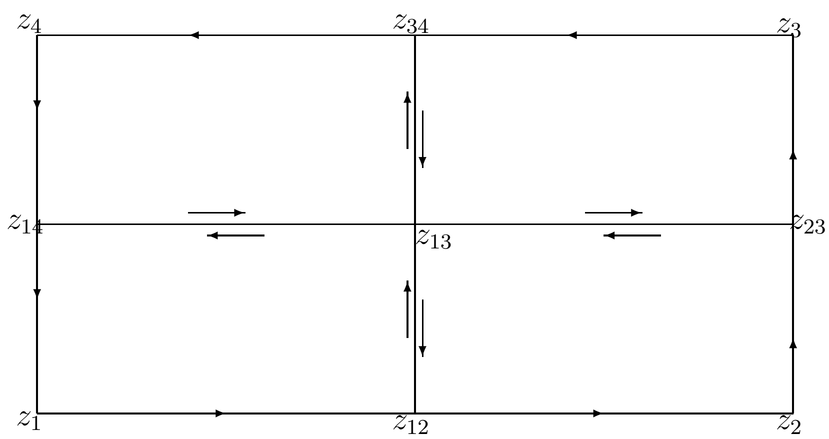


Figura 7.1:

Supongamos que f es analítica en un dominio que contiene a R y por ende a los rectángulos $R_1, \cdots, R_4$. Sea ∂R el camino cerrado simple que se obtiene concatenando los cuatro caminos rectilíneos que unen los pares de vértices consecutivos. Tenemos

$$I(R) := \int_{\partial R} f(z)dz = \left(\int_{z_1}^{z_2} + \int_{z_2}^{z_3} + \int_{z_3}^{z_4} + \int_{z_4}^{z_1} \right) f(z)dz \ ;$$

y expresiones análogas para $I(R_j) := \int_{\partial R_j} f(z)dz$, donde se ha de respetar la concatenación de vértices sucesivos que produzcan la misma orientación de ∂R_j que la de ∂R. Usando las propiedades (7.1) y (7.2) junto con las relaciones (geométricamente evidentes) $z_{13} = (z_2 + z_4)/2 = (z_{34} + z_{12})/2$, entre otras, se obtiene

$$I(R) = I(R_1) + I(R_2) + I(R_3) + I(R_4)\ .$$

Pero, con la desigualdad del triángulo,

$$|I(R)| \leq |I(R_1)| + |I(R_2)| + |I(R_3)| + |I(R_4)| \leq 4\,\mathrm{máx}\{|I(R_1)|, |I(R_2)|, |I(R_3)|, |I(R_4)|\}\ .$$

El máximo en el miembro derecho de la desigualdad se asume para alguno de los cuatro rectángulos. Si hay más de un rectángulo con esta propiedad, tómese el más próximo al vértice z_1, si sigue habiendo más de un rectángulo "maximal" tómese el más próximo al vértice z_2. Esto elige unívocamente a uno de los cuatro subrectángulos que llamaremos $R^{(1)}$ tal que:

$$R^{(1)} \subset R\ ,\ \ L(R^{(1)}) = L(R)/2\ ,\ \ d(R^{(1)}) = d(R)/2\ ,\ \ 4|I(R^{(1)})| \geq |I(R)|\ .$$

Podemos repetir este procedimiento de cuatrisección con $R^{(1)}$ para obtener un subrectángulo $R^{(2)}$ de $R^{(1)}$ con

$$R^{(2)} \subset R^{(1)}\ ,\ \ L(R^{(2)}) = L(R^{(1)})/2\ ,\ \ d(R^{(2)}) = d(R^{(1)})/2\ ,\ \ 4|I(R^{(2)})| \geq |I(R^{(1)})|\ .$$

Repitiendo este proceso n veces, obtenemos un subrectángulo $R^{(n)}$ tal que

$$R^{(n)} \subset R^{(n-1)}\ ,\ \ L(R^{(n)}) = 2^{-n}L(R)\ ,\ \ d(R^{(n)}) = 2^{-n}d(R)\ ,\ \ 4^n|I(R^{(n)})| \geq |I(R)|\ .$$

Por el Lema 1.8, existe $z \in R$ tal que $z \in R^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya que el tamaño de $R^{(n)}$ tiende a 0, dado cualquier entorno $E \subset R$ de z, hay un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $R^{(n)} \subset E$ para $n \geq n_o$.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Elegimos un entorno $F \subset R$ de z y un $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$R^{(n)} \subset F\ ,\ \text{y}\ \ \left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z)\right| \leq (\epsilon/(d(R)L(R))\ \text{para todo}\ z \neq w \in R^{(n)}\ .$$

Observando como lo hicimos luego del Teorema 6.4 que

$$\int_{\partial R^{(n)}} dw = \int_{\partial R^{(n)}} w dw = 0\ ,$$

tenemos

$$I(R^{(n)}) = \int_{\partial R^{(n)}} \left(f(w) - f(z) - (w - z)f'(z)\right) dw\ .$$

Pero entonces

$$\left|I(R^{(n)})\right| \leq \int_{\partial R^{(n)}} |f(w) - f(z) - (w-z)f'(z)|\ |dw| \leq \int_{\partial R^{(n)}} \frac{\epsilon}{d(R)L(R)} |w-z||dw| \ .$$

Ahora, para $w \in \partial R^{(n)}$ se tiene $|w - z| \leq d(R^{(n)}) = 2^{-n} d(R)$, con lo que

$$\left|I(R^{(n)})\right| \leq 2^{-n} \frac{\epsilon}{L(R)} \int_{\partial R^{(n)}} |dw| = 2^{-n} L(R^{(n)})\epsilon = 4^{-n}\epsilon \ .$$

Luego,

$$|I(R)| \leq 4^n |I(R^{(n)})| \leq \epsilon$$

y esto completa la prueba. $\square$

Demostración del Teorema de Cauchy-Goursat para un disco: La demostración procede construyendo una primitiva de f y aplicando el Teorema 6.4. Sea D el disco abierto y $z_o \in D$ algún punto que permanecerá fijo. Para $z \in D$ considere el número

$$F(z) = \int_{z_o}^{z_o + \mathrm{Re}(z-z_o)} f(z)dz + \int_{z_o + \mathrm{Re}(z-z_o)}^{z} f(z)dz$$

que se obtiene integrando f a lo largo de, primero el segmento de recta paralelo al eje real desde z_o hasta $z_o + \mathrm{Re}(z - z_o) = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z_o)$ y, luego, por el segmento de recta paralelo al eje imaginario desde $z_o + \mathrm{Re}(z - z_o)$ hasta z. El disco tiene la propiedad que para cualquier par de puntos en él estos caminos pertenecen al disco (una elipse, un rectángulo, ... gozan de la misma propiedad).

Verificamos que f es la derivada de F con lo que el Teorema 6.4 completa la demostración. Sea $\epsilon > 0$ y E un entorno de z tal que $E \subset D$ y $|f(w) - f(z)| \leq \epsilon/2$ para todo $w \in E$. Considere cualquier $w \in E$ con $w \neq z$ y, además de los puntos z_o y z los puntos (ver figura):

$$z_1 = z_o + \mathrm{Re}(z - z_o) \ , \ \ z_2 = z_o + \mathrm{Re}(w - z_o) \ , \ \ z_3 = z_1 + i\mathrm{Im}(w - z_o) = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(w) \ .$$

Se tiene

$$z_2 - z_1 = \mathrm{Re}(w - z) \ , \ \ w - z_2 = i\mathrm{Im}(w - z_o) \ , \ \ z_3 - w = \mathrm{Re}(z - w) = -(z_2 - z_1) \ ,$$

$$z_1 - z_3 = i\mathrm{Im}(z_o - w) = -(w - z_2) \ ,$$

por lo cual z_1, z_2, w y z_3 son vértices sucesivos de un rectángulo (de lados $|\mathrm{Re}(w - z)|$ y $|\mathrm{Im}(w - z_o)|$) comprendido en D. Por el Teorema anterior,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta + \int_{w}^{z_3} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_3}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = 0 \ . \tag{7.3}$$

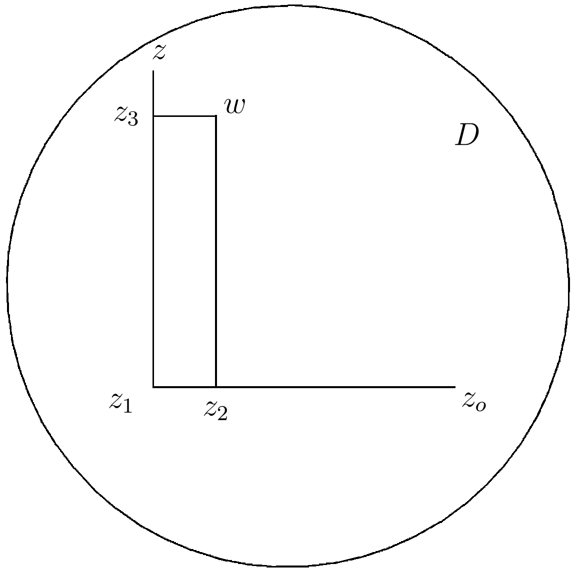


Figura 7.2:

Los puntos de los dos trios (z_o, z_1, z_2) y (z_1, z_3, z) son colineales; luego, con (7.2)

$$F(w) = \int_{z_o}^{z_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta \ ;$$

$$F(z) = \int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_1}^{z_3} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_3}^{z} f(\zeta)d\zeta \ .$$

Luego,

$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta \\ &\quad - \int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_1}^{z_3} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_3}^{z} f(\zeta)d\zeta \\ &= \left(\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta\right) - \int_{z_1}^{z_3} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_3}^{z} f(\zeta)d\zeta \ ; \end{aligned}$$

y con (7.3) para los sumandos entre paréntesis y (7.1),

$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \left(-\int_{w}^{z_3} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_3}^{z_1} f(\zeta)d\zeta\right) + \int_{z_3}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z_3} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{z_3}^{w} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z_3} f(\zeta)d\zeta \ . \end{aligned}$$

Con la parametrización explícita de los caminos rectilíneos

$$F(w) - F(z) = (w - z_3)\int_0^1 f(z_3 + t(w - z_3))dt + (z_3 - z)\int_0^1 f(z + t(z_3 - z))dt$$

$$= \mathrm{Re}(w-z)\underbrace{\int_0^1 f(z_3+t(w-z_3))dt}_{I_1} + i\mathrm{Im}(w-z)\underbrace{\int_0^1 f(z+t(z_3-z))dt}_{I_2} .$$

Usando la identidad

$$f(z) = f(z)\int_0^1 dt ,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) &= \frac{F(w)-F(z)-(w-z)f(z)}{w-z} \\
&= \frac{\mathrm{Re}(w-z)I_1 + i\mathrm{Im}(w-z)I_2 + (w-z)f(z)\int_0^1 dt}{w-z} \\
&= \frac{\mathrm{Re}(w-z)}{w-z}(I_1 - f(z)\int_0^1 dt) + i\frac{\mathrm{Im}(w-z)}{w-z}(I_2 - f(z)\int_0^1 dt) \\
&= \frac{\mathrm{Re}(w-z)}{w-z}\int_0^1 \left[f(z_3+t(w-z_3)) - f(z)\right] dt \\
&\quad + i\frac{\mathrm{Im}(w-z)}{w-z}\int_0^1 \left[f(z+t(z_3-z)) - f(z)\right] dt .
\end{aligned}$$

Por la construcción, o bien explícitamente de $z - z_3 = i\mathrm{Im}(z-w)$, $z_3 - w = \mathrm{Re}(z-w)$, se tiene

$$|z-w|^2 = |z-z_3|^2 + |w-z_3|^2$$

y esto implica que los segmentos de recta trazados por los dos caminos $\{[0,1] \ni t \mapsto z_3 + t(w-z_3)\}$ y $\{[0,1] \ni t \mapsto f(z+t(z_3-z))\}$ están comprendidos dentro de E. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| &\le \frac{|\mathrm{Re}(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1 |f(z_3+t(w-z_3)) - f(z)|\, dt \\
&\quad + \frac{|\mathrm{Im}(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1 |f(z+t(z_3-z)) - f(z)|\, dt
\end{aligned}$$

$$\le \frac{|\mathrm{Re}(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1 (\epsilon/2)dt + \frac{|\mathrm{Im}(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1 (\epsilon/2)dt = (\epsilon/2)\frac{|\mathrm{Re}(w-z)| + |\mathrm{Im}(w-z)|}{|w-z|} .$$

Pero las desigualdades $|\mathrm{Re}(w-z)| \le |w-z|$ y $|\mathrm{Im}(w-z)| \le |w-z|$ implican que

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \le \epsilon .$$

□

Proposición 7.1 *Sean γ_1 y γ_2 dos caminos cerrados simples de la misma orientación tales que: $[\gamma_1]$ y $[\gamma_2]$ están ambos en algún disco; $[\gamma_2]$ está en el dominio D_1 encerrado por $[\gamma_1]$. Sea A el abierto contenido en D_1 cuya frontera es $[\gamma_1] \cup [\gamma_2]$. Si f es analítica sobre A y su frontera entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \ .$$

Demostración: Si $[\gamma_2]$ es un punto, el enunciado se reduce al Teorema de Cauchy. Sino sean $z_1, z_2 \in [\gamma_2]$ dos puntos distintos. Elegimos dos puntos distintos $z_3, z_4 \in [\gamma_1]$ tales que: hay un camino simple α con punto inicial z_1 y punto final z_3 tal que $[\alpha] \subset A$; hay un camino simple β con punto inicial z_4 y punto final z_2 tal que $[\beta] \subset A$ y $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$. Sea $\gamma_{3\to 4}$ (respectivamente $\gamma_{4\to 3}$) la porción del camino γ_1, incluyendo su orientación, cuyo punto incial es z_3 (resp. z_4) y cuyo punto final es z_4 (resp. z_3). Tenemos $\gamma_1 = \gamma_{3\to 4} + \gamma_{4\to 3}$. Procedamos analogamente con γ_2 para obtener $\gamma_2 = \gamma_{1\to 2} + \gamma_{2\to 1}$. Sea $\Gamma_1 = \gamma_{3\to 4} + \beta - \gamma_{1\to 2} + \alpha$ que es cerrado y simple. Por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_{3\to 4}} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz - \int_{\gamma_{1\to 2}} f(z)dz + \int_{\alpha} f(z)dz = 0 \ .$$

Sea $\Gamma_2 = \gamma_{4\to 3} - \alpha - \gamma_{2\to 1} - \beta$ que es cerrado y simple. Por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_{4\to 3}} f(z)dz - \int_{\alpha} f(z)dz - \int_{\gamma_{2\to 1}} f(z)dz - \int_{\beta} f(z)dz = 0 \ .$$

Sumando ambas identidades, se obtiene el resultado. □

7.1.1 La representación integral de Cauchy

Teorema 7.3 *(Fórmula de Cauchy) Si f es analítica en un disco abierto A y γ es un camino cerrado simple orientado positivamente con $[\gamma] \subset A$, entonces para todo z en el dominio encerrado por $[\gamma]$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \ . \tag{7.4}$$

Demostración: Sea D el dominio encerrado por $[\gamma]$; para todo $z \in D$ la función $w \mapsto f(w)/(w-z)$ es analítica en $D \setminus \{z\}$ ya que $w \mapsto (w-z)^{-2}(f'(w)(w-z) - f(w))$ es su derivada. Existe $r_o > 0$ tal que el camino circular C_r de radio r centrado en z está dentro de D para todo $0 < r \leq r_o$, i.e. $[C_r] \subset D$. Por la Proposición 7.1, tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw \ .$$

Dado $\epsilon > 0$ existe un entorno E de z contenido en D tal que

$$|f(w) - f(z)| \leq \epsilon/(2\pi)$$

para todo $w \in E$ por la continuidad de f. Luego existe $0 < \rho$ tal que $[C_\rho] \subset E$. Como

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i \ ,$$

tenemos

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) = \int_{C_\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{C_\rho} \frac{1}{w-z} dw = \int_{C_\rho} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw \ .$$

Luego

$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \right| \leq \int_{C_\rho} \frac{|f(w)-f(z)|}{|w-z|} dw \leq \rho^{-1} \int_{C_\rho} (\epsilon/2\pi)|dw| = \epsilon \ . \ \square$$

El siguiente resultado técnico es fundamental para lo que sigue; se puede ver como inversión de la fórmula de Cauchy: si una función admite una representación integral como (7.4) con f continua entonces es analítica .

Proposición 7.2 *Sea γ un camino y g una función compleja continua sobre $[\gamma]$. La función*

$$G(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z} dw \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma] \tag{7.5}$$

es analítica y tiene derivadas de todo orden analíticas dadas por

$$G^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{7.6}$$

Demostración: Si $|\Delta z|$ es lo suficientemente chico como para que $z + \Delta z \notin [\gamma]$,

$$\frac{G(z+\Delta z) - G(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_\gamma \left(\frac{g(s)}{s-z-\Delta z} - \frac{g(s)}{s-z} \right) ds = \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)} ds \ .$$

Luego,

$$\frac{G(z+\Delta z) - G(z)}{\Delta z} - \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z)^2} ds = \int_\gamma g(s) \left(\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)} - \frac{1}{(s-z)^2} \right) ds$$

$$= \Delta z \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2} ds \ .$$

Sea $M := \max_{s\in[\gamma]} |g(s)|$, $d := \min_{s\in[\gamma]} |s-z|$. Entonces, si $\Delta z \leq d/2$, $|s-z-\Delta z| \geq |s-z| - |\Delta z| \geq d/2$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{g(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}\right| \leq 2M/d^3$$

para todo $s \in [\gamma]$, y con esto

$$\left|\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z} - \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z)^2}\,ds\right| \leq 2Md^{-3}\Delta z\ell(\gamma) \;;$$

el miembro derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $\Delta z \to 0$. $\square$

Teorema 7.4 *Si f es analítica en un disco abierto D entonces todas las derivadas de f existen y son analíticas en ese disco. Se tiene*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \;, \quad n \in \mathbb{N} \;, \tag{7.7}$$

para cualquier $z \in D$ y todo camino cerrado simple γ orientado positivamente tal que $[\gamma] \subset D$ y z pertenezca al dominio encerrado por $[\gamma]$

Demostración: Sea γ un camino cerrado simple que satisface la hipótesis. Por la fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

para todo z en el dominio encerrado por γ; por la Proposición anterior

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

es su n-ésima derivada que es analítica . $\square$
El siguiente resultado es un corolario inmediato

Teorema 7.5 *Si f es analítica en un abierto todas sus derivadas existen y son analíticas en el abierto.*

Demostración: Si z está en el abierto A donde f es analítica , hay un entorno E de z comprendido en A y el Teorema anterior aplicado a E nos da el resultado. $\square$

El siguiente corolario completa la demostración del Teorema 2.3.

Corolario 7.1 *Si $f = u + iv$ es analítica en un abierto todas las derivadas parciales de u y de v existen y son continuas.*

Corolario 7.2 *(Cotas de Cauchy) Si f es analítica dentro y sobre un camino cerrado circular $C(z, R)$ de radio $R > 0$ alrededor de z entonces*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{R} \max_{w \in [C(z,R)]} |f(w)| \ , \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{7.8}$$

Ejercicio 24 *Demuestre el Corolario anterior.*

Teorema 7.6 *Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $K \subset G$ compacto. Existe $t > 0$ y un conjunto compacto $L \subset G$ con $K \subset L$ tal que para toda función* analítica *f en G se tiene $|f'(z)| \leq t \max_{w \in L} |f(w)|$, para todo $z \in K$.*

<u>Demostración</u>: Por el lema 1.9 existe $r > 0$ tal que para todo $z \in K$ se tiene $\overline{D(z,r)} \subset G$ y $L = \cup_{z \in K} \overline{D(z,r)}$ es compacto. Sea $t = 1/r$, por el corolario anterior, para todo $z \in K$ se tiene $|f'(z)| \leq t \max_{w \in C(z,r)} |f(w)| \leq t \max_{w \in L} |f(w)|$. $\square$

7.1.2 Teorema de Liouville

Teorema 7.7 *Si f es entera y acotada entonces es constante.*

Ejercicio 25 *Usando la cota de Cauchy para f' (Corolario 7.2) y el Teorema 2.4, demuestre el Teorema de Liouville.*

7.1.3 Aplicación: Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 7.8 *Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_o$ con coeficientes complejos y de grado $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$) tiene n raíces $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ contando multiplicidades y*

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \ .$$

<u>Demostración</u>: Podemos escribir

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} z^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z^{-(n-1)} + \frac{a_o}{a_n} z^{-n}\right) \ .$$

Ya que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} z^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z^{-(n-1)} + \frac{a_o}{a_n} z^{-n}\right|$$

$$\leq \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|\,|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|a_n|\,|z|^2} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|\,|z|^{n-1}} + \frac{|a_o|}{|a_n|\,|z|^n}$$

y el miembro derecho de la desigualdad tiende a 0 para $|z| \to \infty$, deducimos que $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$.

Suponga que P no tiene raíces, entonces $f(z) = 1/P(z)$ es entera. Elejimos $C_1 > 0$ y por lo antedicho existe $R > 0$ tal que $|P(z)| \geq C_1$ para todo z con $z > R$. Luego $|f(z)| \leq (1/C_1)$ para todo z fuera del disco cerrado $\overline{D(0,R)}$. Pero este disco es acotado y cerrado con lo que el Teorema 2.1 indica que f es acotada sobre él, i.e. existe $C_2 > 0$ tal que $|f(z)| \leq C_2$ para todo $z \in \overline{D(0,R)}$. Por lo tanto $|f(z)| \leq \max\{C_2, 1/C_1\}$ es acotada. Por el Teorema de Liouville f, luego P, son constantes lo que contradice la hipótesis $a_n \neq 0$. Por lo tanto existe una raíz z_1. Entonces,

$$P(z) = a_n(z - z_1)P_1(z)$$

donde el polinomio P_1 tiene grado $n-1$ y el correspondiente coeficiente es 1. Aplicando el argumento a P_1 obtenemos una raíz z_2 de P_1 y

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)P_2(z)\ ,$$

donde P_2 tiene grado $n-2$ con correspondiente coeficiente igual a 1.

Repitiendo este procedimiento llegamos a una $(n-1)$-ésima raíz z_{n-1} donde el polinomio "restante" P_{n-1} es de grado 1: $P_{n-1}(z) = z - z_n$; esto completa le demostración. $\square$

7.1.4 Teorema de Morera

Teorema 7.9 *(Teorema de Morera) Si f es continua en un dominio D y $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ con $[\gamma] \subset D$ entonces f es analítica en D.*

Demostración: Por el Teorema 6.4 f admite una primitiva en D y es entonces analítica como derivada de una función analítica por el Teorema 7.5. $\square$

7.2 Teorema de Cauchy-Goursat para un dominio simplemente conexo

Un conjunto conexo se llama **simplemente conexo** si no tiene agujeros. Veamos una manera de precisar esto. Como ya se hizo al discutir las transformaciones de Möbius, se le

agrega el punto ideal ∞ a $\mathbb{C}$ para formar $\mathbb{C}_\infty$. $K \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si es conexo y su complemento en $\mathbb{C}_\infty$ es conexo. El ejemplo $K = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ con $a \in \mathbb{C}$ es ilustrativo. K tiene un agujero en a; su complemento en $\mathbb{C}$ es $\{a\}$ que es conexo; pero su complemento en $\mathbb{C}_\infty$ es $\{a\} \cup \{\infty\}$ que no es conexo. Si el complemento de $A \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ es conexo, contiene una curva que se escapa hacia ∞, i.e., el módulo de los puntos de la curva se hace tan grande como uno quiera.
Otra manera de definir que es un conjunto simplemente conexo es decir que es un conjunto conexo donde todo camino cerrado simple se puede deformar (continuamente) hasta coincidir con un punto.

El siguiente es una versión general del Teorema de Cauchy-Goursat. Su demostración se da en el Apéndice A como caso especial de un resultado aún más general.

Teorema 7.10 *(Teorema de Cauchy-Goursat) Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D entonces:*

1. *Para todo camino cerrado tal que $[\gamma] \subset D$,*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ .$$

2. *Para todo camino cerrado simple γ orientado positivamente con $[\gamma] \subset A$, y para todo z en el dominio encerrado por $[\gamma]$*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \ .$$

La hipótesis de conectividad simple del dominio es crucial. Piense en la función $z \mapsto 1/z$ en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no es simplemente conexo; tenemos
$$\int_C z^{-1}dz = 2\pi i$$
para cualquier camino circular cerrado C orientado positivamente.

7.3 Ramas del logaritmo y de las potencias

Proposición 7.3 *Sea A un dominio simplemente conexo que no contiene a 0, $z_o \in A$ y $w_o \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(w_o) = z_o$. Para cualquier camino γ que une z_o con $z \in A$ y tal que $[\gamma] \subset A$ el número*
$$f_{z_o,w_o}(z) = w_o + \int_\gamma \frac{dw}{w}$$

no depende de γ y define una rama f_{z_o,w_o} del logaritmo sobre A.

Para todo número complejo $\mu \in \mathbb{C}$ la función

$$\zeta_\mu(z) = \exp(\mu f_{z_o,w_o}(z)) \ , \quad z \in A$$

es una rama de la μ-ésima potencia de z.

Demostración: La analiticidad de $f(z) = 1/z$ en A y el Teorema de Cauchy-Goursat indican que f_{z_o,w_o} es independiente del camino que une z_o a z. El Teorema 6.4 indica que f tiene una primitiva F en A. Luego $f_{z_o,w_o}(z) = w_o + F(z) - F(z_o)$. Sea $g(z) = z\exp(-f_{z_o,w_o}(z))$; entonces $g'(z) = \exp(-f_{z_o,w_o}(z)) - z\exp(-f_{z_o,w_o}(z))z^{-1} = 0$, de donde $g(z) = z\exp(-f_{z_o,w_o}(z)) = c$ para todo $z \in A$. c no puede ser 0 ya que $0 \notin A$ y $\exp(w) \neq 0$; luego $\exp(f_{z_o,w_o}(z)) = z/c$. Pero $z_o/c = \exp(f_{z_o,w_o}(z_o)) = \exp(w_o) = z_o$ y por ende $c = 1$. La afirmación sobre la potencia es inmediata. $\square$

Capítulo 8

Series de potencias II

8.1 Serie de Taylor para funciones analíticas

Recordemos que un entorno de un punto es un disco abierto centrado en el punto. El siguiente resultado establece que las funciones analíticas admiten un desarrollo convergente en serie de potencias.

Teorema 8.1 *Si f es analítica en un entorno E de $z_o \in \mathbb{C}$ entonces la serie de Taylor alrededor de z_o*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}(z-z_o)^n = f(z_o)+f'(z_o)(z-z_o)+\frac{f''(z_o)}{2}(z-z_o)^2+\frac{f'''(z_o)}{6}(z-z_o)^3+\cdots \quad (8.1)$$

converge para $z \in E$ y uniformemente en todo disco cerrado alrededor de z_o contenido en E.

Demostración: Como en la demostración del Teorema anterior sobre convergencia de series de potencia, la convergencia en E se desprende de la convergencia uniforme en todo disco cerrado contenido en E.

Sea ρ el radio del entorno, $E = D(z_o; r)$, y $0 < r < \rho$. Sea C el círculo de radio $(r + \rho)/2$ alrededor de z_o orientado positivamente. Por la fórmula de Cauchy,

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo z en el disco cerrado encerrado por C. Usando la identidad (3.2) se obtiene la identidad

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_o}\left(1+\frac{z-z_o}{w-z_o}+\frac{(z-z_o)^2}{(w-z_o)^2}+\cdots+\frac{(z-z_o)^n}{(w-z_o)^n}+\frac{\frac{(z-z_o)^{n+1}}{(w-z_o)^{n+1}}}{1-\frac{z-z_o}{w-z_o}}\right) ,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $w \in C$. Insertando esto en la fórmula de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} (z - z_o)^k \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_o)^{k+1}} dw \ + \ R_n(z) \ , \tag{8.2}$$

donde el "resto" está dado por

$$R_n(z) = \frac{(z - z_o)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_o)^{n+1}} dw \ .$$

Por la fórmula de Cauchy, la suma en (8.2) coincide con la suma parcial de los primeros $n + 1$ términos de la serie de Taylor (8.1). Para completar la demostración, basta ver que el resto R_n puede hacerse tan chico como se quiera independientemente de z con $|z - z_o| \leq r$. Para $w \in C$ tenemos $|w - z_o| = (r + \rho)/2$ y $|w - z| = |w - z_o - (z - z_o)| \geq |w - z_o| - |z - z_o| = \frac{r+\rho}{2} - |z - z_o| \geq \frac{r+\rho}{2} - r = \frac{\rho - r}{2}$. Por lo tanto,

$$|R_n(z)| \leq \frac{|z - z_o|^{n+1}}{2\pi} \int_C \frac{|f(w)|}{|w - z|\,|w - z_o|^{n+1}} dw$$

$$\leq \frac{r^{n+1}}{2\pi \left(\frac{\rho - r}{2}\right) \left(\frac{\rho + r}{2}\right)^{n+1}} \left(\max_{w \in C} |f(w)| \right) 2\pi \frac{\rho + r}{2} = \frac{\rho + r}{\rho - r} \left(\max_{w \in C} |f(w)| \right) \left(\frac{2r}{\rho + r} \right)^{n+1} \ .$$

El miembro derecho de esta desigualdad es independiente de z y puede hacerse tan chico como se quiera ya que $(\rho + r)/2 > r$, vale decir $2r/(\rho + r) < 1$. $\square$

Corolario 8.1 *Si f es analítica en un entorno de z_o, las series de Taylor alrededor de z_o de las derivadas de f en el entorno se obtienen derivando sucesivamente la serie de Taylor de f término a término.*

Corolario 8.2 *Si f y g son analíticas en un entorno de z_o las series de Taylor alrededor de z_o de las funciones $f + g$ y $f.g$ se obtienen sumando y multiplicando respectivamente aquellas de f y de g.*

Teorema 8.2 *Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$ alrededor de z_o tiene radio de convergencia no nulo y $f(z)$ es su suma, entonces la serie coincide con la serie de Taylor de f alrededor de z_o en el disco de convergencia de la serie.*

Demostración: Sea C un círculo centrado en z_o orientado positivamente y contenido en el disco abierto de convergencia de la serie. Por el Teorema 3.2, f es analítica en el dominio simplemente conexo encerrado por C. Luego,

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_o)^{n+1}} dw \ .$$

Por el corolario del Teorema 6.5, la serie se puede integrar término a término dentro de su disco de convergencia. Pero,

$$\int_C \frac{(w-z_o)^k}{(w-z_o)^{n+1}}dw = \begin{cases} 2\pi i & , \quad \text{si } k=n \\ 0 & , \quad \text{si } k\neq n \end{cases} ,$$

por la fórmula de Cauchy aplicada a la función $z \mapsto (z-z_o)^k$ que tiene primitiva analítica sobre C para $k \neq -1$. El único término de la serie cuya integral no se anula es el n-ésimo y la integral es $n!a_n$. $\square$

8.2 Series de Laurent

Si R es el radio de convergencia de una serie de potencias con coeficientes a_n, la serie

$$a_o + \frac{a_1}{z-z_o} + \frac{a_2}{(z-z_o)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_o)^n}$$

converge fuera de $\overline{D(z_o;1/R)}$, y lo hace uniformemente en y fuera de cualquier círculo de radio mayor a $1/R$, en virtud del Teorema fundamental sobre convergencia de series de potencias. Podemos entonces considerar series de potencias positivas y negativas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n} \; + \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n \; , \tag{8.3}$$

con coeficientes complejos a_n ($\pm n \in \mathbb{N}$) centrada en $z_o \in \mathbb{C}$. Una serie de este tipo se llama **serie de Laurent**. La serie formada por los coeficientes de índice negativo es convergente fuera de un círculo de radio R_1 igual al recíproco del radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n}$. La serie formada por los coeficientes positivos es convergente dentro de un disco abierto de radio R_2. Si $R_1 < R_2$, la serie (8.3) converge en el anillo abierto de radio interior R_1 y de radio exterior R_2 alrededor de z_o (llamado **anillo de convergencia**): $\{z \in \mathbb{C} : \; R_1 < |z-z_o| < R_2\}$, y la convergencia es uniforme en cualquier anillo cerrado contenido en el anillo de convergencia. En su anillo de convergencia la serie define una función analítica, cuyas derivadas se obtienen derivando término a término. Obsérvese que si el radio interior del anillo es 0 éste es simplemente un disco abierto con radio igual al radio exterior R_2 pero pinchado en z_o. i.e., $D_o(z_o;R_2)$.

Teorema 8.3 *Si f es analítica en un anillo abierto A centrado en z_o, entonces f admite un desarrollo único en serie de Laurent alrededor de z_o (8.3) convergente en el anillo y* *uniformemente convergente en todo anillo cerrado contenido en A; con coeficientes*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_o)^{n+1}}dw \quad , \quad \pm n \in \mathbb{N} \; , \tag{8.4}$$

donde C es cualquier camino cerrado simple orientado positivamente contenido en A que encierre a z_o.

Demostración: Sean r y R el radio interior y exterior respectivamente del anillo abierto A ($r < R$). Considere cualquier anillo cerrado $B := \{z \in \mathbb{C} : \ \rho_1 \leq |z - z_o| \leq \rho_2\}$ contenido en el anillo abierto A, con $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Considere los círculos $C_1 := \{z \in A : |z - z_o| = (r + \rho_1)/2\}$ orientado negativamente y $C_2 := \{z \in A : \ |z - z_o| = (R + \rho_2)/2\}$ orientado positivamente, ambos contenidos en A. Sea $z \in B$ entonces z está fuera de C_1 y dentro de C_2. Considere dos distintos segmentos de recta α y β que unen C_1 con C_2 y no pasan por z. El camino Γ se obtiene yendo de C_1 a C_2 por α luego por C_2 (respetando la orientación) hasta encontrarse con β, de allí por β hasta C_1 y por C_1 (respetando la orientación) hasta encontrarse con α (el punto inicial y final de Γ). El camino γ se obtiene yendo de C_2 a C_1 por $-\alpha$ luego por C_1 (respetando la orientación) hasta encontrarse con β, de allí por $-\beta$ hasta C_2 y por C_2 (respetando la orientación) hasta encontrarse con α (el punto inicial y final de γ). Entonces z queda encerrado o por $[\Gamma]$ o por $[\gamma]$; digamos por $[\Gamma]$. Ya que $\Gamma \subset A$ y z queda dentro de Γ, la fórmula de Cauchy produce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \; .$$

Ya que $\gamma \subset A$, z queda fuera de γ y por ende $w \mapsto f(w)/(w-z)$ es analítica dentro y sobre γ, el Teorema de Cauchy garantiza que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 0 \; .$$

Luego,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw \; ;$$

pero en esta integral la contribución de los dos segmentos rectos comunes a Γ y a γ se anula ya que estos son recorridos dos veces en direcciones opuestas. Por lo tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw \; + \; \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw \quad , \quad z \in B \; .$$

Ya que z queda dentro de C_2, procediendo de la misma manera que en la demostración del teorema sobre el desarrollo en serie de Taylor, obtenemos

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n$$

con coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{n+1}} dw \tag{8.5}$$

y donde la serie es uniformemente convergente para $z \in A$ con $|z - z_o| \leq \rho_2$. Pasamos a la otra integral sobre C_1. Usando la identidad (3.2), tenemos

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_o} \left(1 + \frac{w - z_o}{z - z_o} + \frac{(w - z_o)^2}{(z - z_o)^2} + \cdots + \frac{(w - z_o)^k}{(z - z_o)^k} + \frac{\frac{(w-z_o)^{k+1}}{(z-z_o)^{k+1}}}{1 - \frac{w-z_o}{z-z_o}} \right) ,$$

para todo $w \in C_1$ y cualquier natural k. Insertando esta identidad en la integral sobre C_1, obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} f(w)(w - z_o)^n \, dw \right) (z - z_o)^{-n-1} + R_k(z) \\ &= \sum_{n=1}^{k+1} a_{-n} (z - z_o)^{-n} + R_k(z) \ , \end{aligned}$$

con coeficientes

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{-n+1}} dw \quad , \quad n = 1, 2, \cdots \ , \tag{8.6}$$

y donde el "resto" es

$$R_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} \frac{f(w)(w - z_o)^{k+1}}{(w - z)(z - z_o)^{k+1}} dw \ .$$

Ya que $|z - z_o| \geq \rho_1$, y $|w - z_o| = (r + \rho_1)/2$ para $w \in C_1$, se tiene $|w - z| = |w - z_o - (z - z_o)| \geq |z - z_o| - |w - z_o| \geq \rho_1 - (r + \rho_1)/2 = (\rho_1 - r)/2$. Luego, como en la demostración del desarrollo de Taylor,

$$|R_k(z)| \leq \frac{\rho_1 + r}{\rho_1 - r} \left(\max_{w \in C_1} |f(w)| \right) \left(\frac{\rho_1 + r}{2\rho_1} \right)^{k+1}$$

que converge a 0 para $k \to \infty$ pues $(\rho_1 + r)/(2\rho_1) < 1$. Luego, la serie obtenida para f_1 es uniformemente convergente para todo $z \in A$ con $|z - z_o| \geq \rho_1$.

Para completar la demostración, observamos que las expresiones (8.5) y (8.6) para los coeficientes son independientes del camino cerrado simple de integración siempre que esté contenido en A, encierre a z_o y esté orientado positivamente (como lo están $-C_1$ y C_2). La unicidad de la serie, o sea de los coeficientes se verifica simplemente igual que en el Teorema 8.2. $\square$

Una variante del Teorema recién demostrado es:

Teorema 8.4 *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n}$ *dos series con las propiedades siguientes: 1) la primera serie converge en un disco abierto de radio* R *alrededor de* z_o*; 2) la segunda serie converge fuera del disco cerrado de radio* r *alrededor de* z_o*; y 3)* $r < R$*. Entonces, existe una función* f *analítica en el anillo abierto de radio interior* r *y radio exterior* R *cuyo desarrollo de Laurent coincide con* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$*.*

Este resultado garantiza que una serie de tipo (8.3) es la serie de Laurent de su suma en su anillo de convergencia.

Capítulo 9

Algunos Resultados Fundamentales

9.1 Analiticidad de límites uniformes

Los siguientes resultados clásicos y fundamentales se deben a Weiertraß.

Teorema 9.1 *Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto Ω que convergen uniformemente a f en todo subconjunto compacto de Ω. Entonces f es analítica en Ω y para $k = 1, 2, \cdots$, la sucesión $\{f_n^{(k)} : n \in \mathbb{N}\}$ de k-ésimas derivadas converge uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω a $f^{(k)}$.*

Demostración: Sea $z \in \Omega$ y E un entorno de z contenido en Ω. Para todo camino cerrado γ con $[\gamma] \subset E$, se tiene, usando el Teorema 6.5, $\int_\gamma f(z) = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$. Por el Teorema de Morera, f es analítica en E, luego analítica en Ω.
Para demostrar la afirmación sobre las derivadas basta hacerlo para f'. Sea $K \subset \Omega$ compacto; por el teorema 7.6 existe $L \subset \Omega$ compacto con $K \subset L$ y $t > 0$ tal que para $z \in K$ se tiene $|g'(z)| \leq t \max_{w\in L} |g(w)|$ para cualquier función analítica en Ω. Ya que L es compacto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|f(w) - f_n(w)| < \epsilon/t$ para todo $w \in L$ y todo $n \geq n_o$. Luego, $|f'(z) - f_n'(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$ y todo $n \geq n_o$. $\square$

Aplicando este resultado a las sumas parciales de una serie obtenemos

Teorema 9.2 *Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto Ω. Si la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente a f en todo subconjunto compacto de Ω, entonces f es analítica en Ω y para $k = 1, 2, \cdots$, la serie $\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}$ de k-ésimas derivadas converge uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω a $f^{(k)}$.*

Teorema 9.3 *Sea* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de funciones analíticas en un disco abierto* D *alrededor de* $a \in \mathbb{C}$. *Si la serie de Taylor de* f_n

$$f_n(z) = \sum_{n \geq 0} a_k^{(n)} (z-a)^k$$

converge en D *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y la serie* $\sum_{n \geq 0} f_n$ *converge uniformemente a* f *en todo subconjunto compacto de* D, *entonces* f *es analítica en* D *y su serie de Taylor*

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

es convergente en D. *Se tiene*

$$a_k = \sum_{n \geq 0} a_k^{(n)} \ .$$

Vale decir

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} a_k^{(n)} z^k \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} a_k^{(n)} \right) z^k \ .$$

<u>Demostración</u>: Por el teorema anterior f es analítica y la series $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ convergen a $f^{(k)}$ uniformemente en todo compacto en D. Luego la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} (f^{(k)}(a)/k!) z^k$$

converge en D. Pero $f^{(k)}(a) = \sum_{j \geq 0} f_j^{(k)}(a) = k! \sum_{j \geq 0} a_k^{(j)}$. $\square$

Ejercicio 26 *Demuestre que la serie* $\sum_{n \geq 1} z^{2^n}/(z^{2^{n+1}} - 1)$, $|z| \neq 1$ *es uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de* $D(0,1)$ *y de* $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. *Obtenga la suma de la serie en ambos dominios.*

9.2 El Principio del Módulo Máximo

Lema 9.1 *Si* f *es analítica en un entorno* E *de* z_o *y* $|f(z)| \leq |f(z_o)|$ *para todo* $z \in E$ *entonces* f *es constante en* E.

<u>Demostración</u>: Considere el camino circular $C(z_o, r)$ donde r es lo suficientemente chico como para que $[C(z_o, r)] \subset E$. Se tiene

$$f(z_o) = (2\pi i)^{-1} \int_{C(z_o,r)} \frac{f(w)}{w - z_o} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(z_o + re^{it}) dt \ ;$$

luego

$$|f(z_o)| \leq (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(z_o + re^{it})| dt \leq (2\pi)^{-1} |f(z_o)| \int_0^{2\pi} dt = |f(z_o)| \; ;$$

o sea que

$$|f(z_o)| = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(z_o + re^{it})| dt \; ,$$

o lo que es lo mismo

$$0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \big(|f(z_o)| - |f(z_o + re^{it})|\big) \, dt \; .$$

En esta última integral el integrando es no negativo y una función continua de $t \in [0, 2\pi]$, luego por el Lema 6.2, $|f(z_o)| = |f(z_o + re^{it}|$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Como $r > 0$ es arbitrario sujeto a que $[C(z_o, r)] \in E$, deducimos que $z \mapsto |f(z)|$ es constante en E. Luego, por el Teorema 2.4 f es constante. $\square$

Teorema 9.4 *(Principio del Módulo Máximo)*

1. *Si f es analítica en un dominio D y no es constante entonces $D \ni z \mapsto |f(z)|$ no admite un máximo: no existe $z_o \in D$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_o)|$ para todo $z \in D$;*

2. *Si f es analítica en un abierto acotado $G \subset \mathbb{C}$ y continua sobre la frontera de G entonces el valor máximo de $|f|$ sobre el cierre de G se asume en la frontera ∂G de G:*

$$\sup_{z \in G} |f(z)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)| \; > \; f(w) \; , \quad \textit{para todo } w \in G \; .$$

Demostración:

1. El conjunto $\mathcal{A} = \{z \in D \; : \; |f(z)| = |f(z_o)|\}$ no es vacío. La continuidad de f implica que $\mathcal{B} = \{z \in D \; : \; |f(z)| < |f(z_o)|\}$ es abierto y desde luego $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = D$. Si logramos demostrar que $\mathcal{A}$ es abierto, entonces el hecho de que D es conexo implica que $\mathcal{B} = \emptyset$ y luego, por el Teorema 2.4 f es constante.

   Si $w \in \mathcal{A}$ y E es un entorno de w contenido en D entonces, para todo $z \in E$, se tiene $|f(z)| \leq |f(z_o)| = |f(w)|$ y, por el lema, $E \subset \mathcal{A}$ con lo que $\mathcal{A}$ es abierto. Esto completa la demostración.

2. La afirmación es inmediata si G es un dominio. Como hemos observado luego del Teorema 6.4, todo abierto es unión denumerable de dominios disjuntos dos-a-dos. $\square$

Ejercicio 27 *Demuestre el Lema de Schwarz: Si f es* analítica *en $D(0;1)$ con $f(0)=0$ y $\mid f(z) \mid \leq 1$ entonces $\mid f'(0) \mid \leq 1$ y $\mid f(z) \mid \leq \mid z \mid$. Idea: considere la función $g(z)=f(z)/z$ para $z \neq 0$ y $g(0)=f'(0)$.*

9.3 Ceros

Un **cero** de una función analítica es un punto z_o donde f es analítica y donde $f(z_o)=0$. Si E es un entorno del cero donde f es analítica, tenemos el desarrollo de Taylor alrededor de z_o

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}(z-z_o)^n \quad , \quad z \in E \ ,$$

y si f no se anula idénticamente en E, se tiene $f^{(m)}(z_o) \neq 0$ para un $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ que es el menor número natural con esta propiedad. Entonces,

$$f(z)=(z-z_o)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_o)}{(n+m)!}(z-z_o)^n \quad , \quad z \in E \ ,$$

donde la serie converge en E y converge uniformemente en todo disco cerrado centrado en z_o contenido en E. Si $g(z)$ denota su suma, g es analítica en E por el Teorema 6.4. Además, $g(z_o)=f^{(m)}(z_o)/m! \neq 0$. Luego,

$$f(z)=(z-z_o)^m g(z) \quad , \quad z \in E \ ,$$

con g analítica y $g(z_o) \neq 0$. El número m $(m \geq 1)$ se llama el **orden** del cero. Esto demuestra la mitad no trivial del siguiente resultado:

Teorema 9.5 *Si f es analítica en un entorno de z_o donde no se anula idénticamente, entonces z_o es un cero de f si y sólo si $f(z)=(z-z_o)^m g(z)$ para un $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$, y una función g analítica en el entorno con $g(z_o) \neq 0$.*

El siguiente resultado indica que los ceros de una función analítica no constante son aislados:

Corolario 9.1 *Si f es analítica en un entorno de z_o donde f no se anula idénticamente, y z_o es un cero de f, entonces f no tiene otros ceros que z_o en un algún entorno de z_o.*

Demostración: Sea m el orden del cero y $f(z) = (z - z_o)^m g(z)$ con g analítica y $g(z_o) \neq 0$. Como g es analítica y por ende continua en el entorno, existe algún entorno E contenido en el entorno original tal que $g(z) \neq 0$ para $z \in E$[1]. Luego $f(z) = (z - z_o)^m g(z)$ sólo se anula en $z = z_o$ en E. □

Teorema 9.6 *Si f es analítica en un dominio Ω entonces $C_f := \{z \in \Omega : \ f(z) = 0\}$ es todo Ω o no tiene puntos de acumulación en Ω (y es discreto y denumerable).*

Demostración: Si $z_o \in C_f$ los resultados anteriores implican que para cualquier entorno E de z_o contenido en Ω hay dos alternativas: 1) f se anula en E; 2) existe un entorno E' contenido en E tal que z_o es el único cero de f en E'.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de puntos de acumulación de C_f. Recordamos que $w \in \mathcal{A}$ quiere decir que en todo entorno de w contenido en Ω hay infinitos puntos de C_f. A fortiori, $w \in C_f$ pues la continuidad de f indica que dado $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ con $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ para todo z con $|z - w| < \delta$; tomando z como uno de los (infinitos) ceros de f en el entorno de radio δ de w, vemos que $|f(w)| < \epsilon$, y por ende $f(w) = 0$.

Entonces, si $w \in \mathcal{A}$, $w \in C_f$ y la alternativa 2) no se puede dar ya que en todo entorno de w hay ceros de f distintos de w. Luego, f se anula en todo entorno E de w contenido en Ω o sea que $E \subset C_f$ y por ende $E \subset \mathcal{A}$ y esto significa que $\mathcal{A}$ es abierto.

Por otro lado, $\mathcal{A}$ es cerrado ya que para cualquier sucesión $\{w_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{A}$ que converge a $w \in \Omega$ se tiene que todo entorno F de w contenido en Ω contiene también infinitos ceros de f - pues F contiene un entorno de un w_n que es un punto de acumulación– o sea $w \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\Omega \setminus \mathcal{A}$ es abierto.

Luego, $\Omega = \mathcal{A} \cup (\Omega \setminus \mathcal{A})$ y ambos conjuntos son abiertos y no se intersectan. Ya que un dominio es conexo, tenemos $\mathcal{A} = \Omega$ o bien $\mathcal{A} = \emptyset$.

Cuando $\mathcal{A}$ es vacío, C_f es discreto y denumerable; esta es una propiedad general que no demostraremos aquí. □

Corolario 9.2 *Si f y g son analíticas en un dominio Ω y $f = g$ en un subconjunto Ω_o de Ω que tiene un punto de acumulación en Ω entonces $f = g$ en Ω.*

Es notable que el orden de un cero de una función analítica es un número natural. La función $z \mapsto z^{1/2}$ tiene un cero en 0 pero como esta función no es analítica en 0, el orden no está definido.

El siguiente es un resultado análogo a la regla de L'Hospital.

---

[1]Explícitamente: Por la continuidad de g, existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_o| < \delta$ implica que $|g(z) - g(z_o)| < |g(z_o)/2|$. Entonces, $|g(z)| = |g(z) - g(z_o) + g(z_o)| \geq ||g(z_o)| - |g(z) - g(z_o)|| = |g(z_o)| - |g(z) - g(z_o)| > |g(z_o)|/2 > 0$

Proposición 9.1 *Si f y g son analíticas en un entorno de a y se tiene $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \cdots, n$ y $g^{(n+1)}(a) \neq 0$ entonces* $\lim_{z\to a} f(z)/g(z) = f^{(n+1)}(a)/g^{(n+1)}(a)$.

Demostración: En un entorno E de a se tiene $f(z) = (z-a)^{n+1}\phi(z)$ y $g(z) = (z-a)^{n+1}\psi(z)$ con ϕ, ψ analíticas en E. Ya que $f^{(n+1)}(a) = (n+1)!\phi(a)$, y $g^{(n+1)}(a) = (n+1)!\psi(a) \neq 0$,

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^{n+1}\phi(z)}{(z-a)^{n+1}\psi(z)} = \frac{\phi(a)}{\psi(a)} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{g^{(n+1)}(a)} \,. \;\square$$

9.4 Singularidades de funciones analíticas

Una **singularidad aislada** de una función f es un punto z_o tal que f es analítica en todos los puntos de algún entorno de z_o salvo en z_o. En tal caso f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

en un disco pinchado $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \rho\}$. Se dice que la singularidad aislada z_o es: **removible** si $a_n = 0$ para todo $n < 0$; un **polo de orden m** si $a_{-m} \neq 0$ pero $a_k = 0$ para todo $k < -m$; una **singularidad esencial** si $a_n \neq 0$ para un número infinito de valores negativos de n.

Analizamos los tres tipos de singularidades aisladas.

1. Si la singularidad z_o es removible, se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

en el entorno salvo para $z = z_o$. La serie infinita del miembro derecho de la igualdad converge uniformemente en todo el entorno y define una función analítica $g(z)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo z en el entorno exceptuando z_o. De aquí el nombre de removible, ya que reemplazando f por g tenemos una función analítica idéntica salvo en z_o.

Proposición 9.2 *Si la función f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_o| < \rho\}$, z_o es una singularidad removible si y sólo si* $\lim_{z\to z_o} f(z)$ *existe.*

Demostración: La necesidad es evidente. Por otro lado, si $\lim_{z\to z_o} f(z) =: a$ existe, entonces $|f(z)|$ es acotada en un entorno de z_o. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|a - f(z)| < \epsilon$ para todo z en el disco pinchado con $|z - z_o| \leq \delta$, y entonces

$|f(z)|-|a| \leq |a-f(z)|$ implica que $|f(z)| \leq |a|+\epsilon$. Tomando un círculo C_r orientado positivamente alrededor de z_o de radio r inferior a δ tenemos por (8.4)

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)(z-z_o)^{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Luego,

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi}(|a|+\epsilon)r^{n-1}(2\pi r) = (|a|+\epsilon)r^n ,$$

y tomando el límite $r \to 0$, obtenemos $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$. □

2. Pasemos ahora a los polos.

Proposición 9.3 *Si f es analítica en $D := \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z-z_o| < \rho\}$, entonces $\lim_{z\to z_o} |f(z)| = \infty$ si y sólo si existe un número natural m no nulo y una función analítica g en el disco abierto de radio ρ alrededor de z_o tal que $g(z_o) \neq 0$ y $f(z) = (z-z_o)^{-m}g(z)$ para todo $z \in D$.*

Demostración: Si f admite la representación indicada, se tiene $\lim_{z\to z_o} |f(z)| = \infty$. Veamos la suficiencia de esta representación. Existe $\rho' > 0$ tal que f no tiene ceros en $B' := \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z-z_o| < \rho'\}$. La función $h(z) := 1/f(z)$ es analítica en B' y $\lim_{z\to z_o} h(z) = 0$ con lo cual z_o es una singularidad removible de h y la función $\widetilde{h}(z) = h(z)$, $z \in B'$, $\widetilde{h}(z_o) = 0$, es analítica en $C := \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_o| < \rho'\}$. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$, y una función q analítica en C con $q(z_o) \neq 0$ tal que $\widetilde{h}(z) = (z-z_o)^m q(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces, para $z \in B'$ se tiene $f(z) = 1/h(z) = 1/\widetilde{h}(z) = (z-z_o)^{-m}(1/q(z))$. La función g definida como $1/q$ en B', y por $(z-z_o)^m f(z)$ en $B \setminus B'$ cumple con los requisitos. □

Si f tiene un polo de orden m la parte de la serie de Laurent con coeficientes negativos $a_{-m}(z-z_o)^{-m} + a_{-m+1}(z-z_o)^{-m+1} + \cdots + a_{-1}(z-z_o)^{-1}$ se denomina **la parte singular** de f en z_o.

3. Pasamos a considerar un ejemplo de una singularidad esencial. Considere la función $z \mapsto \exp(1/z)$, para $z \neq 0$. Se tiene $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)z^{-n}$ y ésta es la serie de Laurent (en virtud de la unicidad). $z = 0$ es por ende una singularidad esencial. Sea c un número complejo no nulo arbitario y $\epsilon > 0$. Considerando $\log(c) = \log|c| + i\mathrm{Arg}(c) + i2k\pi$ podemos elegir al entero k tal que el valor w de $\log(c)$ asociado satisfaga $|w| > 1/\epsilon$. Poniendo $z_o = 1/w$, tenemos $|z_o| < \epsilon$ y $e^{1/z_o} = c$. ¡En todo entorno de 0, la función $e^{1/z}$ toma el valor c donde c no nulo es arbitrario! Este hecho notable no es particular a la función considerada sino que es característico

para una singularidad esencial. El Teorema de Picard dice que en cualquier entorno de una singularidad esencial la función asume todos los números complejos con la posible excepción de uno sólo. Una versión mas débil es la siguiente

Teorema 9.7 (Casorati-Weierstraß) *Si f es analítica en $E = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_o| < \rho\}$ entonces z_o es una singularidad esencial de f, si y sólo si dados $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$, y $0 < \delta \leq \rho$, existe $z \in \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_o| < \delta\}$ con $|f(z) - c| < \epsilon$.*

Demostración: Si se cumple la condición está claro que $\lim_{z \to z_o} \mid f(z) \mid$ no existe ni es ∞ con lo cual la singularidad no es ni removible ni un polo. Supongamos que la condición es falsa. O sea hay un número complejo c, un $\epsilon > 0$, y $0 < \delta \leq \rho$ tales que $|f(z) - c| \geq \epsilon$ para todo z con $0 < |z - z_o| < \delta$. Entonces $\lim_{z \to z_o} |(f(z) - c)/(z - z_o)| = \infty$, por lo cual la función $z \mapsto (f(z) - c)/(z - z_o)$ tiene un polo en z_o. Entonces hay una función analítica g en un entorno de z_o con $g(z_o) \neq 0$ tal que $(f(z) - c)/(z - z_o) = g(z)/(z - z_o)^m$ donde $m \geq 1$ es el orden del polo. Luego, $f(z) = c + g(z)/(z - z_o)^{m-1}$ en el entorno y por ende z_o es removible ($m = 1$) o un polo ($m \geq 2$). $\square$

Los resultados obtenidos o por lo menos mencionados se resumen en el siguiente:

Teorema 9.8 *Si f tiene una singularidad aislada en z_o entonces se tienen la siguientes equivalencias:*

1. *z_o es removible $\iff$ $\lim_{z \to z_o} f(z)$ existe $\iff$ hay una función g analítica en z_o que coincide con f fuera de z_o;*

2. *z_o es un polo $\iff$ $\lim_{z \to z_o} |f(z)| = \infty \iff f(z) = g(z)/(z - z_o)^m$ para $m > 0$ y una función g analítica en z_o con $g(z_o) \neq 0$;*

3. *z_o es una singularidad esencial $\iff$ $|f(z)|$ no es acotado cerca de z_o ni converge a ∞ cuando $z \to z_o$ $\iff$ los valores de $f(z)$ son todos los números complejos con la posible excepción de uno.*

9.5 El Principio del Argumento

Una función a valores complejos definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ se dice **meromorfa** si para todo $z \in D$ f es analítica en z o bien tiene allí un polo. Recordamos que un polo es una singularidad aislada y esto implica que una función meromorfa tiene un número finito de polos en cualquier subsconjunto compacto de su dominio de definición. Esto se desprende del Teorema de Bolzano-Weierstraß. Si $A \subset D$ es compacto y contiene infinitos polos $\{z_n\}$ de f, hay una subsucesión $\{z_{n(k)} : \ k = 1, 2, \cdots\}$ convergente a $z \in A$. f no es analítica en z pues hay polos en todo entorno de z; y z no es una singularidad aislada.

Teorema 9.9 *(Principio del Argumento) Si γ es un camino cerrado simple y f es analítica y no se anula en $[\gamma]$, y f es meromorfa en el dominio D encerrado por $[\gamma]$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_c(f) - N_p(f) \ ,$$

donde $N_c(f)$ y $N_p(f)$ son respectivamente la cantidad de ceros contando su orden y la cantidad de polos contando su orden que hay en D.

Demostración: Si $a \in D$ es un cero de f de orden m entonces $f(z) = (z-a)^m g(z)$ con g analítica y no nula en un entorno de a. Para z en ese entorno

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ . \tag{9.1}$$

Si $b \in D$ es un polo de f de orden m entonces $f(z) = (z-b)^{-m} g(z)$ con g analítica y no nula en un entorno de b; y allí se tiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ . \tag{9.2}$$

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ los distintos ceros de f en D y m_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ sus órdenes respectivos. Sean $b_1, b_2, \cdots, b_p$ los distintos polos de f en D y n_k $(k = 1, 2, \cdots, p)$ sus órdenes respectivos. Aplicando sucesivamente (9.1) y (9.2) obtenemos una función g analítica y sin ceros en $D \cup [\gamma]$ tal que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z-a_k} + \sum_{k=1}^{p} \frac{-n_k}{z-b_k} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ .$$

Por el Teorema de Cauchy-Goursat y la fórmula de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} m_k \int_\gamma \frac{1}{z-a_k}dz - \sum_{k=1}^{p} n_k \int_\gamma \frac{1}{z-b_k}dz + \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

$$= 2\pi i(\sum_{k=1}^{n} m_k - \sum_{k=1}^{p} n_k) \ . \ \square$$

9.5.1 Teorema de Rouché

Teorema 9.10 *Si f y g son analíticas en un abierto D y Γ es un camino cerrado simple con $[\Gamma] \subset D$ y $|f(z)| + |g(z)| > |f(z) - g(z)|$ para todo $z \in [\Gamma]$, entonces f y g no tienen ceros en $[\Gamma]$ y tienen la misma cantidad de ceros (contando multiplicidad) dentro de Γ.*

Demostración: La desigualdad estricta implica que f y g no tienen ceros en $[\Gamma]$. Sean C_f y C_g el número de ceros de f y de g dentro de Γ respectivamente. Tenemos, ya que ni f ni g tienen polos,

$$(1/2\pi i) \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = C_f \quad , \quad (1/2\pi i) \int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = C_g \ .$$

Sea $h(z) = f(z)/g(z)$ que no tiene polos ni ceros en $[\Gamma]$. Para un $z_o \in [\Gamma]$ dado, sea $w = h(z_o)$ entonces $f(z_o) = wg(z_o)$ y por ende $(|w| + 1) \cdot |g(z_o)| = |f(z_o)| + |g(z_o)| > |f(z_o) - g(z_o)| = |w-1| \cdot |g(z_o)|$. Como $g(z_o) \neq 0$, concluimos que $|w|+1 > |w-1|$ o, lo que es lo mismo, $-Re(w) < |w|$. Esto implica que w no es un número real menor o igual que 0. La imagen de $[\Gamma]$ bajo h está contenida en el dominio de analiticidad de la rama principal del logaritmo. Por lo tanto, con $z \mapsto \ell(z) := \mathrm{Log}(h(z))$, se tiene $\ell'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}$ para $z \in [\Gamma]$. Luego,

$$C_f - C_g = (1/2\pi i) \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz - (1/2\pi i) \int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

$$= (1/2\pi i) \int_\Gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = (1/2\pi i) \int_\Gamma \ell'(z) dz = 0 \ . \ \square$$

La desiguladad estricta no se puede relajar a $|f(z)| + |g(z)| \geq |f(z) - g(z)|$ como se ve tomando $g \equiv 0$.

El Teorema de Rouché clásico está formulado con la hipótesis $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$ que es más fuerte ya que ella implica que $|g(z)| \neq 0$ y por ende $|f(z)| + |g(z)| > |f(z)|$[2]. En muchísimas aplicaciones, basta esta hipótesis clásica.

Ejercicio 28 *Demuestre que las raíces de la ecuación $z^6 - 5z^2 + 10 = 0$ están en el anillo $\{z : 1 <| z |< 2\}$.*

Aplicación 1: ¿Soluciones de $f(z) = z$ (puntos fijos)?

[2] La versión de la hipótesis del Teorema de Rouché fué descubierta por T.Esterman (1962) y I. Glicksberg (1976).

1. Sea f analítica en $\overline{D(0;R)}$ y suponga que $|f(z)| > R$ sobre la frontera o sea el círculo. Poniendo $g(z) = f(z) - z$, tenemos $|f(z)| > R = |g(z) - f(z)|$ sobre el círculo y por lo tanto hay tantos puntos fijos $f(z) = z$ en $D(0;R)$ como ceros tiene allí f.

2. Sea f analítica en $\overline{D(0;R)}$ y suponga que $|f(z)| < R$ sobre la frontera de $D(0;R)$, o sea sobre el círculo. Entonces con $h(z) = -z$ y $g(z) = f(z) + h(z)$ tenemos $|h(z)| = R > |f(z)| = |g(z) - h(z)|$ sobre el círculo y luego g tiene tantos ceros como h en $D(0;R)$. Pero 0 es el único cero de h en este disco. Por lo tanto $f(z) = z$ tiene una única solución en este disco.

Aplicación 2: ¿Ceros de f ?

Suponga que f es analítica dentro y sobre un camino cerrado simple Γ, que z_o está dentro del dominio cuya frontera es $[\Gamma]$ y que para $z \in [\Gamma]$, $|f(z)| > |f(z_o)|$, entonces con $g(z) = f(z) - f(z_o)$ se tiene $|f(z)| > |g(z) - f(z)|$ sobre $[\Gamma]$ con lo cual f tiene a lo menos un cero en el dominio encerrado por Γ ya que $g(z_o) = 0$.

Aplicación 3: Teorema fundamental del Álgebra. Considere un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_o$ con $a_n \neq 0$. Sea $g(z) = a_n z^n$ que tiene a 0 como raíz de multiplicidad n. Para $z \neq 0$,

$$\frac{p(z)}{g(z)} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_o}{a_n z^n}$$

y $\lim_{|z|\to\infty} p(z)/g(z) = 1$. Existe entonces $R > 0$ tal que $\mid (p(z)/g(z)) - 1 \mid < 1$ o sea $\mid p(z) - g(z) \mid < \mid g(z) \mid$ para todo z con $\mid z \mid \geq R$. En particular p no puede anularse en z con $\mid z \mid \geq R$. Se satisface la hipótesis del Teorema de Rouché en el círculo de radio R con centro en el origen, y por ende p tiene n ceros en el correspondiente disco abierto.

9.5.2 Teorema del Mapa Abierto

Teorema 9.11 *Si f es analítica y no constante en un dominio D entonces $f(D) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z)$ para algún $z \in D\}$ es abierto.*

Demostración: Demostramos que para todo $w \in f(D)$ hay $\delta > 0$ tal que $D(w;\delta) \subset f(D)$. Sea $z_o \in D$ con $f(z_o) = w$; como D es abierto hay un entorno E de z_o contenido en D. Sea $\phi(z) = f(z) - f(z_o)$; si f no es constante z_o es un cero aislado de ϕ por el Corolario 9.1. Existe entonces $r > 0$ tal que z_o es el único cero de ϕ en $D(z_o;r)$. Sea $0 < r_1 < r$ y $\delta = \min\{\mid \phi(z) \mid : \mid z - z_o \mid = r_1\}$. Entonces $\delta > 0$ pues $\delta = \phi(z_1)$ para algún z_1 con $\mid z_1 - z_o \mid = r_1$. Sea $w' \in D(w,\delta)$ y defina $g(z) = \phi(z) - (w' - w)$; entonces para todo z

con $\mid z - z_o \mid= r_1$ se tiene $\mid \phi(z) \mid\geq \delta >=\mid w - w' \mid=\mid \phi(z) - g(z) \mid$. Por el Teorema de Rouché ϕ y g tienen la misma cantidad de ceros en $D(z_o; r_1)$, por lo cual hay $z \in D(z_o; r_1)$ con $g(z) = 0$ o sea $\phi(z) = w' - w$. Entonces $w' - w = f(z) - f(z_o) = f(z) - w$ o sea que $f(z) = w' \in D(w; \delta)$. Esto completa la demostración. $\square$

9.5.3 Teorema de la función inversa

El siguiente es el resultado general sobre la función inversa a una función analítica . Nuevamente la analiticidad trae consigo consecuencias más fuertes que la diferenciabilidad real. La función real $f(x) = x^3$ es invertible pero su inversa no es diferenciable en 0 ya que $f'(0) = 0$; esto no pasa con funciones analíticas.

Teorema 9.12 *Si f es* analítica *e inyectiva en un abierto Ω entonces f' no tiene ceros y la función inversa g de f es* analítica *en el abierto $f(\Omega)$ con $g'(z) = 1/f'(g(z))$.*

Demostración: Aplicamos el teorema 4.2 para lo cual debemos verificar dos cosas: que g es continua y que f' no tiene ceros.

Suponga que $f'(a) = 0$ para $a \in \Omega$. Ya que f es inyectiva y por ende no constante, f' no puede ser nula en un entorno de a. Existe entonces $r > 0$ tal que $\overline{D(a; r)} \subset \Omega$ y desarrollando a f según Taylor, el término $(z-a)$ no aparece, por lo cual para $z \in \overline{D(a; r)}$ tenemos

$$f(z) = \alpha + \beta(z - a)^m + h(z)$$

donde $f(a) = \alpha$, $0 \neq \beta \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ y la función analítica h en $\overline{D(a, r)}$ es tal que $h(z)/(z - a)^{m+1}$ es analítica . Por compacidad del disco cerrado, existe entonces $K > 0$ tal que

$$\mid h(z) \mid / \mid z - a \mid^{m+1}\leq K$$

para todo $z \in \overline{D(a; r)}$. Definimos $g(z) = \alpha + \beta(z - a)^m$ y elegimos $\rho > 0$ tal que $\rho < \min\{r, \mid \beta \mid /(2K)\}$. Sea γ el círculo de radio ρ alrededor de a. Sea $w = \alpha + \beta\zeta$ con $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ y $\mid \zeta \mid< \rho^m/2$. Entonces para $z \in \gamma$ tenemos, por un lado,

$$\mid (f(z) - w) - (g(z) - w) \mid=\mid f(z) - g(z) \mid=\mid h(z) \mid\leq K \mid z - a \mid^{m+1}= K\rho^{m+1} ;$$

y por otro lado, ya que $\mid \beta \mid /2 > K\rho$,

$$\mid g(z) - w \mid=\mid \beta(z - a)^m - \beta\zeta \mid=\mid \beta \mid\mid (z - a)^m - \zeta \mid\geq\mid \beta \mid (\mid z - a \mid^m - \mid \zeta \mid)$$

$$=\mid \beta \mid (\rho^m - \mid \zeta \mid) > \mid \beta \mid \rho^m/2 > K\rho^{m+1} \ .$$

Se satisfacen las hipótesis del Teorema de Rouché, con lo cual $g(z) - w$ y $f(z) - w$ tienen la misma cantidad de ceros en $D(0, \rho)$. Ahora, $g(z) - w = 0$ es equivalente a $(z - a)^m = \zeta$ o sea $z = a + \eta$ con $\eta^m = \zeta$; pero como $m \geq 2$ hay por lo menos dos m-ésimas raíces de ζ distintas η_1 y η_2. Para ambas se tiene $\mid \eta_1 \mid = \mid \eta_2 \mid = \mid \zeta \mid^{1/m} < \rho/2$ con lo cual $z_{1,2} = a + \eta_{1,2} \in D(a; \rho)$. Entonces $f(z) = w$ también tiene a lo menos dos soluciones en $D(a; \rho)$ lo que contradice la inyectividad de f. Por lo tanto f' no se anula en Ω.

Veamos la continuidad de la función inversa g definida en $f(\Omega)$. Sea $w \in f(\Omega)$ y $\epsilon > 0$ tal que $D(g(w); \epsilon) \subset \Omega$. Tenemos $f(D(g(w); \epsilon)) = \{\zeta \in f(\Omega) : \mid g(\zeta) - g(w) \mid < \epsilon\}$. Ya que $\omega \in f(D(g(w); \epsilon))$, el Teorema del Mapa Abierto aplicado al abierto $D(g(w); \epsilon)$ indica la existencia de $\delta > 0$ tal que $D(w, \delta) \subset f(D(g(w); \epsilon))$, vale decir que si $\mid w' - w \mid < \delta$ entonces $\mid g(w') - g(w) \mid < \epsilon$.

El resto de las afirmaciones es consecuencia del Teorema 4.2. $\square$

Ejercicio 29 *Dé un ejemplo de una función* analítica *no inyectiva cuya derivada no tenga ceros.*

Capítulo 10

Residuos

Considere una función f con una singularidad aislada en z_o, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ su serie de Laurent alrededor de z_o, y Γ un camino cerrado simple que encierra a la singularidad. La serie de Laurent se puede integrar término a término en virtud de su convergencia uniforme con lo cual

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_\Gamma (z-z_o)^n dz \ .$$

La única integral que no se anula corresponde a $n=-1$ (su valor es $2\pi i$) ya que las demás se anulan en virtud de que $(z-z_o)^n$ tiene una primitiva fuera de z_o para $n \neq 1$ y Γ es cerrado. Luego,

$$\int_\Gamma f(z) = 2\pi i a_{-1} \ .$$

Si f tiene una singularidad aislada en z_o se llama **residuo de f en** z_o, anotado $Res(f;z_o)$ al coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent de f alrededor de z_o. Si la singularidad aislada es removible, su residuo se anula. Si z_o es un polo de orden m, entonces $f(z) = (z-z_o)^{-m}g(z)$ con g analítica en un entorno de z_o. En tal caso es inmediato verificar que el residuo es igual a $(1/(m-1)!)g^{(m-1)}(z_o)$, o sea: si z_o es un polo de orden m de f

$$\boxed{Res(f;z_o) = \text{lím}_{z\to z_o} \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_o)^m f(z)\right]\right)} \ . \qquad (10.1)$$

Si, por ejemplo, f es analítica en z_o y g tiene un cero de orden 1 en z_o entonces f/g tiene un polo de orden 1 en z_o y

$$\boxed{Res(f/g;z_o) = f(z_o)/g'(z_o)} \ .$$

Esto se desprende de la aplicación de la fórmula (10.1) con $m=1$, y del hecho que $g(z) = g'(z_o)(z-z_o) + h(z)$ con $h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} g^{(n)}(z_o)(z-z_o)^n$y $g'(z_o) \neq 0$:

$$Res(f/g;z_o) = \lim_{z\to z_o}(z-z_o)\frac{f(z)}{g'(z_o)(z-z_o)+h(z)} = \lim_{z\to z_o}\frac{f(z)}{g'(z_o)+[h(z)/(z-z_o)]} = \frac{f(z_o)}{g'(z_o)} \ .$$

De manera análoga se obtiene, en el caso en que g tiene un cero de orden 2 en z_o la fórmula (se tiene entonces $g''(z_o) \neq 0$):

$$\boxed{Res(f/g; z_o) = \frac{2f'(z_o)}{g''(z_o)} - \frac{2f(z_o)g'''(z_o)}{3(g''(z_o))^2}} \ .$$

Ejercicio 30 *Determine los residuos de las siguientes funciones en sus respectivas singularidades:*

$$\tanh(z) \ , \quad e^{z+(1/z)} \ , \quad (\text{Log}(z))^n/(z^2+1) \ , \quad e^{az}/(1+e^{bz}) \ \textit{con } a, b \textit{ reales} \ .$$

El siguiente resultado es sumamente útil para calcular integrales reales como veremos

Teorema 10.1 *(Teorema de los residuos) Si Γ es un camino cerrado simple orientado positivamente y f es analítica dentro y sobre Γ excepto en finitos puntos $z_1, z_2, \cdots, z_n$ que se encuentran dentro del dominio encerrado por Γ,*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f; z_j) \ .$$

Demostración: Sean h_k las partes singulares de f en z_k, $k = 1, 2, \cdots, n$. La función $g = f - h_1 - h_2 - \cdots - h_n$, tiene singularidades removibles en cada uno de los n puntos $z_1, z_2, \cdots, z_n$. ¿Por qué? En un entorno pinchado de z_k lo suficientemente pequeño se tiene:

- $f(z) = h_k(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(z - z_k)^n$ donde la serie es la parte no singular de la serie de Laurent de f alrededor de z_k que es convergente en el entorno completo (i.e., inclusive en $z = z_k$). Luego $\lim_{z \to z_k}(f(z) - h_k(z)) = a_0^{(k)}$.

- Para todo $\ell \in \{1, 2, \cdots, n\}$ con $\ell \neq k$, $h_\ell(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(\ell)}(z - z_\ell)^{-j}$ donde la serie converge uniformemente en el entorno completo y es analítica en él. Esto se debe a que la parte singular h_ℓ de la serie de Laurent de f alrededor de z_ℓ converge uniformemente fuera de cualquier disco de radio no nulo alrededor de z_ℓ.

Por lo tanto, $\lim_{z \to z_k} g(z) = a_0^{(k)} + \sum_{j=1, \, j \neq k}^{n} h_j(z_k)$. Ya que las singularidades de g en $z_1, z_2, \cdots, z_n$ son removibles y no están sobre Γ, se tiene

$$0 = \int_\Gamma g(z)dz = \int_\Gamma f(z) - \sum_{k=1}^{n} \int_\Gamma h_k(z)dz \ .$$

Pero, $\int_\Gamma h_k(z)dz = 2\pi i Res(h_k; z_k) = 2\pi i Res(f; z_k)$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$ y esto completa la demostración. $\square$

<u>Otra variante</u>: Sea D el dominio encerrado por Γ. Construya n círculos C_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, de modo que: cada C_k esté orientado negativamente, centrado en z_k y los n círculos no se tocan entre sí y están dentro de D. Una Γ al círculo C_1 por medio de una poligonal γ_1 en D que no toca ninguno de los demás círculos; luego una C_1 a C_2 por medio de una poligonal γ_2 en D que no toque a ninguno de los demás círculos; etc., etc., por fin una C_n a Γ por medio de un segmento de recta γ_n en D que no toque a ninguno de los demás círculos. Convénzase de que esta construcción es posible de tal manera que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ donde Γ_1 y Γ_2 son caminos cerrados simples orientados positivamente armados a partir de Γ, los círculos C_k y las poligonales γ_k, de tal modo que ni Γ_1 ni Γ_2 encierran algún z_k. Luego, verifique que

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz \ .$$

Por último, observe que $\int_{C_k} f(z)dz = -2\pi i Res(f; z_k)$.

10.1 Integrales de funciones trigonométricas sobre $[0, 2\pi]$

Considere la integral

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{F}(\cos(\phi), \sin(\phi))d\phi$$

donde $\widetilde{F}$ es una función racional de dos variables (reales en el intervalo $[-1, 1]$). Definiendo $z = e^{i\phi}$, tenemos

$$\cos(\phi) = (z + z^{-1})/2 \ , \quad \sin(\phi) = (z - z^{-1})/(2i) \ ,$$

con lo que la integral se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{F}(\cos(\phi), \sin(\phi))d\phi = \ -i \int_{\{z \in \mathbb{C}: \ |z|=1\}} F(z)dz \ ,$$

donde

$$F(z) := z^{-1}\widetilde{F}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \ .$$

La función F es racional y si tiene singularidades, éstas son aisladas y removibles o bien polos. Por el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{F}(\cos(\phi), \sin(\phi)) = 2\pi \sum Res(F; z_k) \ ,$$

donde la suma es sobre los polos z_k de F dentro del círculo de radio 1.

10.2 Integrales impropias de funciones sobre la recta real

Si f es una función continua definida para una variable real x las integrales impropias se definen, por ejemplo, via:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx \ ;$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^b f(x)dx \ ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx \ + \ \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx \ .$$

En el último caso, si ambos límites existen se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \ ,$$

aunque en general este último límite puede existir sin que existan los dos límites anteriores (e.g., para una función impar). Se define el **valor principal** (según Cauchy) como

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \ . \tag{10.2}$$

Del mismo modo, si f tiene una singularidad en x_o en el intervalo $[a, b]$, el **valor principal** de la integral de f sobre $[a, b]$ se define como:

$$p.v. \int_a^b f(x)dx = \lim_{0<\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_o-\epsilon} f(x)dx \ + \ \int_{x_o+\epsilon}^b f(x)dx \right) \ , \tag{10.3}$$

cuando el límite, que puede ser $\pm\infty$, existe. Nótese que el límite se toma simétricamente alrededor de la singularidad. Aquí, nuevamente, si ambas integrales impropias

$$\int_a^{x_o} f(x)dx = \lim_{0<\epsilon\to 0} \int_a^{x_o-\epsilon} f(x)dx \ ,$$

$$\int_{x_o}^{b} f(x)dx = \lim_{0<\epsilon\to 0} \int_{x_o+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

existen y son finitas, entonces

$$p.v. \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_o} f(x)dx + \int_{x_o}^{b} f(x)dx \ .$$

Pero, no es cierto de que de la finitud del valor principal, se pueda deducir que las integrales indefinidas existen y son finitas.

Las integrales impropias en general – con singularidades y fronteras infinitas – se obtienen combinando ambos casos y con ellas se asocia un valor principal; por ejemplo

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{R\to\infty\,,\,\epsilon\to 0\,,\,\delta\to 0} \left(\int_{-R}^{-1-\delta} + \int_{-1+\delta}^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{R} \right) \frac{dx}{1-x^2} \ .$$

Supongamos que queremos calcular el valor principal (10.2) para una función f. Supongamos que encontramos una función F analítica en el semiplano superior cerrado $\{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) \geq 0\}$ salvo en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \cdots, z_n$ en el semiplano superior abierto. Supongamos también que $F(x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Para un $R > 0$, considere el camino cerrado simple Γ_R formado por: $\gamma_R = \{z(x) = x : \ -R \leq x \leq R\}$ (el segmento de la recta real entre los puntos $-R$ y R) y $C_R^+ = \{z(t) = Re^{it} : \ 0 \leq t \leq \pi\}$ (el semicírculo superior de radio R). Podemos elegir R lo suficientemente grande tal que las n singularidades en el plano superior abierto estén contenidas en el dominio encerrado por Γ_R. Luego,

$$\int_{\Gamma_R} F(z)dz = \int_{\gamma_R} F(z(x))dx \ + \ iR\int_0^{\pi} F(Re^{it})e^{it}dt = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(F; z_k) \ .$$

Entonces,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{\gamma_R} F(z(x))dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(F; z_k) \ - \ iR\int_0^{\pi} F(Re^{it})e^{it}dt \ .$$

Si logramos demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} R\int_0^{\pi} F(Re^{it})e^{it}dt = 0 \ , \tag{10.4}$$

obtenemos la fórmula

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(F; z_k) \ . \tag{10.5}$$

Un caso práctico es el siguiente

Lema 10.1 *Si $f(z) = P(z)/Q(z)$ es cociente de dos polinomios tal que el grado de Q es mayor o igual al grado de P más 2, entonces (10.4) se cumple y por ende (10.5) es válida.*

<u>Demostración</u>: La relación entre los grados de los polinomios implica que para R lo suficientemente grande, $|f(Re^{it})| \leq MR^{-2}$ para una constante positiva M. Luego,

$$\left| R \int_0^\pi F(Re^{it})e^{it}dt \right| \leq MR^{-1}\pi \ ,$$

y (10.4) se satisface. $\square$

10.3 Integrales impropias de funciones trigonométricas – Lema de Jordan

Considere las integrales impropias $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(cx)dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(cx)dx$, que serán parte real e imaginaria respectivamente de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}dx$ que es la **transformada de Fourier** de f. Si f satisface las condiciones del Lema anterior, es inmediato verificar que se cumple (10.4) y por ende (10.5). El siguiente resultado permite ganar una potencia en el numerador

Lema 10.2 *(Lema de Jordan) Si $a > 0$ entonces*

$$\int_0^\pi e^{-a\sin(\phi)}d\phi \ < \ \pi/a \ .$$

<u>Demostración</u>: la función $[0, \pi] \ni \phi \mapsto \sin(\phi)$ es cóncava (ver figura 1)
Esto se ve, por ejemplo, observando que la segunda derivada es $-\sin(\phi)$ y que esto toma valores no positivos en el intervalo. La concavidad indica que el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera del gráfico $\{(\phi, \sin(\phi) : \ 0 \leq \phi \leq \pi\}$ está siempre por debajo de la curva. Tomando el segmento de recta que une $(0, 0)$ con $(\pi/2, 1)$ – determinado por la ecuación $y(\phi) = \frac{1}{\pi/2}\phi$ – tenemos $\sin(\phi) \geq 2\phi/\pi$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Al ser $a > 0$ y exp una función monótona creciente, tenemos $\exp(-a\sin(\phi)) \leq \exp(-2a\phi/\pi)$. Luego,

$$\int_0^\pi e^{-a\sin(\phi)}d\phi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-a\sin(\phi)}d\phi \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2a\phi/\pi}d\phi = 2\frac{-\pi}{2a}\left(e^{-a} - 1\right) < \pi/a \ ,$$

ya que $1 - e^{-a} < 1$.

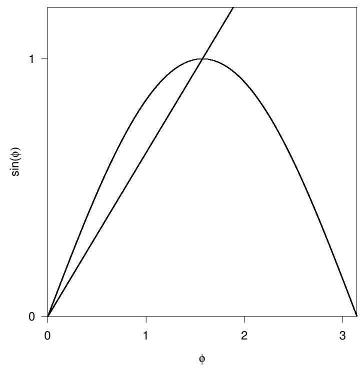


Figura 10.1:

Lema 10.3 *Si P/Q es el cociente entre dos polinomios tal que el grado de Q es mayor o igual al de P más 1 entonces*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} e^{icz}\frac{P(z)}{Q(z)} = 0$$

para todo $c > 0$.

Demostración: Tenemos

$$\int_{C_R^+} e^{icz}\frac{P(z)}{Q(z)} = iR\int_0^\pi \exp\left(icRe^{i\phi}\right)\frac{P\left(Re^{i\phi}\right)}{Q\left(Re^{i\phi}\right)}e^{i\phi}d\phi\ .$$

La condición sobre los grados indica que

$$\left|\frac{P\left(Re^{i\phi}\right)}{Q\left(Re^{i\phi}\right)}\right| \le MR^{-1}$$

para R lo suficientemente grande y una constante positiva M. Ya que

$$\left|\exp\left(icRe^{i\phi}\right)\right| = \exp(-cR\sin(\phi))\ ,$$

obtenemos

$$\left|\int_{C_R^+} e^{icz}\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le M\int_0^\pi e^{-cR\sin(\phi)}d\phi$$

y una aplicación del lema de Jordan conduce al resultado. □

Observe que si uno trabaja en el semiplano inferior entonces, para $a < 0$,

$$\left| \int_0^{-\pi} e^{-a\sin(\phi)} d\phi \right| < \pi/|a| \; .$$

10.4 Integración alrededor de una singularidad real

Esta técnica nos permitirá el cálculo de integrales reales impropias de funciones reales que son continuas salvo en un número finito de puntos. Como en el caso ya visto donde no hay discontinuidades, el método de los residuos nos permite calcular el valor principal.

Sea f una función de una variable real continua salvo en un punto x_o. El valor principal de la integral de f es

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty\,,\,\epsilon\to 0^+} \left(\int_{-R}^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^{R} f(x)dx \right)$$

cuando el límite existe. Muchas veces algún argumento permite deducir la existencia de la integrales impropias

$$\int_{x_o}^{\infty} f(x)dx \;\; , \quad \int_{-\infty}^{x_o} f(x)dx$$

y, en tal caso, la suma de estas integrales es el valor principal de la integral de f.

Considere entonces una función f analítica en el semiplano superior cerrado $\{z \in \mathbb{C} \,:\, Im(z) \geq 0\}$ salvo en un polo simple x_o que es real y en un número finito de singularidades aisladas dentro del semiplano superior abierto $\{z \in \mathbb{C} \,:\, Im(z) > 0\}$. Para $0 < \epsilon < R$, considere el camino cerrado simple $\Gamma_{R,\epsilon}$ orientado positivamente formado por: el semicírculo superior C_R^+ de radio R alrededor de x_o, el segmento del eje real comprendido entre $-R$ y $x_o - \epsilon$, el semicírculo superior C_ϵ^+ de radio ϵ alrededor de x_o y el segmento del eje real comprendido entre $x_o + \epsilon$ y R. Entonces

$$\int_{-R}^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^{R} f(x)dx = \int_{\Gamma_{R,\epsilon}} f(z)dz - \int_{C_R^+} f(z)dz - \int_{C_\epsilon^+} f(z)dz$$

$$= 2\pi i\,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma_{R,\epsilon})$$

$$- \int_{C_R^+} f(z)dz - \int_{C_\epsilon^+} f(z)dz \; .$$

Cuando R es lo suficientemente grande y ϵ lo suficientemente chico $\Gamma_{R,\epsilon}$ encierra todos las singularidades de f en el semiplano superior abierto. Ya hemos establecido técnicas para garantizar que la integral sobre C_R^+ se anula cuando $R \to \infty$. Nos falta estimar la integral sobre C_ϵ^+ para ϵ chico. El siguiente resultado permite hacer justamente esto

Lema 10.4 *Si z_o es un polo simple de f; si $r > 0$ y $A_r = \{z(t) = z_o + re^{it} \ : \ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}$ es el arco del círculo de radio r alrededor de z_o comprendido entre los ángulos θ_1 y θ_2, entonces*

$$\lim_{r\to 0} \int_{A_r} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Res(f; z_o) \ .$$

Demostración: El desarrollo de Laurent de f alrededor de z_o es $f(z) = a_{-1}(z - z_o)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ en algún entorno pinchado de z_o. Eligiendo $r > 0$ tal que el arco A_r caiga dentro del entorno, podemos integrar término a término por la convergencia uniforme de la serie. Entonces

$$\int_{A_r} f(z)dz = a_{-1} \int_{A_r} \frac{1}{z - z_o} dz + \int_{A_r} g(z)dz \ ,$$

donde g es la suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ que es analítica en todo el entorno de z_o. La función g es de módulo acotado en A_r ya que es analítica en todo el entorno. Luego

$$\left| \int_{A_r} g(z)dz \right| \leq M \ . \ (\text{ largo del arco } A_r \ ) = Mr(\theta_2 - \theta_1) \ ,$$

y el miembro derecho de la desigualdad tiende a 0 para $r \to 0$. Por otro lado,

$$\int_{A_r} \frac{1}{z - z_o} dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} dt = i(\theta_2 - \theta_1) \ . \ \square$$

Aplicando este resultado a la integral sobre el semicírculo superior C_ϵ^+, obtenemos ($\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon^+} f(z)dz = -i\pi Res(f; z_o) \ .$$

Un ejemplo concreto: $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} = \ ?$ Aquí $f(z) = e^{iz}/z$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y 0 es un polo simple. Tomando el camino $\Gamma_{R,\epsilon}$ (que no encierra ninguna singularidad de f), la integral sobre C_ϵ^+ da

$$-i\pi Res(f; 0) = -i\pi \lim_{z\to 0} e^{iz} = -i\pi$$

en el límite $\epsilon \to 0$. El Lema 3 indica que (use $P(z) = 1$, $Q(z) = z$) la integral sobre C_R^+ se anula en el límite $R \to \infty$. Por lo tanto,

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = -(-i\pi) = i\pi \ .$$

Tomando las partes real e imaginaria, obtenemos $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = 0$ lo que no sorprende puesto que el integrando es impar [1]; y $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$. [2]

[1]Obsérvese que $\frac{\cos(x)}{x} \sim (1/x)$ para $x \sim 0$ y por ende la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ no existe.

[2]Obsérvese que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ y que el integrando es par; luego podemos deducir que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi/2$.

Otro ejemplo: $p.v. \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ =?. La fórmula elemental de integración (indefinida)

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = (1/2)\log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

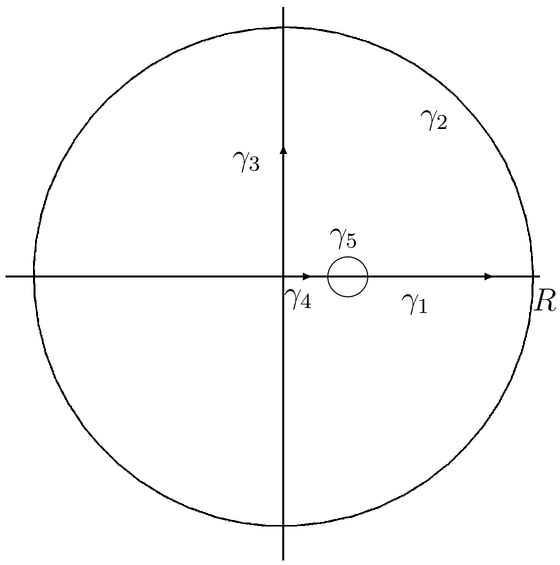
permite verificar inmediatamente que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \infty \ , \quad \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2} dx = -\infty \ .$$

Sin embargo veremos que el valor principal se anula. Tenemos

$$p.v. \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{0<\epsilon\to 0\,,\, 0<R\to\infty} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\epsilon}^R \frac{dx}{1-x^2} \right) \ .$$

Considerando la función $f(z) = 1/(1-z^2)$ que es analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo en $z = \pm 1$ donde tiene sendos polos simples y el camino $\gamma(\epsilon, R) = \gamma_1(\epsilon, R) + \gamma_2(R) + (-\gamma_3(R)) + \gamma_4(\epsilon) + \gamma_5(\epsilon)$ con



$$\gamma_1(\epsilon, R) = \{z_1(t) = t : \ 1+\epsilon \le t \le R\} \ , \ \ \gamma_2(R) = \{z_2(t) = Re^{it} : \ 0 \le t \le \pi/2\} \ ,$$

$$\gamma_3(R) = \{z_3(t) = it : \ 0 \le t \le R\} \ , \ \ \gamma_4(\epsilon) = \{z_4(t) = t : \ 0 \le t \le 1-\epsilon\} \ ,$$

$$\gamma_5(\epsilon) = \{z_5(t) = 1 + \epsilon e^{it} : \ \pi \ge t \ge 0\} \ ,$$

donde $0 < \epsilon < 1 < R$, se tiene:

$$\int_{\gamma_1(\epsilon,R)} f(z)dz = \int_{1+\epsilon}^R f(x)dx \ , \quad \int_{\gamma_4(\epsilon)} f(z)dz = \int_0^{1-\epsilon} f(x)dx \ ,$$

$$\left|\int_{\gamma_2(R)} f(z)dz\right| = \left|iR\int_0^{\pi/2} \frac{e^{it}}{1-R^2e^{2it}}dt\right| \leq \frac{R(\pi/2)}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

$$\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = i\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} \ .$$

La última integral puede calcularse con la fórmula de integración indefinida

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$$

para obtener

$$\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = i\arctan(R) \ .$$

Luego,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = i\pi/2 \ .$$

Usando el Lema 10.4, se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_5(\epsilon)} f(z)dz = i(0-\pi)Res(f;1) \ .$$

Además,

$$Res(f;1) = -1/2 \ .$$

Entonces, observando que f es analítica dentro y sobre γ, obtenemos

$$0 = \int_\gamma f(z)dz$$

para todo ϵ, R que satisfagan las condiciones impuestas; y por lo tanto

$$p.v.\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty\, ,\ \epsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_1(\epsilon,R)} + \int_{\gamma_4(\epsilon)}\right) f(z)dz$$

$$= \lim_{R\to\infty\, ,\ \epsilon\to 0}\left(\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_2(R)} f(z)dz + \int_{\gamma_3(R)} f(z)dz - \int_{\gamma_5(\epsilon)} f(z)dz\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2(R)} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_5(\epsilon)} f(z)dz$$

$$= 0 + (i\pi/2) - (i\pi/2) = 0 \ .$$

10.5 Integración a lo largo de un corte de ramificación

Estudiamos un ejemplo particular que ilustra las ideas básicas. Considere $f(z) = z^\alpha g(z)$ donde α es un número real no entero, y g es (por ejemplo) una función racional (i.e., analítica salvo en polos) sin singularidades en el eje real no negativo. Queremos calcular la integral impropia

$$\int_0^\infty x^\alpha g(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+\ ,\ R\to\infty} \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx \ .$$

Para definir z^α debemos elegir un rama analítica, por ejemplo

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log(|z|) + i\alpha\theta) \ \ , \ \ z = |z|e^{i\theta} \ , \ \ 0 < \theta < 2\pi \ ,$$

con corte de ramificación en el eje real no negativo. Tomemos los caminos $\gamma^+ = \{z = x : \epsilon \leq x \leq R\}$ y $\gamma^- = \{z = x \ : \ R \geq x \geq \epsilon\}$. Definamos,

$$f^+(z) = x^\alpha g(x) \ \ , \quad z = x \in \gamma^+ \ ;$$

$$f^-(z) = e^{i\alpha 2\pi} x^\alpha g(x) \ \ , \quad z = x \in \gamma^- \ .$$

Esto corresponde a tomar el límite de $f(z)$ para $z \to x$ (≥ 0) con parte imaginaria positiva (o sea desde el semiplano superior) o bien con parte imaginaria negativa (o sea desde el semiplano inferior):

$$f^\pm(x) = \lim_{z\to x\ ,\ \pm Im(z)>0} f(z) \ .$$

Nótese que

$$\int_{\gamma^+} f^+(z)dz = \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx \ ;$$

$$\int_{\gamma^-} f^-(z)dz = \ -\,e^{i\alpha 2\pi} \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx \ .$$

Para poder usar el método de los residuos queremos un camino cerrado Γ formado a partir de los caminos cerrados $\gamma^\pm$. Sea C_R el círculo de radio R alrededor de 0 orientado positivamente, y C_ϵ el círculo de radio ϵ orientado negativamente. Entonces $\Gamma = C_R + \gamma^- + C_\epsilon + \gamma^+$ forma un camino cerrado (que no es simple ya que $\gamma^\pm$ son los mismos caminos recorridos en sentido inverso).

Definimos la "integral de f sobre Γ" por:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \left(\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon}\right) f(z)dz + \int_{\gamma^+} f^+(z)dz + \int_{\gamma^-} f^-(z)dz \ ,$$

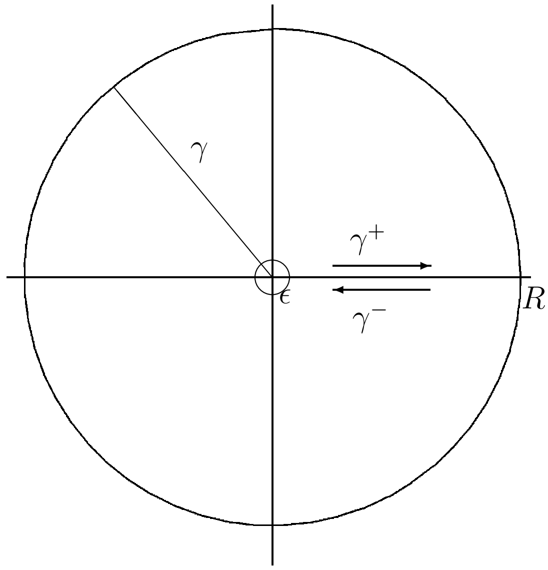


Figura 10.2:

y obtenemos la siguiente fórmula para la integral real que nos interesa:

$$(1 - e^{i\alpha 2\pi}) \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx = \int_\Gamma f(z)dz - \left(\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z)dz \, .$$

Por ahora no podemos decir nada sobre las integrales $\int_{C_R(C_\epsilon)} f(z)dz$ salvo que están bien definidas pues en estos círculos la función f es continua salvo en $z = R$ y en $z = \epsilon$ respectivamente pero los límites de f en estos puntos tomados por los círculos desde arriba o abajo existen (aunque son distintos).

Elijamos ahora un segmento de recta γ que une ambos círculos dado por $\gamma = \{re^{i\theta_o} : \epsilon \le r \le R\}$ con θ_o tal que $\pi/2 < \theta_o < \pi$. Consideremos el camino cerrado simple orientado positivamente Γ_1 definido así: de $z = R$ por C_R hasta el punto $Re^{i\theta_o}$, luego por $-\gamma$ hasta el punto $\epsilon e^{i\theta_o}$; de allí por el semicírculo superior de C_ϵ hasta ϵ y luego por γ^+ hasta R. Sea $f_1(z) = g(z)\exp(\alpha \mathrm{Log}(z)) = g(z)\exp(\alpha \log(|z|) + i\alpha \mathrm{Arg}(z)$ definida usando la rama principal del logaritmo que tiene al eje real no positivo como corte de ramificación. Tenemos,

- $f(z) = f_1(z)$ para todo z en el dominio encerrado por Γ_1;
- $f(z) = f_1(z)$ sobre $\Gamma_1 \setminus \gamma^+$ y $f_1(z) = f^+(z)$ sobre γ^+;
- f_1 es analítica en el dominio encerrado por Γ_1 y sobre Γ_1 salvo en un número finito de puntos (singularidades de g) que eligiendo a R lo suficientemente grande, a ϵ lo suficientemente chico, y a θ_o convenientemente no caen sobre Γ_1.

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z) = 2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma_1)\ . \tag{10.6}$$

Consideremos ahora el camino cerrado simple orientado positivamente Γ_2 definido así: de $z = R$ por γ^- hasta $z = \epsilon$, de allí por el semicírculo inferior de C_ϵ hasta $z = \epsilon e^{i\theta_o}$, luego por γ hasta $z = Re^{i\theta_o}$ y de allí por C_R hasta $z = R$. Sea $f_2(z) = g(z)\exp(\alpha\log(|z|) + i\alpha\phi)$ donde $z = |z|e^{i\phi}$ con $\pi/2 < \phi < 5\pi/2$. El corte de ramificación es el semieje imaginario superior. Nuevamente,

- $f(z) = f_2(z)$ para todo z en el dominio encerrado por Γ_2;
- $f(z) = f_2(z)$ sobre $\Gamma_2 \setminus \gamma^-$ y $f_2(z) = f^-(z)$ sobre γ^-;
- f_2 es analítica en el dominio encerrado por Γ_2 y sobre Γ_2 salvo en un número finito de puntos (singularidades de g) que eligiendo a R lo suficientemente grande, a ϵ lo suficientemente chico, y a θ_o convenientemente no caen sobre Γ_2.

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_2} f_2(z) = 2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma_2)\ . \tag{10.7}$$

Eligiendo ahora R, ϵ y θ_o de tal manera que las fórmulas (10.6) y (10.7) sean correctas, tenemos

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z)dz = 2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro de los dominios encerrados por } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_2)\ .$$

Pero por construcción la suma de las integrales en el miembro izquierdo de esta igualdad son precisamente la integral de f sobre Γ ya que $f_1(z) = f_2(z)$ sobre γ y $-\gamma$. Por lo tanto,

$$(1 - e^{i\alpha 2\pi}) \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx = -\left(\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon}\right) f(z)dz$$
$$+2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma)\ .$$

Si podemos demostrar que las integrales a la derecha de esta igualdad se anulan para $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ hemos obtenido una fórmula para la integral buscada.

Veamos la aplicación a un ejemplo concreto: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}dx = ?$, para $a > 0$. En este caso $f(z) = z^{-1/2}g(z)$ con $g(z) = 1/(z+a)$ que tiene un polo simple en $z = -a$. Todo lo dicho y considerado es aplicable así que debemos estimar las integrales sobre C_R y C_ϵ. Se tiene, para $R > a$ y $0 < \epsilon < a$,

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|i\sqrt{R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it/2}}{Re^{it}+a}dt\right| \leq 2\pi\frac{\sqrt{R}}{R-a} \ ;$$

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(z)dz\right| = \left|i\sqrt{\epsilon}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it/2}}{\epsilon e^{it}+a}dt\right| \leq 2\pi\frac{\sqrt{\epsilon}}{a-\epsilon} \ ;$$

de donde se deduce que las integrales se anulan en los límites $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$. El residuo en $-a$ es $Res(f; -a) = \lim_{z\to a}(z+a)f(z) = (-a)^{-1/2} = \exp((-1/2)\log(a) - i\pi/2) = -i/\sqrt{a}$, con lo que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \ , \quad a > 0 \ .$$

10.6 Sumas de series infinitas

Ya que el seno tiene ceros simples en $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, la función $z \mapsto \cot(\pi z) = \cos(\pi z)/\operatorname{sen}(\pi z)$ es analítica salvo en los puntos $n \in \mathbb{Z}$ donde tiene polos simples. Para calcular los correspondientes residuos partimos del desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen}(\pi z)$ alrededor de n

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \sum_{k\geq 0} \pi^{2k+1}(-1)^k \cos(n\pi)(z-n)^{2k+1} = \pi\cos(n\pi)(z-n)\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}(-1)^k(z-n)^{2k} \ ,$$

que se obtiene inmediatamente calculando las derivadas sucesivas de $\operatorname{sen}(\pi z)$. Por lo tanto,

$$Res(\cot(\pi z); n) = 1/\pi \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

y si f es analítica en n

$$Res(\pi f(z)\cot(\pi z); n) = f(n) \ .$$

El Teorema de los residuos nos dará una relación entre la integral de $\pi f(z)\cot(z)$ sobre un camino cerrado simple y la suma $\sum f(n)$ que se extiende sobre los enteros encerrados por el camino.

Lema 10.5 *Sea Q_N, $1 \leq N \in \mathbb{N}$, el perímetro del rectángulo de vertices $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1-i)$, y $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$ recorridos en ese orden que lo orienta positivamente. Entonces*

$$\mid \pi\cot(\pi z) \mid \leq \pi/(\tanh(\pi/2)) \ ,$$

para todo $z \in [Q_N]$.

Demostración: Usaremos las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas complejas $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$, y $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\operatorname{sen}(z_2) + \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2)$; además $\cos(iz) = \cosh(z)$ y $\operatorname{sen}(iz) = i\sinh(z)$. Ponemos $k = N + 1/2$ y recordamos que $\cos(\pi k) = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi k) = (-1)^N$.
Para los lados verticales de Q_N, $[k(1-i), k(1+i)]$ y $[k(-1+i), k(-1-i)]$ tenemos $z = \pi k(1 \mp it)$ con $1 \geq t \geq -1$ y entonces

$$\cos(\pi k \mp ikt) = \cos(\pi k)\cosh(\pi kt) \pm i\operatorname{sen}(\pi k)\sinh(\pi kt) = \pm i(-1)^N \sinh(\pi kt) ,$$

$$\operatorname{sen}(\pi k \mp ikt) = \operatorname{sen}(\pi k)\cosh(\pi kt) \mp i\cos(\pi k)\sinh(\pi kt) = (-1)^N \cosh(\pi kt) ,$$

luego

$$\mid \cot(\pi k(1 \mp it)) \mid = \mid \tanh(\pi kt) \mid < 1 .$$

Para los lados horizontales $[k(1+i), k(-1+i)]$ y $[k(-1-i), k(-1+i)]$ tenemos $z = \pm ik \pm kt$ con $1 \geq t \geq -1$. Luego

$$\mid \cos(\pm i\pi k \pm k\pi t) \mid = \frac{1}{2} \mid e^{\mp\pi k \pm ik\pi t} + e^{\pm\pi k \mp ik\pi t} \mid \leq \frac{1}{2}(\mid e^{\mp\pi k} \mid + \mid e^{\pm\pi k} \mid) = \cosh(\pi k) ,$$

y

$$\mid \operatorname{sen}(\pm i\pi k \pm k\pi t) \mid = \frac{1}{2} \mid e^{\mp\pi k \pm ik\pi t} - e^{\pm\pi k \mp ik\pi t} \mid \geq \frac{1}{2} \mid \mid e^{\mp\pi k} \mid - \mid e^{\pm\pi k} \mid \mid = \sinh(\pi k) .$$

Por lo tanto,

$$\mid \cot(\pm\pi k(t+i)) \mid \leq \mid 1/\tanh(\pi k) \mid < 1/\tanh(\pi/2) ,$$

pues la tangente hiperbólica es creciente. Ya que $\tanh(\pi/2) = (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) < 1$, hemos demostrado la cota. $\square$

Escribimos $q(z) = \pi\cot(\pi z)$, $z \notin \mathbb{Z}$.

Lema 10.6 *Suponga que f es* analítica *en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de polos y que* $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. *Existe entonces $1 \leq N_o \in \mathbb{N}$ tal que $[Q_N]$ no contiene ningún polo de f y se tiene*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{Q_N} f(z)q(z)dz = 0 .$$

Demostración: Está claro que si $z \in [Q_N]$ entonces $\mid z \mid \leq (N + 1/2)$; con lo cual basta tomar N_o mayor que el módulo máximo de los polos de f. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo z con $\mid z \mid > R$ se tiene $\mid zf(z) \mid < (\epsilon\tanh(\pi/2)/8\pi)$.

Entonces, para todo $N > \max(N_o + \frac{1}{2}, R)$ se tiene observando que el perímetro de Q_N es $\ell(Q_N) = 8(N + 1/2)$,

$$\mid \int_{Q_N} f(z)q(z)dz \mid \leq \int_{Q_N} \mid q(z)f(z) \mid \mid dz \mid$$

$$\leq \frac{\pi}{\tanh(\pi/2)} \frac{\epsilon \tanh(\pi/2)}{8\pi} \int_{Q_N} \mid z \mid^{-1} \mid dz \mid < \frac{\epsilon}{8} \frac{1}{N+1/2} \ell(Q_N) = \epsilon \; . \; \Box$$

Teorema 10.2 *Sea* f analítica *en* $\mathbb{C}$ *salvo en un número finito de polos* P*, y suponga que* $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. *Entonces*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus P} f(n) = -\sum_{z \in P} Res(fq; z) \; .$$

<u>Demostración</u>: Tomese N lo suficientemente grande como para que $[Q_N]$ encierre todos los polos P de f. Entonces, por el Teorema de los Residuos,

$$\int_{Q_N} f(z)q(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{z \in P} Res(fq; z) + \sum_{|n| \leq N \; , n \notin P} Res(fq; n) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{z \in P} Res(fq; z) + \sum_{|n| \leq N \; , n \notin P} f(n) \right) \; ,$$

de donde se desprende la afirmación tomando el límite $N \to \infty$. $\Box$

Como primera aplicación demostramos la famosa fórmula de Euler

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \pi^2/6 \; .$$

Con $f(z) = 1/z^2$ que tiene un polo doble en 0 y que satisface $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, tenemos un polo triple de fq en 0. Para calcular el residuo, conviene trabajar con los desarrollos en potencias. Si consideramos la serie de Laurent alrededor de 0

$$\pi z^{-2} \cot(\pi z) = \sum_{n=-3}^{\infty} a_n z^n \; ,$$

entonces mutiplicando ambos miembros por $z^2 \operatorname{sen}(\pi z)$ y usando los desarrollos de Taylor del seno y del coseno alrededor de 0, obtenemos

$$\pi(1 - (\pi z)^2/2! + O(z^3)) = \left(\sum_{n=-3}^{\infty} a_n z^{n+2} \right) \left(\pi z - (\pi z)^3/3! + O(z^5) \right)$$

$$= \pi a_{-3} + a_{-2}\pi z - a_{-3}\pi^3 z^2/3! + \pi a_{-1} z^2 + O(z^3)$$

de donde $a_{-3} = 1$ y $a_{-1} = -\pi^2/3$. El Teorema nos entrega $\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} 1/n^2 = 2\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/3$.

Damos otra aplicación. Sea $f(z) = (z^2-1)^{-1}$ que tiene polos simples en ± 1. Entonces fq tiene polos dobles en ± 1. Para calcular los residuos correspondientes se puede usar la fórmula

$$Res(h/k; z_o) = \frac{2h'(z_o)}{k''(z_o)} - \frac{2h(z_o)k'''(z_o)}{3(k''(z_o))^2} ,$$

válida cuando z_o es un cero doble de la función k y h es analítica en z_o. En nuestro caso $h(z) = \pi\cos(\pi z)$ y $k(z) = (z-1)(z+1)\operatorname{sen}(\pi z)$ y obtenemos

$$Res(fq; \pm 1) = -1/4 .$$

Luego, por el Teorema,

$$1/2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\ , n\neq\pm 1} 1/(n^2-1) = -1 + 2\sum_{n\geq 2} 1/(n^2-1) ,$$

y por lo tanto

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7}\cdots = \frac{3}{4} .$$

Ejercicio 31 *Proceda del mismo modo para demostrar que si f es* analítica *en $n\in\mathbb{Z}$ entonces*

$$Res(\pi f(z)/\operatorname{sen}(\pi z); n) = (-1)^n f(n) .$$

Luego demuestre sucesivamente

Lema 10.7 *Sea Q_N, $1\leq N\in\mathbb{N}$, el perímetro del rectángulo de vertices $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1-i)$, y $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$ recorridos en ese orden que lo orienta positivamente. Entonces*

$$\mid \pi/\operatorname{sen}(\pi z) \mid\leq \pi ,$$

para todo $z\in[Q_N]$.

Lema 10.8 *Suponga que f es* analítica *en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de polos y que $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Existe entonces $1\leq N_o\in\mathbb{N}$ tal que $[Q_N]$ no contiene ningún polo de f y se tiene*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{Q_N} f(z)/(\operatorname{sen}(\pi z))dz = 0 .$$

Teorema 10.3 *Sea* f analítica *en* $\mathbb{C}$ *salvo en un número finito de polos* P*, y suponga que* $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$*. Entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus P} (-1)^n f(n) = -\sum_{z\in P} Res(fq; z) \; .$$

Use esto para demostrar que

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}/n^2 = \pi^2/12 \; .$$

Capítulo 11

Aplicaciones a las funciones armónicas

En 2.6 introdujimos las funciones armónicas como funciones definidas en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ con derivadas parciales de segundo orden continuas que satisfacen la ecuación de Laplace en A. Vimos que si $f = u + iv$ es analítica en un abierto entonces tanto u como v son armónicas allí. Dada una función armónica ϕ definida en un abierto no siempre hay (ejercicio) una función analítica g tal que $u = \mathrm{Re}(g)$. Esto no sucede en un dominio simplemente conexo; la siguiente demostración reposa sobre el Teorema de Cauchy-Goursat para dominios simplemente conexos.

Teorema 11.1 *Si u es armónica en un dominio simplemente conexo G entonces hay una función* analítica *f en G tal que $Re(f) = u$ y $Im(f)$ es la armónica conjugada de u en G.*

Demostración: Sean $U(x, y) := (\partial u/\partial x)(x, y)$ y $V := -(\partial u/\partial y)(x, y)$, $(x, y) \in G$. Sea $h(z) = U(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) + iV(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ para $z \in G$ visto como dominio complejo. Entonces,

$$(\partial U/\partial x) = (\partial^2 u/\partial x^2) = -(\partial^2 u/\partial y^2) = -(\partial V/\partial y) \ ,$$

$$(\partial U/\partial y) = (\partial^2 u/\partial y \partial x) = (\partial^2 u/\partial x \partial y) = (\partial V/\partial x) \ ;$$

i.e., se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para h con lo cual h es analítica en G y por el Teorema 6.4 admite una primitiva H en G. Ya que $H' = h$, tenemos

$$(\partial \mathrm{Re}(H)/\partial x) - i\partial \mathrm{Re}(H)/\partial y = U + iV = (\partial u/\partial x) - i\partial u/\partial y) \ ,$$

de donde hay una constante c tal que $u = \mathrm{Re}(H) + c$. Entonces, $f = H + c$ cumple con lo requerido y $\mathrm{Im}(f)$ es armónica. $\square$

Si, en el contexto del Teorema, u es armónica podemos aplicar inmediatamente el Principio del Módulo Máximo a la funciones $z \mapsto \exp(\pm f(z))$ observando que $\mid exp(\pm f(z)) \mid = \exp(\pm u(z))$ y que la exponencial real es estrictamente creciente. Obtenemos así el Principio del Máximo y el Mínimo para funciones armónicas definidas en un dominio simplemente conexo.

Teorema 11.2 *Si u es armónica y no constante en un dominio simplemente conexo entonces no tiene ni máximo ni mínimo. Si el dominio es acotado y u es continua hasta la frontera del dominio entonces u asume su valor máximo y mínimo en la frontera.*

Una consecuencia inmediata de esto es que una función armónica está determinada por sus valores en el borde de su dominio de definición; más precisamente:

Teorema 11.3 *Si G es un dominio simplemente conexo acotado y u, v son armónicas en G y continuas sobre la frontera de G donde $u = v$, entonces $u = v$ en G*

<u>Demostración</u>: $\phi = u - v$ es armónica y se anula en la frontera de G donde toma su valor máximo y mínimo. $\square$

Esto sugiere expresar los valores de u en G en términos de aquellos sobre la frontera de G. La Fórmula de Cauchy hace precisamente esto para una función analítica .

Teorema 11.4 *Si u es armónica en un dominio que contiene un disco cerrado de centro (x_o, y_o) y radio $R > 0$ entonces para todo $0 \leq r < R$ y todo $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene*

$$u(x_o + r\cos(\theta), y_o + r\sin(\theta)) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(x_o + R\cos(t), y_o + R\sin(t))}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(t-\theta)} \, dt \ . \tag{11.1}$$

<u>Demostración</u>: Sea C_R el círculo de radio R y centro $z_o = x_o + iy_o$. Hay entonces una función f analítica en el disco abierto $D(z_o; R)$ que es continua sobre $[C_R]$ tal que $u = \mathrm{Re}(f)$. Si $z \in D(z_o; R)$ tenemos por la Fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ .$$

No podemos simplemente tomar la parte real de esta fórmula pues esto introduce la parte imaginaria de f que es la armónica conjugada de u en $D(z_o; R)$. El siguiente truco salva el día. Considere la función

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)(\overline{z} - \overline{z_o})}{R^2 - (\zeta - z_o)(\overline{z} - \overline{z_o})} \ , \ \ \zeta \in D(z_o; R) \ .$$

Ya que $R^2 = (\zeta - z_o)(\overline{z} - \overline{z_o})$ es equivalente a $R^2 =\mid \zeta - z_o \mid \mid z - z_o \mid = R \mid z - z_o \mid R^2$, el denominador no se anula en $D(z_o; R)$ y por ende la función es analítica . Luego

$$\int_{C_R} \frac{f(\zeta)(\overline{z} - \overline{z_o})}{R^2 - (\zeta - z_o)(\overline{z} - \overline{z_o})} d\zeta = 0 \ .$$

Si sumamos esto a la Fórmula de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z} - \overline{z_o}}{R^2 - (\zeta - z_o)(\overline{z} - \overline{z_o})} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(\zeta) \frac{R^2 - \mid z - z_o \mid^2}{(\zeta - z)(R^2 - (\zeta - z_o)(\overline{z} - \overline{z_o}))} d\zeta \ . \end{aligned}$$

Ahora, con $\zeta = z_o + Re^{it}$ y $z = z_o + re^{i\theta}$ con $0 \leq r < R$ obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_o + Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{(Re^{it} - re^{i\theta})(R^2 - Re^{it} re^{-i\theta})} Rie^{it} dt$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_o + Re^{it})}{(Re^{it} - re^{i\theta})(Re^{-it} - re^{-i\theta})} dt = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_o + Re^{it})}{\mid Re^{it} - re^{i\theta} \mid^2} dt$$

Tomando la parte real con $u = \mathrm{Re}(f)$ obtenemos la fórmula. $\square$

La fórmula (11.1) se debe a Poissson y sugiere el siguiente procedimiento. Supóngase que se conoce una función (continua) s sobre el borde de un disco de radio $R > 0$. Entonces el miembro derecho de (11.1) está definido y define una función u con

$$u(x_o + r\cos(\theta), y_o + r\sin(\theta)) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s(x_o + R\cos(t), y_o + R\sin(t))}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(t - \theta)} \, dt \ .$$

Se puede demostrar que u es armónica y por ende una solución del problema de Dirichlet para el disco: encontrar una solución de la ecuación de Laplace en el disco que tenga valores prescriptos en el borde de ese disco. Esto más el Teorema del Mapeo de Riemann permiten obtener la solución del problema de Dirichlet para todo dominio simplemente conexo acotado. La demostración de todo esto excede las limitaciones de este curso.

Apéndice A

El contador de vueltas

Reconsidere la fórmula de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = (2\pi i)f(z)$$

para un camino cerrado simple γ tal que f es analítica dentro y sobre el dominio D encerrado por $[\gamma]$ y $z \in D$. La función $w \mapsto g_z(w) := \frac{f(w)}{w-z}$ tiene un polo simple en z y estamos integrando una vez alrededor de esta singularidad aislada. ¿Qué sucede si integramos n veces alrededor de la singularidad?

Consideremos un camino cerrado arbitrario Γ tal que f se analítica en algún gran disco abierto que contiene a $[\Gamma]$ y z tal que $z \notin [\Gamma]$. La función g_z tiene un desarrollo de Laurent

$$g_z(w) = \frac{f(z)}{(w-z)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z)^n$$

alrededor de z y éste converge uniformemente en algún anillo que contiene a $[\Gamma]$. Luego, integrando término a término

$$\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_\Gamma g_z(w)dw = f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw\ .$$

Teorema A.1 *Si Γ es un camino cerrado y $z \notin [\Gamma]$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw =: n(\Gamma, z) \tag{A.1}$$

es un entero. La función $z \mapsto n(\Gamma, z)$ es analítica *en $\mathbb{C}\setminus[\Gamma]$, constante en cada subconjunto conexo $G \subset \mathbb{C}\setminus[\Gamma]$, y se anula si G no es acotado.*

Llamamos al entero $n(\Gamma, z)$ el **índice de z respecto de** Γ o más prosaicamente el **contador de vueltas** de Γ con respecto a z.

Demostración: Suponemos primeramente que Γ es suave, $\Gamma = \{[0,1] \ni t \mapsto z(t)\}$. Entonces

$$\rho(t) = \int_0^t \frac{z'(t)}{z(t)-z} dt \ , \quad 0 \le t \le 1 \ .$$

Tenemos $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 2\pi i n(\Gamma, z)$ y

$$\rho'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)-z} \ .$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \exp(-\rho(t))(z(t)-z) = \exp(-\rho(t)) \left(-\rho'(t)(z(t)-z) + z'(t)\right) = 0 \ .$$

Luego, $\alpha \exp(\rho(t)) = z(t) - z$ para una constante compleja α. Ya que $\rho(0) = 0$, $\alpha = z(0) - z$ y entonces

$$(z(1)-z)\exp(2\pi i n(\Gamma, z)) = z(0) - z \ .$$

Pero Γ es cerrado y $z(1) = z(0)$. Luego, $\exp(2\pi i n(\Gamma, z)) = 1$ con lo que $n(\Gamma, z)$ es entero.

En el caso general, $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, hay n funciones ρ_j y el mismo manipuleo produce

$$(z(j-1)-z)\exp\left(2\pi i \int_{\gamma_j} \frac{1}{w-z} dw\right) = z(j) - z \ , \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

donde $z(j)$ es el punto final del j-ésimo camino suave que coincide con el punto inicial del $(j-1)$-ésimo camino suave para $j = 2, \cdots, n$ y $z(0) = z(n)$ es el punto inicial de γ_1. Observando que $z \neq z(j)$ para todo $j = 0, 1, \cdots, n$ pues $z \notin [\Gamma]$ y multiplicando las n identidades, se tiene

$$\exp(2\pi i \int_{\Gamma} (w-z)^{-1} dw) = \prod_{j=1}^{n} \exp(2\pi i \int_{\gamma_j} (w-z)^{-1} dw)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{z(j)-z}{z(j-1)-z} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(z(j)-z)}{\prod_{j=1}^{n}(z(j-1)-z)} = 1 \ .$$

La conclusión es la misma.

La proposición 7.2, i.e., la fórmula (7.5) para $g(z) = 1$, indica que $n(\Gamma, \cdot)$ es analítica . Si $G \subset \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ es conexo y z, w son dos puntos distintos arbitrarios de G hay un camino poligonal α con $[\alpha] \subset G$ tal que z es el punto inicial de α y w su punto final. Tomando una parametrización continua de α sobre el intervalo $[0,1]$, obtenemos que $[0,1] \ni t \mapsto n(\Gamma, \alpha(t))$ es continua. Como su valor es un entero, se deduce que esta función es constante

o sea que $n(\Gamma, z) = n(\Gamma, \alpha(0)) = n(\Gamma, \alpha(1)) = n(\Gamma, w)$.
Ya que $[\Gamma]$ es acotado, sea $R > 0$ tal que $\mid z \mid < R$ para todo $z \in [\Gamma]$; entonces dado $\epsilon > 0$, si G no es acotado, existe $a \in G$ tal que $\mid a \mid > R + \ell(\Gamma)/(2\pi\epsilon)$, con lo cual

$$\mid n(\Gamma, a) \mid \leq (1/2\pi) \int_\Gamma \frac{\mid dw \mid}{\mid w - a \mid} \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi(\mid a \mid - R)} < \epsilon \ ;$$

o sea que $n(\Gamma, \alpha) = 0$ y por ende $n(\Gamma, \cdot) = 0$ en G. $\square$

El lector podrá verificar tomando algunos ejemplos concretos (caminos circulares, ...) que $n(\Gamma, z)$ hace realmente lo que su nombre dice: cuenta las vueltas que da el camino alrededor de z tomando como positiva la vuelta en sentido anti-horario coincidentemente con nuestra convención de orientación positiva de un camino cerrado simple (de hecho este es el origen de la convención).

Corolario A.1 *Si D es un dominio simplemente conexo y γ es un camino cerrado con $[\gamma] \subset D$ entonces $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \notin D$.*

Demostración: El complemento de D es conexo y no acotado. $\square$

Tenemos el siguiente Teorema de Cauchy-Goursat general

Teorema A.2 *Si $A \subset \mathbb{C}$ es abierto, f es* analítica *en A y γ es un camino cerrado con $[\gamma] \subset A$ tal que $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \notin A$ entonces:*

$$\int_\gamma f(w)dw = 0 \ ,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) n(\gamma, z) \ , \ z \in A \setminus [\gamma] \ .$$

Demostración: Si es válida la fórmula de Cauchy generalizada, entonces tome un $a \in A \setminus [\gamma]$ y considere $z \mapsto F(z) = (z - a) f(z)$ en A que es analítica con lo cual

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_\gamma \frac{F(w)}{w - a} dw = 2\pi i F(a) n(\gamma, a) = 0 \ .$$

La demostración de la fórmula de Cauchy generalizada que sigue se debe a Dixon. Para todo $(w, z) \in A \times A$ definimos

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & , \quad \text{si } z \neq w \\ f'(z) & , \quad \text{si } z = w \end{cases} \ .$$

Ya que $\lim_{z\to w}(f(w)-f(z))/(w-z) = f'(z)$, la función $z \mapsto g(w,z)$ es analítica en A para todo $w \in A$.
Veamos que g es continua. Si $z \neq w$ hay entornos E de z y F de w que son disjuntos. Para $\zeta \in E$ y $\xi \in F$, $g(\xi,\zeta)$ es cociente de funciones continuas en cada una de las variables y por ende continua en $E \times F$.
Suponga que $z = w$ y $\epsilon > 0$. Ya que f' es analítica , existe $r > 0$ tal que para todo $\zeta, \xi \in D(z;r)$ se tiene $\mid f'(\zeta) - f'(\xi) \mid < \epsilon$. Entonces para $\zeta, \xi \in D(z;r)$ tenemos: (1) Si $\zeta = \xi$ entonces $\mid g(\zeta,\xi) - f'(z) \mid = \mid f'(\zeta) - f'(z) \mid < \epsilon$; y (2) si $\zeta \neq \xi$, entonces con $\alpha(t) = t\xi + (1-t)\zeta \in D(z;r)$ para todo $t \in [0,1]$, $\alpha'(t) = \xi - \zeta$ y $\int_0^1 f'(\alpha(t))\alpha'(t)dt = (\xi - \zeta)(f(\xi) - f(\zeta))$; luego

$$\mid g(\zeta,\xi) - f'(z) \mid = \mid (\zeta - \xi)^{-1} \int_0^1 f'(\alpha(t))\alpha'(t)dt - f'(z) \mid$$
$$= \mid \int_0^1 (f'(\alpha(t)) - f'(z))dt \mid < \int_0^1 \mid f'(\alpha(t)) - f'(z) \mid dt < \epsilon \ .$$

Definimos la función h en A por

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(w,z)dw \ .$$

Veamos que h es primeramente, continua y luego analítica . Para $z \in A$ considérese un disco $D(z;r)$ tal que $\overline{D(z;r)} \subset A$. Ya que g es continua, g es uniformemente continua en $[\gamma] \times \overline{D(z;r)}$, y esto implica (como en el Análisis real) que h es continua. Para cualquier camino cerrado β con $[\beta] \subset D(z;r)$ tenemos

$$\int_\beta h(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \left(\int_\gamma g(w,\zeta)dw \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\int_\beta g(w,\zeta)d\zeta \right) dw = 0$$

por la analiticidad de $\zeta \mapsto g(w,\zeta)$ y el Teorema de Cauchy-Goursat para un disco. Luego, por el Teorema de Morera, h es analítica en z.

Sea $B = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma] : \ n(\gamma,z) = 0\}$. Ya que $[\gamma]$ es compacto, hay $R > 0$ tal que $[\gamma] \subset \overline{D(0;R)}$; este R queda fijo y se usará en lo que sigue. Ya que el complemento de este disco es conexo y no acotado, $\{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid > R\} \subset B$. Además la hipótesis indica que B contiene el complemento de A[1], lo que garantiza que $A \cup B = \mathbb{C}$. Definamos

$$k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \ , \ \ z \in B \ ,$$

[1]Ojo. Si $A = \mathbb{C}$ esto no dice nada.

que es analítica en virtud de la proposición 7.2. Si $z \in A \cap B$ se tiene

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w,z)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = k(z) \ .$$

Por lo tanto la función

$$q(z) = \begin{cases} h(z) & , \quad \text{si } z \in A \\ k(z) & , \quad \text{si } z \in B \end{cases}$$

está bien definida en todo $\mathbb{C}$ y es entera. Demostramos ahora que q es acotada. Hay $M > 0$ con $\mid f(w) \mid \leq M$ para todo $w \in [\gamma]$ por la compacidad de $[\gamma]$ y la continuidad de f. Dado $\epsilon > 0$ y recordando el R que introdujimos, si

$$\mid z \mid > R + \frac{\ell(\gamma)M}{2\pi\epsilon} \ ,$$

entonces para todo $w \in [\gamma]$ tenemos,

$$\mid w - z \mid \geq \mid z \mid - \mid w \mid > R + \frac{\ell(\gamma)M}{2\pi\epsilon} - R = \frac{\ell(\gamma)M}{2\pi\epsilon} \ .$$

Y como $z \in B$,

$$\mid q(z) \mid = \mid k(z) \mid \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\mid f(w) \mid}{\mid w - z \mid} \mid dw \mid < \epsilon \ . \tag{A.2}$$

Si $\mid z \mid \leq R + \frac{\ell(\gamma)M}{2\pi\epsilon}$, entonces la analiticidad de q garantiza que $\mid q \mid$ es acotada (se alcanza el máximo para algún z con $\mid z \mid = R + \frac{\ell(\gamma)M}{2\pi\epsilon}$). Pero q siendo entera y acotada debe ser constante por el Teorema de Liouville. Pero, como ϵ era arbitrario > 0, (A.2) muestra que $q \equiv 0$. Y esto implica la fórmula de Cauchy. $\square$

Podemos ahora repetir la demostración de la proposición 7.1 para generalizarla. Luego para un camino cerrado simple orientado positivamente γ y un z encerrado por $[\gamma]$ podemos ver que

$$n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{w-z}dw = 1$$

donde C es un círculo de radio lo suficientemente pequeño. Esto nos da la versión de la fórmula de Cauchy del Capítulo 7.

Índice alfabético