FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, U.N.C.

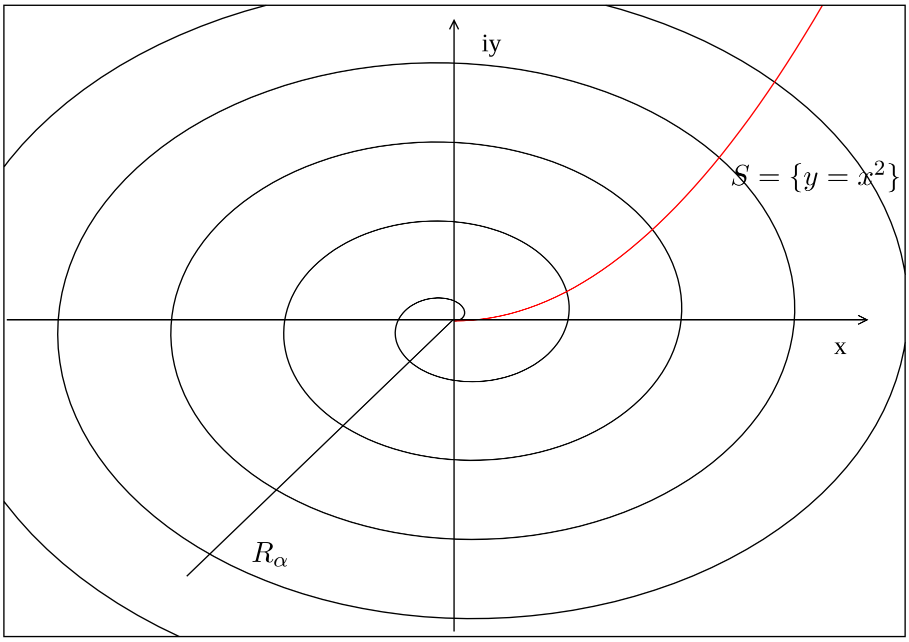
Métodos Matemáticos de la Física I – 2015

Más sobre el logaritmo

Por definición, una rama f del logaritmo es una función f definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ tal que $D \ni z \mapsto f(z)$ es continua y $\exp(f(z)) = z$ para todo $z \in D$[1]. Hemos visto ya –hay nota al respecto en la w-página– que las ramas del logaritmo son analíticas con $f'(z) = 1/z$ para todo $z \in D$. Ya que

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z) \ ,$$

para definir una rama f del logaritmo (definida en el dominio D) basta determinar una rama del argumento en D; vale decir un número $\alpha(z) \in \arg(z)$ tal que la función $D \ni z \mapsto \alpha(z)$ sea continua. La rama correspondiente del logaritmo es entonces $f(z) = \ln|z| + i\alpha(z)$. El estudio de los siguientes ejemplos debería ayudar a aclarar el concepto de una rama del logaritmo. La figura ilustra los dominios de los ejemplos.



1. Considere el rayo $R_\alpha = \{z(t) := t\exp(i\alpha) \ : \ t \geq 0\}$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$. Entonces $D := \mathbb{C} \setminus R_\alpha$ es un dominio. Queremos una rama α del argumento que tenga su discontinuidad en R_α. Claramente

$$\alpha(z) = \arg_{\alpha - 2\pi}(z)$$

o bien

$$\alpha(z) = \arg_\alpha(z)$$

cumplen este requisito. Entonces

$$f(z) = \ln|z| + i\alpha(z)$$

es una rama del logaritmo. Se obtiene la rama principal *Log* cuando $\alpha = \pi$.

[1] Ya que $\exp(w) \neq 0$ para todo complejo w, $0 \notin D$

2. Considere la “semi-parábola” $S := \{z(t) := t + it^2 : t \geq 0\}$. Entonces $D := \mathbb{C} \setminus S$ es abierto y conexo, o sea un dominio. Queremos definir una rama α del argumento en D. La idea es que el salto (o sea la discontinuidad) de α se produzca exactamente sobre la semi-parabola S. Observamos que

$$|z(t)| = t\sqrt{1+t^2}\ , \quad \mathrm{Arg}(z(t)) = \operatorname{arc\,tg}(t) \in [0, \pi/2)\ .$$

Piense en los círculos de radio $r > 0$ centrados en 0; cada uno de estos corta a S en exactamente un punto $z(t_r)$. El correspondiente valor del parámetro $t_r \geq 0$ se determina de

$$r^2 = |z(t_r)|^2 = t_r^2(1+t_r^2) \iff t_r = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2}}\ .$$

De modo que

$$\mathrm{Arg}(z(t_r)) = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2}}\right)\ .$$

Si ahora, dado $z \in D$, convenimos en definir $\alpha(z)$ como el único número real tal que $\alpha(z) \in \arg(z)$ con

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+4|z|^2}-1}{2}}\right) \leq \alpha(z) < \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+4|z|^2}-1}{2}}\right) + 2\pi\ , \qquad (1)$$

entonces la función α está bien definida y es continua salvo en S. El logaritmo correspondiente es

$$f(z) = \ln|z| + i\alpha(z)$$

que es analítico.

3. Considere una espiral; por ejemplo la espiral de Archimedes dada por

$$L := \{\zeta(t) := t(\cos(t) + i\sin(t)) = t\exp(it) : t \geq 0\}\ .$$

Observe que $|\zeta(t)| = t$ y $\arg(z(t)) = \{t + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Graficando y estudiando está curva se ve que $\mathbb{C} \setminus L$ es un dominio que no contiene a $z = 0$. Como en el ejemplo anterior, es cierto que para cada $r > 0$ hay un único punto $\zeta(t_r)$ de la espiral L tal que $|\zeta(t_r)| = r$; en efecto, $t_r = r$. Si ahora, siguiendo con lo hecho en el ejemplo anterior (ver (1)), definimos la rama α del argumento por medio de

$$\mathrm{Arg}(\zeta(|z|)) \leq \alpha(z) < \mathrm{Arg}(\zeta(|z|)) + 2\pi$$

tenemos un argumento cuyos puntos de discontinuidad coinciden con L.

Las siguientes dos observaciones son muy importantes y completan los aspectos básicos del logaritmo.

“Unicidad” A dado dominio D, la rama del logaritmo definida en este dominio no es unívoca ya que si α es un argumento continuo entonces $z \mapsto \alpha(z) + 2k\pi$ con un entero k también es continua y $\alpha(z) + 2k\pi \in \arg(z)$. ¡Pero esta es toda la libertad! En efecto, si f y g son dos ramas del logaritmo en D entonces con $h := f - g$ tendremos $h'(z) = f'(z) - g'(z) = z^{-1} - z^{-1} = 0$ y por ende $f = g + c$ donde $c \in \mathbb{C}$ es constante. Pero ya que $f(z)$ y $g(z)$ son logaritmos de z (cumplen $\exp(f(z)) = z = \exp(g(z))$) tenemos que $h(z) = f(z) - g(z) = c$ debe ser un múltiplo entero de $i2\pi$. O sea: $f(z) = g(z) + i2k\pi$ con algún $k \in \mathbb{Z}$.

Existencia Si D es un dominio que no contiene a $z = 0$ y tampoco tiene caminos cerrados que encierren a $z = 0$ podemos construir una rama del logaritmo integrando la función $1/z$. La función $f(z) := 1/z$ está bien definida en D y es analítica con $f'(z) = -1/z^2$. Como vimos

$$\int_\gamma dz/z = 0$$

cualquiera sea el camino cerrado cuya traza cae en D. Pero entonces la función F definida en D por

$$F(z) = \int_{\gamma(z_o \to z)} f(w)\, dw \ , \quad z \in D \ ,$$

donde $\gamma(z_o \to z)$ es cualquier camino –cuya traza cae en D– que une el punto inicial fijo y arbitrario $z_o \in D$ con el punto final z, está bien definida. Consideramos $G(z) = F(z) + c$ donde $c \in \log(z_o)$ es constante. Entonces $G'(z) = F'(z) = 1/z$ en D y con $H(z) = \exp(G(z))/z$ para $z \in D$, la función H satisface $H'(z) = z^{-1} \exp(G(z))G'(z) - z^{-2} \exp(G(z)) = 0$ de modo que $H(z) = a$ es constante y

$$a = H(z_o) = \exp(G(z_o))/z_o = \exp(F(z_o) + c)/z_o = \exp(c)/z_o = 1 \ ;$$

de donde $\exp(G(z)) = z$ o sea que $G(z) \in \log(z)$. G es entonces una rama del logaritmo en D. Aquí, la libertad en la elección de c nos da todas las ramas posibles $G(z) + i2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ahora bien; ambas hipótesis sobre el dominio D son necesarias para que haya una rama del logaritmo definida en D. Claramente, si $0 \in D$ entonces no puede estar definido el logaritmo ya que $\exp(w) \neq 0$ para todo complejo w y 0 no tiene logaritmo. Si D admite camino cerrado γ que encierra a 0 ya vimos que

$$\int_\gamma dz/\, z = 2\pi i \ .$$

Si hubiere una rama f del logaritmo definida en D tendriamos ya que $f'(z) = 1/z$ que $\int_\gamma dz/\, z = 0$.