Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2015

Analiticidad de cualquier rama del logaritmo

Por definición, una rama f del logaritmo es una función f definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ tal que $D \ni z \mapsto f(z)$ es continua y $\exp(f(z)) = z$ para todo $z \in D$[1]. La afirmación es que f es analítica con $f'(z) = 1/z$ para todo $z \in D$. Pero esto no se demostró completamente en clase; lo que hacemos a continuación aplicando el siguiente resultado (que es muy útil):

Teorema: Si f y g son funciones complejas definidas en sendos abiertos F y G de $\mathbb{C}$ tal que:

1. $f(F) \subset G$;
2. $g(f(z)) = z$ para todo $z \in F$;
3. g es diferenciable en $f(z_o) \in G$ donde $z_o \in F$ y $g'(f(z_o)) \neq 0$;
4. f es continua en z_o;

entonces f es diferenciable en z_o y $f'(z_o) = 1/g'(f(z_o))$.

Demostración: Consideremos $h \neq 0$ tal que $z_o + h \in F$ pero sino arbitrario; entonces por la propiedad 2. (inversión)

$$1 = \frac{z_o + h - z_o}{h} = \frac{g(f(z_o + h)) - g(f(z_o))}{h} \ ;$$

y necesariamente $f(z_o + h) \neq f(z_o)$. Luego,

$$1 = \frac{g(f(z_o + h)) - g(f(z_o))}{h} = \frac{g(f(z_o + h)) - g(f(z_o))}{f(z_o + h) - f(z_o)} \left(\frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} \right) \ ,$$

de modo que

$$\frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} = \frac{1}{\dfrac{g(f(z_o + h)) - g(f(z_o))}{f(z_o + h) - f(z_o)}} \ .$$

Cuando $h \to 0$, tendremos $f(z_o + h) \to f(z_o)$ por la continuidad 4. de f y por 3.

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(z_o + h)) - g(f(z_o))}{f(z_o + h) - f(z_o)} = g'(f(z_o)) \ .$$

De modo que

$$f'(z_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{g(f(z_o + h)) - g(f(z_o))}{f(z_o + h) - f(z_o)}} = 1/g'(f(z_o)) \ ,$$

lo que completa la demostración.

Ahora aplicamos esto a la función $g = \exp$ que es analítica en todo $\mathbb{C}$ con derivada $g' = g$ lo que nos garantiza la condición 3. para todo $z \in F$ cualquiera sea F. Si f es una rama del logaritmo definida en el dominio D, tomamos $F = D$ y 1. se cumple con $G = \mathbb{C}$. La propiedad 2. es consecuencia de que para todo $z \in D$ el número $f(z) \in \log(z)$ y 4. es consecuencia de la continuidad de f en D. Por lo tanto:

$$f'(z) = 1/g'(f(z)) = 1/g(f(z)) = 1/z$$

para todo $z \in D$.

[1]Ya que $\exp(w) \neq 0$ para todo complejo w, $0 \notin D$