Series de Fourier*

G.A. Raggio
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Octubre de 2015

Índice

1. Motivación

La ecuación diferencial (lineal y de segundo orden)

$$\ddot{x}(t) + \tau^{-1}\dot{x}(t) + \beta x(t) = f(t) \tag{1}$$

donde $\tau \neq 0$, β son constantes y f es una función conocida surge en diversos problemas físicos:

*Notas provisorias para *Métodos Matemáticos de la Física I*, 2^{do}-cuatrimestre 2015

- En un circuito eléctrico en serie formado por una resistencia R, una capacidad C y una inductancia L sometido a un fuerza electromotriz variable $v(t)$, se tiene la ecuación (1) para la carga en el capacitor $x(t)$ con $\tau = L/R$, $\beta = 1/LC$ y $f(t) = v(t)/L$.
- En un circuito eléctrico formado por los mismos elementos en paralelo alimentado por una corriente variable $I(t)$, se tiene (1) para la diferencia de potencial $x(t)$ con $\tau = RC$, $\beta = 1/CL$ y $f(t) = \dot{I}(t)/C$.
- Un sistema mecánico unidimensional en un potencial cuadrático y con una fuerza dispersiva proporcional a su velocidad. Por ejemplo, para un péndulo de masa m forzado por una fuerza $F(t)$ en un medio viscoso se cumple (1) con $\tau = m/k_1$, $\beta = k_2/m$ y $f(t) = F(t)/m$.

Suponemos en lo que sigue que ni τ ni β se anulan.

El caso donde la "perturbación" f es sinusoidal, i.e.

$$f(t) = \gamma \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

es muy fácil de resolver.

Es inmediato ver que

$$y(t) = a\cos(\omega t + \phi) + b \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{2}$$

con

$$a = -\frac{\gamma(\omega/\tau)}{(\beta - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad , \quad b = \frac{\gamma(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \ . \tag{3}$$

es una solución de (1). Podemos re-escribir

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta - \omega^2) + (\omega/\tau)^2}} \ \operatorname{sen}(\omega t + \phi + \varphi) \ ,$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega}{\tau(\omega^2 - \beta)} \ ,$$

poniendo de manifiesto que y oscila con la misma frecuencia de la perturbación pero hay un corrimiento de fase (dado por φ). Ya que tenemos una solución (i.e. y) y – como veremos más adelante – la solución general de (1) se obtiene sumandole a y la solución general de la ecuación homogenea asociada a (1), debemos discutir la solución general de

$$\ddot{u} + \tau^{-1}\dot{u} + \beta u = 0 \ . \tag{4}$$

La solución de esta ecuación no presenta mayores problemas; como veremos más adelante (verifique diferenciando y reemplazando en (4)) la solución general es:

$$u(t) = Ae^{k_+ t} + Be^{k_- t} \qquad\qquad \text{si } 1 \neq 4\beta\tau^2$$

donde $k_\pm$ son las dos raices (distintas !) de la ecuación $k^2+\tau^{-1}k+\beta=0$; respectivamente

$$u(t)=Ae^{-t/(2\tau)}+Bte^{-t/(2\tau)} \qquad\qquad \text{si } 1=4\beta\tau^2\ .$$

En ambos casos A, B son constantes cuyo valor queda determinado por la condición inicial (e.g., $u(0)$ y $\dot{u}(0)$ dados). Observese que cuando $\tau>0$ – lo que es usualmente el caso en problemas físicos ya que τ es el coeficiente de "fricción" en dimensiones apropiadas – se tiene que la parte real de $k_\pm$ es estrictamente negativa con lo que, en ambos casos,

$$\lim_{t\to\infty} u(t)=0\ .$$

La solución general de (1) en el caso $f(t)=\gamma\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$ es entonces:

$$x(t)=u(t)+y(t)\ ,$$

donde las constantes libres A, B de u se determinan a traves de las condiciones iniciales (e.g., $u(0)=x(0)-y(0)$, y $\dot{u}(0)=\dot{x}(0)-\dot{y}(0)$). Si $\tau>0$ entonces obtenemos que $x(t)\asymp y(t)$ para t muy grande, o más precisamente $\lim_{t\to\infty}(x(t)-y(t))=0$. En este contexto se conoce a $y(t)$ como el **comportamiento estacionario** de $x(t)$; este **no depende de la condición inicial**.

Consideremos ahora el caso de funciones f más complicadas pero tales que se puedan expresar como suma (finita o quizas infinita) de funciones sinusoidales,

$$f(t)=\sum_n c_n\,\mathrm{sen}(\omega_n t+\phi_n)\ . \tag{5}$$

Denotando, por $y_n(t)$ la solución de (1) para el caso $f(t)=a_n\,\mathrm{sen}(\omega_n t+\phi_n)$ dada por (2,3), la **linealidad** de la ecuación diferencial (1) implica que la solución general es

$$x(t)=u(t)+\sum_n y_n(t)\ ,$$

y que el comportamiento estacionario es $\sum_n y_n(t)$.

Tomemos el caso particular del desarrollo (5) donde todas las frecuencias ω_n son multiplos enteros de una frecuencia básica ω,

$$\omega_n=n\omega\quad,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\ ,$$

y todas las fases son triviales $\phi_n=0$ o $\phi_n=\pi/2$. En ese caso, (5) se escribe

$$f(t)=\sum_n a_n\cos(n\omega t)+b_n\,\mathrm{sen}(n\omega t)\ . \tag{6}$$

Es obvio que en este caso f es periódica de período $2\pi/\omega$: $f(t+(2\pi/\omega))=f(t)$ para todo t. Fué Fourier que en el marco de sus investigaciones sobre el transporte de calor realizadas a fines del siglo XVIII y principios del XIX descubrió[1] que **toda función periódica**

[1] Su memoria al respecto presentada a la Academia de Ciencias de Paris es de 1807.

de período T (i.e., $f(t+T) = f(t)$ para todo t) admite el desarrollo (6) con frecuencia $\omega = 2\pi/T$.

Por lo tanto, la teoría de Fourier que analizaremos a continuación, nos permitira por ejemplo, resolver la ecuación diferencial (1) para cualquier función periódica $f(t)$[2].

Supongamos que la función f definida sobre los reales a valores complejos o reales es **periódica**, vale decir hay algún real $T \neq 0$ tal que

$$f(t+T) = f(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \, .$$

Entonces $f(t-T) = f(t-T+T) = f(t)$ con lo que podemos suponer que $T > 0$ y en tal caso llamamos a T el **período** (luego se ve que $f(t+kT) = f(t)$ para todo entero $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \equiv \mathbb{Z}$)[3]

Si f es periódica de período T, entonces

$$g(t) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \, ,$$

es periódica de período 2π ya que

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{T(t+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) = g(t) \, .$$

Y, inversamente, dada una función g periódica de período 2π obtenemos via $f(t) = g(2\pi t/T)$ una función periódica de período T para todo $T > 0$. Por lo tanto, si nos interesan las funciones periódicas, no nos restringimos en nada si estudiamos aquellas de período 2π.

2. Series de Fourier

2.1. Polinomios trigonométricos

Para todo entero k, la función

$$e_k(t) = e^{ikt} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

es periódica de período[4] 2π. Además se cumple la importantisima relación

$$\boxed{(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_k(t)} e_m(t) = \delta_{k,m}} \tag{7}$$

que llamaremos **relación de ortogonalidad**.

[2]Esto es ya de alguna relevancia electrotecnica.

[3]Si f es periódica de período T puede haber un período T' más chico que T. Por ejemplo: $t \mapsto \text{sen}(2t)$ es periódica de periodo 2π o π. Sin embargo para funciones **continuas** es fácil ver que si la función es periódica pero no constante, entonces dos períodos distintos son multiplos enteros el uno del otro.

[4]Más exactamente es constante para $k = 0$, y periódica de período $2\pi/|k|$ para $k \neq 0$

Un **polinomio trigonométrico** P es una combinación lineal finita de funciones e_k con coeficientes complejos

$$P = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k \; .^5 \tag{8}$$

Un polinomio trigonométrico tiene cuatro propiedades generales básicas: primero es periódico de período 2π; segundo – como consecuencia de la relación de ortogonalidad –

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |P(t)|^2 dt = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \; ; \tag{9}$$

tercero, por el mismo motivo,

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_k(t)} P(t) \; = \left\{ \begin{array}{lll} c_k & , & \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ con } |k| \leq N \\ 0 & , & \text{si } k \in \mathbb{Z} \text{ y } |k| > N \end{array} \right. \; ; \tag{10}$$

y por último

$$|P(t)| \leq \sum_{k=-N}^{N} |c_k| \; . \tag{11}$$

2.2. Coeficientes de Fourier - Series de Fourier

Dada una función periódica de período 2π definimos sus **coeficientes de Fourier** por

$$\boxed{\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_n(t)} f(t)\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \;\; , \;\; n \in \mathbb{Z}} \; . \tag{12}$$

Si f no es 2π-periódica pero está definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se definen los coeficientes de Fourier por la misma fórmula. Como en el caso de funciones periódicas, donde elegimos reducir el análisis al caso 2π-periódico, aquí también la elección del intervalo $[-\pi, \pi]$ es arbitraria sino convencional. Si ϕ es una función a valores complejos definida en un intervalo finito cerrado $[a, b]$ ($a < b$) entonces la transformación

$$x \mapsto \frac{2\pi}{b-a} \left[x - \frac{a+b}{2} \right]$$

transforma el intervalo $[a, b]$ de manera monótonamente creciente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y a la función ϕ en la función

$$f(t) := \phi \left(\frac{b-a}{2\pi} t + \frac{b+a}{2} \right) \;\; , \;\; -\pi \leq t \leq \pi \; .$$

[5] Notese que cualquier combinación lineal finita de e_k's puede escribirse de esta manera ya que los coeficientes pueden anularse.

Las dos preguntas naturales e importantes son: Primeramente, ¿que propiedades de la función f se reflejan (y como) en propiedades de la función $\widehat{f}$ de la variable discreta $n \in \mathbb{Z}$? Y, segundo, ¿se puede reconstruir f a partir de $\widehat{f}$? , o bien ¿es cierto –y en que sentido– que

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n(t) \ ?$$

Está claro que para que $\widehat{f}(n)$ sea un número finito (i.e. este definido) para todo $n \in \mathbb{Z}$ la función f debe cumplir ciertas condiciones. No podemos ni queremos discutir las condiciones más generales y menos restrictivas sobre f que garantizan esto[6]. Supondremos a continuación que las funciones f a las cuales les calculamos sus coeficientes de Fourier, son tales que cumplen con

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt \text{ es finito} \ . \tag{13}$$

Esto se cumple si f es continua y veremos luego otras condiciones que garantizan esta condición de integrabilidad.

Si (13) se cumple definimos

$$\| f \|_1 := (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt \ ;$$

y obtenemos inmediatamente

$$|\widehat{f}(n)| = |(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) \, dt \ | \leq \| f \|_1 \ .$$

En general tenemos

$$\widehat{f}(-n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(t) \, dt = (2\pi)^{-1} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \overline{f(t)} \, dt} = \overline{\widehat{\overline{f}}(n)} \ ;$$

o sea:

$$\boxed{\overline{\widehat{f}(n)} = \widehat{\overline{f}}(-n) \ , \ \ n \in \mathbb{Z}} \ . \tag{14}$$

2.2.1. El caso de funciones reales

Si f toma valores reales, i.e., $\overline{f} = f$, entonces $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ y

$$Re(\widehat{f}(n)) = (1/2)(\widehat{f}(n) + \overline{\widehat{f}(n)}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \ ;$$

[6] Esto conduciría a la teoría de integración de Lebesgue.

$$Im(\widehat{f}(n)) = (1/2i)(\widehat{f}(n) - \overline{\widehat{f}(n)}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(-nt)\,dt\ .$$

En tal caso, se llama usualmente a $2Re(\widehat{f}(n)) =: a_n$ para $n \in \mathbb{N}$ el enésimo coeficiente del coseno y a $2Im(\widehat{f}(-n)) =: b_n$ para $0 < n \in \mathbb{N}$ el enésimo coeficiente del seno. Se tiene

$$\boxed{\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}\ ,\ \ \widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}}\ . \tag{15}$$

La serie de Fourier es entonces

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\ .$$

Observese que debido a la paridad del coseno y del seno, para $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t)+f(-t)}{2}\cos(nt)\,dt}\ ; \tag{16}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t)-f(-t)}{2}\,\mathrm{sen}(nt)\,dt}\ . \tag{17}$$

Por lo tanto, si f es par ($f(-t) = f(t)$) se tiene $b_n = 0$ para todo $n > 0$; mientras que si f es impar ($f(-t) = -f(t)$) son los a_n ($n \in \mathbb{N}$) los que se anulan.

Ejemplo 2.1: $f(t) := t$ en $[-\pi, \pi]$. La función es impar de modo que $a_n = 0$ para $n \geq 0$ y integrando por partes, para $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{sen}(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\pi n^{-1}\cos(n\pi) + n^{-1}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\ .$$

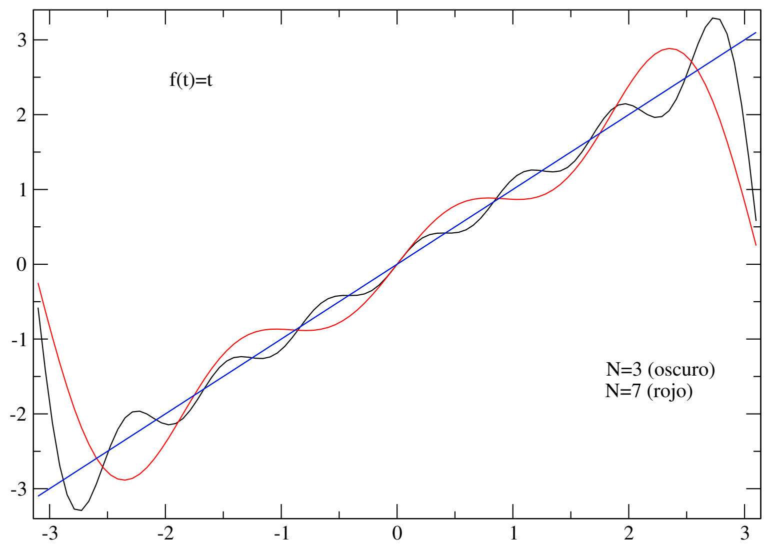
La serie de Fourier es

$$-2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)\ .$$

En $t = \pm\pi$, esto no converge a $f(\pm\pi) = \pm\pi$. ◀

Ejemplo 2.2: $f(t) : |t|$ en $[-\pi, \pi]$ que es continua y diferenciable salvo en $t = 0$. Como f es par, se tiene $b_n = 0$ para $n \geq 1$ y para $n \geq 0$

$$a_n == \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt\ \ .$$



Entonces $a_o = \pi$ y para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\pi n^{-1}\sin(n\pi) - n^{-1}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\ .$$

La serie de Fourier es

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\ \cos((2n+1)t))\ .$$

Por el llamado M-test, la serie es absoluta y uniformemente convergente en $[-\pi, \pi]$. Es de notar que $f(\pi) = f(-\pi)$. La serie obtenida derivando término a término le asigna el valor 0 a $t = 0$ pero f no es diferenciable en $t = 0$. Ver el ejemplo que sigue. ◀

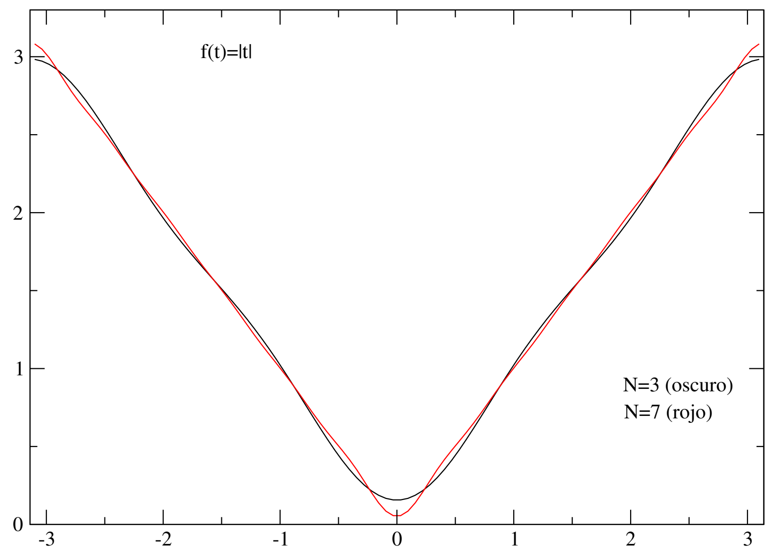
Ejemplo 2.3: $f(t) = sgn(t)$ en $[-\pi, \pi]$; vale decir $f(t) = 1$ si $t > 0$ y $f(t) = -1$ si $t < 0$. Esta es la derivada de la función $|t|$ fuera de $t = 0$. La función es continua y diferenciable salvo en $t = 0$ (donde no está definida). Como f es impar, $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Para $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \frac{-2}{\pi n}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{-2}{n\pi}((-1)^n - 1)\ .$$

La serie de Fourier es

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)t)\ .$$

Esta es la serie que se obtiene derivando término a término la serie del ejemplo anterior. ◀



2.2.2. Propiedades básicas

Dada una función (2π-periódica o simplemente definida en $[-\pi, \pi]$) y sus coeficientes de Fourier, consideremos la función $f_N = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e_n$, i.e.,

$$f_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e_k(t) \ . \tag{18}$$

o sea el polinomio trigonométrico (de orden N) que se obtiene usando los coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ con $|n| \leq N$. Debido a (9) sabemos que

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \ .$$

Calculemos los coeficientes de Fourier de

$$g_N := f - f_N \ .$$

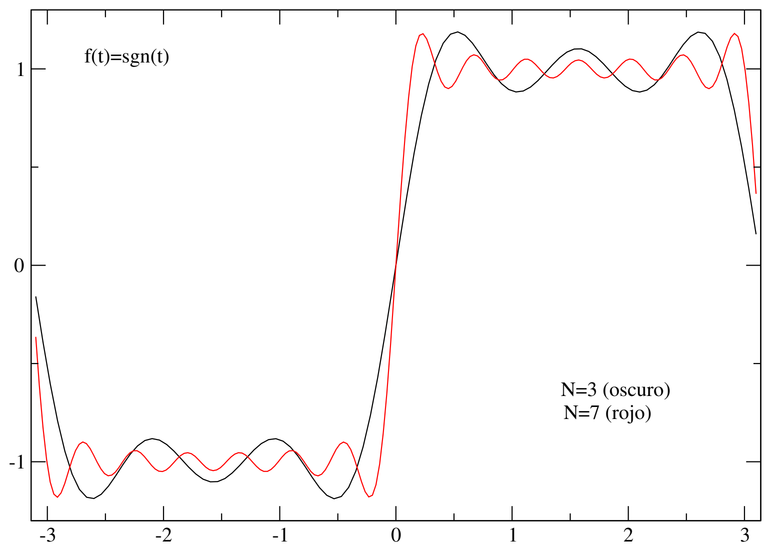
Tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{g_N}(n) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}(f(t) - f_N(t)) \, dt \\ &= \widehat{f}(n) - \widehat{f_N}(n) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } |n| \leq N \\ \widehat{f}(n) & , \quad \text{si } |n| > N \end{cases} \ , \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos (10).

Supongamos que

$$\| \, f \, \|_2 := \left((2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{19}$$



es finito lo que es el caso si f es continua en $[-\pi, \pi]$; entonces[7]

$$\| f \|_2^2 = \| g_N + f_N \|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |g_N(t) + f_N(t)|^2 \, dt$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(|g_N(t)|^2 \, dt + |f_N(t)|^2 + \overline{g_N(t)} f_N(t) + g_N(t) \overline{f_N(t)} \right) \, dt$$

$$= \| g_N \|_2^2 + \| f_N \|_2^2 + \sum_{n=-N}^{N} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{g_N(t)} \widehat{f}(n) e^{int} + g_N(t) \overline{\widehat{f}(n)} e^{-int} \right) \, dt$$

$$= \| g_N \|_2^2 + \| f_N \|_2^2 + \sum_{n=-N}^{N} \left(\overline{\widehat{g_N}}(n) \widehat{f}(n) + \widehat{g_N}(n) \overline{\widehat{f}(n)} \right) = \| g_N \|_2^2 + \| f_N \|_2^2 \ .$$

Esto demuestra la parte esencial del siguiente resultado:

Teorema 1 *Si f tiene media cuadrática (19) finita entonces*

$$(20) \qquad (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_N(t)|^2 \, dt + \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \ ;$$

y vale la desigualdad de Bessel

$$(21) \qquad \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \| f \|_2^2$$

[7]Es fácil ver que $\| \cdot \|_2$ satisface la desigualdad del triángulo:

$$\| f + g \|_2 \leq \| f \|_2 + \| g \|_2 \ ;$$

esto garantiza que $\| g_N \|_2 < \infty$.

con igualdad si y solo si $f = f_N$.

Como consecuencia se obtiene inmediatamente lo que se conoce como Lema de Riemann-Lebesgue:[8]

$$\boxed{\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0}\,, \tag{22}$$

siempre recordando que la demostración que hemos dado es válida si (19) se cumple.

Los coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ de una función f definida sobre $[-\pi, \pi]$ surgen también como solución de encontrar el polinomio trigonométrico que mejor aproxima a f en media cuadrática. En efecto:

Teorema 2 *Si f tiene media cuadrática (19) finita entonces para todo polinomio trigonométrico $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ se tiene*

$$\| f - P \|_2 \geq \| f - f_N \|_2$$

con igualdad si y solo si $P = f_N$.

Demostración: Para ver esto, calculamos

$$\| f - P \|_2^2 = \| f \|_2^2 + \| P \|_2^2 - (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{f(t)} P(t) + f(t) \overline{P(t)} \right) dt$$

$$= \| f \|_2^2 + \| P \|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{f(t)} c_n e_n(t) + f(t) \overline{c_n} \overline{e_n(t)} \right) dt$$

$$= \| f \|_2^2 + \| P \|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{\widehat{f}(n)} + \overline{c_n} \widehat{f}(n)\ .$$

y

$$\| f_N - P \|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n) - c_n|^2$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 + |c_n|^2 - \overline{c_n} \widehat{f}(n) - c_n \overline{\widehat{f}(n)}$$

$$= \| f_N \|_2^2 + \| P \|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \widehat{f}(n) + c_n \overline{\widehat{f}(n)}\ .$$

[8] El resultado persiste cuando se asume la condición de integrabilidad (13) que es más débil que (19). De (21) inferimos que la sucesión $\{s_N = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \ :\ N = 1, 2, \cdots\}$ es convergente pues es acotada y creciente. Por lo tanto $\lim_{N\to\infty} s_N - s_{N-1} = \lim_{N\to\infty} |\widehat{f}(N)|^2 + |\widehat{f}(-N)|^2 = 0$.

Restando ambas identidades tenemos:

$$\|f - P\|_2^2 - \|f_N - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f_N\|_2^2 \; ;$$

y recordando que por (20), $\| f - f_N \|_2^2 + \| f_N \|_2^2 = \| f \|_2^2$, obtenemos

$$\| f - P \|_2^2 = \| f - f_N \|_2^2 + \| f_N - P \|_2^2 \geq \| f - f_N \|_2^2 \; ,$$

con igualdad si y solo si $\| f_N - P \|_2 = 0$; pero esto último es equivalente a $f_N = P$. ■

Muchas de las relaciones que hemos obtenido surgen del hecho de que

$$\langle f, g \rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

definido para funciones f y g ambas a valores complejos sobre $[-\pi, \pi]$ tiene las propiedades de un *producto escalar o interno*. Vistas desde este punto de vista, muchas relaciones que hemos estado considerando son análogas a relaciones de la geometría euclidea. Explicitamos esto más adelante.

2.2.3. Relación entre $\widehat{f}$ y $\widehat{f'}$

Si f es diferenciable y la derivada f' es tal que admite coeficientes de Fourier, entonces una integración por partes da

$$\widehat{f'}(n) = (2\pi)^{-1}(f(\pi) - f(-\pi)) + in\widehat{f}(n) \; .$$

En particular,

$$\widehat{f'}(0) = (2\pi)^{-1}(f(\pi) - f(-\pi)) \; .$$

Si $f(-\pi) = f(\pi)$ (lo que se satisface si f definida sobre $\mathbb{R}$ es 2π periódica), entonces

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f'}(n)}{in} \; , \quad n \neq 0 \; .$$

Queda claro que si podemos repetir esto varias veces, o sea si f es k veces diferenciable y $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ para $j = 0, 1, \cdots, k-1$ en el sentido de derivadas a la derecha en $-\pi$ y a la izquierda en π[9], entonces

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k} \; , \quad n \neq 0 \; .$$

Como consecuencia, si $\widehat{f^{(k)}}(n)$ está acotado (por ejemplo si $f^{(k)}$ es de modulo integrable) entonces $\widehat{f}(n)$ será de orden $|n|^{-k}$. En general cuanto más diferenciable sea f más rápido decaen sus coeficientes de Fourier cuando $|n| \to \infty$.

[9] Esto se satisface automaticamente si f es k veces dieferenciable y 2π periódica sobre $\mathbb{R}$.

2.3. Excursión: Producto escalar sobre un espacio vectorial real o complejo

La noción abstracta de espacio vectorial surge al destilar las propiedades de los conocidos $\mathbb{R}^n$.

Un espacio vectorial real/complejo $\mathcal{L}$ es un conjunto donde esta definida la *suma* de dos elementos – llamados vectores – y el producto de un elemento por un número real/complejo de tal manera que se cumplan las leyes usuales: más exactamente

- A cada par de vectores v, w en $\mathcal{L}$, hay asociado un vector denotado por $v + w$ de $\mathcal{L}$ llamado la *suma* de v y w; hay un vector especial denotado por 0 y llamado (vector) cero, tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in \mathcal{L}$; para cada vector $v \in \mathcal{L}$ hay un vector $(-v) \in \mathcal{L}$ tal que $v + (-v) = 0$.

- A cada vector v y a cada número real/complejo z hay asociado un vector denotado por $z.v$ (o simplemente zv) de $\mathcal{L}$ llamado el producto de z y de v;

- se satisfacen las siguientes relaciones:

$$v + w = w + v \ ;$$

$$v + (w + x) = (v + w) + x \ ;$$

$$z.(v + w) = zv + zw \ ;$$

$$(z_1 + z_2).v = z_1.v + z_2.v \ ;$$

$$z_1.(z_2.v) = (z_1 z_2).v \ .$$

De aqui se desprenden todas las relaciones usuales de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo: $0.v = 0$, y $(-1).v = (-v)$ lo que sugiere dejarse de jorobar y escribir $-v$ para $(-v)$.

Un *producto escalar o interno* sobre un espacio vectorial real/complejo $\mathcal{L}$ es una aplicación que asocia a cada par de vectores v y w de $\mathcal{L}$ un número real/complejo $\langle v, w\rangle$ tal que:

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \ ;$$

$$\langle v, zw\rangle = z\langle v, w\rangle \ ;$$

$$\langle v, w + x\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, x\rangle \ ;$$

$$\langle v, v\rangle \geq 0 \ , \quad \text{con igualdad si y solo si } v = 0 \ .$$

De estas propiedades se deduce rapidamente que

$$\langle v + \alpha w, x + \beta y\rangle = \langle v, x\rangle + \beta\langle v, y\rangle + \overline{\alpha}\langle w, x\rangle + \beta\overline{\alpha}\langle w, y\rangle \ .$$

Con cada producto escalar asociamos el número no-negativo

$$\parallel v \parallel_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle} \ .$$

Es inmediato ver que

$$\| zv \|_2 = |z| \| v \|_2 \ ;$$

$$\| v \|_2 \geq 0 \ , \quad \text{con igualdad si y solo si } v = 0 \ ;$$

lo que casi alcanza para caracterizar a $\| v \|_2$ como el "largo" del vector v, o bien la distancia de v al vector cero. Lo que falta es

$$\| v + w \|_2 \leq \| v \|_2 + \| w \|_2 \ ;$$

Esto último es consecuencia (Ejercicio) de la igualdad

$$\| v + w \|_2^2 = \| v \|_2^2 + \| w \|_2^2 + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle \ , \tag{23}$$

y de la (famosa) desigualdad de Schwarz (Ejercicio)

$$|\langle v, w \rangle| \leq \| v \|_2 \| w \|_2 \ ,$$

con igualdad si y solo si $v = zw$ o bien $w = zv$ para algún real/complejo z.

A $\| \cdot \|_2$ se la llama norma (asociada con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Una de las nociones cruciales en un espacio vectorial con producto interno es la de *ortogonalidad*. Dos vectores v y w de $\mathcal{L}$ se llaman *ortogonales* si $\langle v, w \rangle = 0$. La intuición que uno tiene de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es utilísima: v y w son ortogonales si forman un ángulo recto. En vistas de (23), se tiene el Teorema de Pitagoras:

$$\| v + w \|_2^2 = \| v \|_2^2 + \| w \|_2^2 \ , \quad \text{si } v \text{ y } w \text{ son ortogonales} \ .$$

Un conjunto $\{e_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de vectores se llama *sistema ortonormal* si $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$, o sea si los vectores son dos-a-dos ortogonales y todos tienen norma 1.

Para un dado sistema ortogonal $\{e_n : n = 1, 2, \cdots\}$ (que puede ser finito) y cualquier vector v escribiremos

$$v_N = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v \rangle e_n \ , \ N = 1, 2, \cdots \ .$$

Es inmediato verificar que (itere el teorema de Pitagoras)

$$\| v_N \|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, v \rangle|^2 \ ;$$

y que $v - v_N$ es ortogonal a v_N, luego

$$\| v \|_2^2 = \| v - v_N \|_2^2 + \| v_N \|_2^2 \ .$$

También se puede ver que para toda familia $\{c_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de números reales/complejos c_n, se tiene $\| v - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \|_2 \geq \| v - v_N \|_2$ con igualdad si y solo si $c_n = \langle e_n, v \rangle$ para todo $n = 1, 2, , \cdots, N$.

Esto último debería resultar familiar puesto que lo hemos visto para la series de Fourier. En efecto, dejando de lado las condiciones precisas que garantizan que para dos funciones f y g definidas sobre $[-\pi,\pi]$ con valores reales la integral en

$$\langle f,g\rangle := (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)\,dt \tag{24}$$

exista, esta bien claro que si $\mathcal{L}$ denota las funciones continuas sobre $[-\pi,\pi]$ a valores complejos con la "suma"

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)\ ,\quad t\in[-\pi,\pi]$$

y el producto por escalares

$$(zf)(t)=zf(t)\ ,\quad t\in[-\pi,\pi] \text{ y } z \text{ complejo}$$

entonces $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial complejo y (24) define un producto interno. Es mś, la continuidad solo se usa para garantizar que (24) este definido; siempre que las funciones en $\mathcal{L}$ sean tales que (24) está definido para cualquier par de funciones, entonces tendremos un espacio vectorial con producto interno. Notese que ahora las funciones las estamos viendo como vectores en un espacio vectorial.

2.4. ¿Convergencia?

Empezaremos a indagar cuando y en que sentido tiene válidez la igualdad

$$¿\ f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e_n \qquad (=\lim_{N\to\infty}f_N)\ \ ? \tag{25}$$

La serie infinita a la derecha se llama la **serie de Fourier** de f; por el momento es simplemente una expresión formal. Habrá que distinguir distintas nociones de convergencia para la sucesión $\{f_N\}$. Hay una noción que está latente en lo que hemos hecho hasta ahora. Diremos que la serie –o sea $\{f_N\}$– converge a f **en media cuadrática** si

$$\lim_{N\to\infty}\| f-f_N\|_2=0\ .$$

Por (20), sabemos que esto ocurre si y solo si $\sum_{n=-N}^{N}|\widehat{f}(n)|^2\to\| f\|_2^2$.

El problema de la convergencia puntual, i.e. $\lim_{N\to\infty}f_N(t)=f(t)$, es mucho más dificil y complicado que aquel de convergencia en media cuadrática. Los resultados conocidos se entrelazan con la historia de la teoría de funciones y del análisis funcional. La serie de Fourier de una función continua (que automáticamente satisface las condicones de integrabilidad (13) y (19)) no es necesariamente puntualmente convergente. No podemos hacer una discusión inteligible aquí y menos esbozar las demostraciones pertinentes. Nos contentamos solamente con la mención de algunos resultados sobre convergencia de la serie de Fourier de una función a esta función.

Los siguientes dos resultados son elementales y usan las propiedades de las series uniformemente convergentes. Omitimos las demostraciones (son buenos ejercicios para refrescar conceptos).

Lema 1 *Si* $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ *y la serie* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ *es convergente entonces la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ *a una función continua* f *y* $\widehat{f}(n) = c_n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 2 *Si la serie de Fourier de* f *es convergente para todo* $t \in [-\pi, \pi]$*, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty} |f(t) - f_N(t)| = 0 \ , \quad \textit{para todo } t \in [-\pi, \pi] \ ,$$

y la serie

$$g(t) := i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\widehat{f}(n) e_n(t)$$

converge uniformemente para $t \in [-\pi, \pi]$*, entonces* f *es diferenciable y su derivada es* $g(t)$.

El siguiente resultado es típico:

Teorema 3 *Si* f *tiene derivada continua en* $[-\pi, \pi]$*, y* $f(-\pi) = f(\pi)$*, entonces*

1. $\lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t)$ *uniformemente para todo* $t \in [-\pi, \pi]$*;*
2. f_N *converge a* f *en media cuadrática;*
3. *(Identidad de Parseval)* $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$.

Demostración: Ya hemos indicado la equivalencia de (2) y (3) que es consecuencia del teorema de Pitagoras. Es inmediato que si hay convergencia uniforme, i.e. si (1) es cierto, entonces ya que

$$\| f - f_N \|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_N(t)|^2 \, dt$$

y podemos hacer el integrando a la derecha tan chico como sea necesario para todo t, que (2) es cierto.

Usando la relación $\widehat{f}(n) = \widehat{f'}(n)/(in)$ para $n \neq 0$, tenemos

$$\sum_{|n|\leq N} |\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{1\leq|n|\leq N} |n|^{-1} |\widehat{f'}(n)| \ . \tag{26}$$

Pero aplicando la desigualdad de Schwarz en $\mathbb{R}^{2N}$ a los vectores

$$(1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/N, 1, 1/2, \cdots, 1/N)$$

y

$$(\widehat{f'}(1), \widehat{f'}(2), \cdots, \widehat{f'}(N), \widehat{f'}(-1), \widehat{f'}(-2), \cdots, \widehat{f'}(-N)) \ ,$$

obtenemos

$$\sum_{1\leq |n| \leq N} |n|^{-1} |\widehat{f'}(n)| \leq \sqrt{2\sum_{n=1}^{N}(1/n^2)}\ \sqrt{\sum_{1\leq |n|\leq N} |\widehat{f'}(n)|^2} \ .$$

El segundo factor es igual a $\sqrt{\| (f')_N \|_2^2 - |\widehat{f'}(0)|^2}$ y por ende menor o igual a $\| (f')_N \|_2$. Ya que f' es continua, es de modulo cuadrado integrable con lo que $\| f' \|_2$ es finito y la desigualdad de Bessel nos da

$$\sqrt{\sum_{1\leq |n|\leq N} |\widehat{f'}(n)|^2} \leq \| f' \|_2 \ .$$

Para el primer factor, ya que la serie $\sum_{n=1}^{N} 1/n^2$ es convergente (sea S su suma), obtenemos

$$\sqrt{2\sum_{n=1}^{N}(1/n^2)} \leq \sqrt{2S} \ .$$

Luego, volviendo a (26),

$$\sum_{|n|\leq N} |\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(0)| + \sqrt{2S} \| f' \|_2 \ .$$

El miembro derecho es **independiente** de N. La sucesión $\sum_{|n|\leq N} |\widehat{f}(n)|$ es creciente y acotada y por ende converge. De aqui obtenemos, por ejemplo usando el criterio de convergencia uniforme de Weierstraß, que f_N converge uniformemente en t a una función g (que es continua). Falta verificar que $g = f$. Ya que $\langle e_n, f_N \rangle = \widehat{f}(n)$ si $N \geq |n|$, tenemos

$$\widehat{f}(n) = \lim_{N\to\infty} \langle e_n, f_N \rangle \tag{27}$$

Pero, $\langle e_n, g \rangle = \widehat{g}(n)$ está bien definido para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por convergencia uniforme de f_N a g, dado $\epsilon > 0$, podemos elegir N_o tal que para todo $N \geq N_o$ tengamos $|f_N(t) - g(t)| \leq 2\pi\epsilon$ **para todo** $t \in [-\pi, \pi]$. Luego, para tales N,

$$|\langle e_n, f_N \rangle - \widehat{g}(n)| \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t) - g(t)|\, dt \leq \epsilon \ .$$

Lo que demuestra que $\lim_{N\to\infty} \langle e_n, f_N \rangle = \widehat{g}(n)$, y entonces con (27),

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \ .$$

La demostración se completa usando el siguiente resultado que aunque plausible no es para nada elemental:

Teorema 4 *Si la función h es continua sobre $[-\pi,\pi]$, $h(\pi)=h(-\pi)$ y $\widehat{h}(n)=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, entonces $h=0$.*

Las condición de diferenciabilidad del teorema 3 anterior no es necesaria para obtener convergencia en media cuadrática. La demostración del siguiente resultado excede los tiempos disponibles para este curso.

Teorema 5 *Si f tiene media cuadrática (19) finita entonces la serie de Fourier de f converge a f en media cuadrática, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty}\|f-f_N\|_2=0\ ,$$

y vale la identidad de Parseval $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^2=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt$.

De aquí, el Teorema 2.4 anterior emerge como un corolario.

2.4.1. Funciones continuas a trozos

Considere una función f definida en $(-\pi,\pi)$ tal que existen finitos puntos $\{t_k : k = 1,2,\cdots,n\}$ con $-\pi =: t_o < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} := \pi$ tales que:

1. los límites laterales

$$f_-(t_k):=\lim_{t\to t_k^-}f(t)\ ,\quad f_+(t_k):=\lim_{t\to t_k^+}f(t)$$

existen y son finitos para cada $k=0,1,2,\cdots,n+1$; donde $f_-(-\pi):=f(\pi)$ y $f_+(\pi):=f(-\pi)$.

2. f es continua en cada uno de los intervalos (t_k,t_{k+1}) $(k=0,1,\cdots,n)$ y tiene allí un número finito de puntos extremales.

Decimos entonces que f satisface las condiciones de Dirichlet. Observese que entonces los límites laterales $f_-(t):=\lim_{s\to t^-}f(s)$ y $f_+(t)=\lim_{s\to t^+}f(s)$ existen para todo $t\in[-\pi,\pi]$ y son ambos iguales a $f(t)$ en aquellos t donde f es continua. Asimismo, f es de módulo integrable (13) y de módulo cuadrado integrable (19) y por ende los coeficientes de Fourier de f están definidos. Se tiene el siguiente resultado debido a Dirichlet:

Teorema 6 *(Dirichlet) Si f satisface las condiciones de Dirichlet entonces*

$$\lim_{N\to\infty}f_N(t)=\frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}\ ,\quad t\in[-\pi,\pi]\ .$$

En particular, la serie de Fourier converge a f en todo punto donde f es continua.

Hay varias variantes que modifican las condiciones de Dirichlet (hipótesis del Teorema de Dirichlet). Se pueden considerar finitas discontinuidades infinitas pero la función debe ser de módulo integrable en ellas. Se puede dispensar con la continuidad reemplazando por acotación en un número finito de subintervalos donde la función es monótona[10]. Se puede eliminar la condición de que f tiene finitos puntos extremales pero entonces la convergencia al promedio de los límites laterales es allí donde las derivadas laterales de derecha e izquierda existen; al respecto ver el libro de Churchill y Brown citado en la bibliografía.

3. Bibliografía

1. Churchill, R.V. , y Brown, J.W.: *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ediciones del Castillo, Madrid 1966.

2. M.L. Boas: *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, J. Wiley & Sons, New York, 1983. Capítulo 7.

3. E.B. Saff, and A.D. Snider: *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1993.

Los tres discuten aplicaciones a problemas de la física.

Entre los muchisimos libros que profundizan matemáticamente sobre series de Fourier se pueden consultar algunos clásicos

4. Tolstov, G.P.: *Fourier Series*, Dover, New York 1976.

5. Lanczos, C.: *Discourse on Fourier Series*, Oliver & Boyd, Edinburgh 1966.

6. Titchmarsh, E.C.: *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford 1939.

7. Zygmund, A.: *Trigonometric series, Vol. I, II*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (third edition).

Tratamientos más modernos, y muchisimo más avanzados de lo que se balbuceo aquí, son:

7. Edwards, R.E.: *Fourier series : A Modern introduction, Vol. I*, Springer New York, 1979.

8. Katznelson, Y.: *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004 (third edition).

[10]Esto lleva a pedir que la función f sea de variación acotada. Vease al respecto el libro de Carslaw (*Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover, New York 1950); el libro de Titchmarsch y el libro de Zygmund citados en la bibliografía.

A. Fórmulas generales para intervalos arbitrarios.

Si f está definida en el intervalo finito $[a,b]$ $(b>a)$ de largo $L := b-a$, los coeficientes de Fourier son los números

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{L}\int_a^b \exp\left(-in\frac{2\pi}{L}\right) f(t)\,dt\ ,\quad n\in\mathbb{Z}\ .$$

La serie de Fourier (formal) correspondiente es

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\exp\left(in\frac{2\pi}{L}t\right)\ .$$

Si f toma valores reales esta serie se escribe también como

$$\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{L}t\right)+b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{L}t\right)\right\}\ ,$$

con

$$a_n=\frac{2}{L}\int_a^b f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}t\right)\,dt\ ;\quad b_n=\frac{2}{L}\int_a^b f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{L}t\right)\,dt\ .$$

Observe que si f es periódica de período L entonces las integrales que expresan a los coeficientes $\widehat{f}(n)$, a_n y b_n son independientes del intervalo donde se integra siempre que este tenga largo L.

Lema 3 *Si φ definida en $\mathbb{R}$ es L-periódica entonces la integral $\int_c^{c+L}\varphi(t)\,dt$ es independiente de c.*

Demostración: Mostramos que cualquiera sea c, la integral es igual a la integral con $c=-L/2$. Existe un único $k\in\mathbb{Z}$ de modo que $-L/2\le c+kL<L/2$; entonces

$$\int_{-L/2}^{L/2}\varphi(t)dt=\int_{-L/2}^{c+kL}\varphi(t)dt+\int_{c+kL}^{L/2}\varphi(t)dt\ .$$

Pero, haciendo la substitución de variables $s=t+L$, y usando la periodicidad

$$\int_{-L/2}^{c+kL}\varphi(t)dt=\int_{L/2}^{c+(k+1)L}\varphi(s-L)ds=\int_{L/2}^{c+(k+1)L}\varphi(s)ds\ ;$$

de modo que

$$\int_{-L/2}^{L/2}\varphi(t)dt=\int_{L/2}^{c+(k+1)L}\varphi(s)ds+\int_{c+kL}^{L/2}\varphi(t)dt=\int_{c+kL}^{c+(k+1)L}\varphi(t)dt\ .$$

Haciendo la substitución $s=t-kL$ y usando la periodicidad

$$\int_{c+kL}^{c+(k+1)L}\varphi(t)dt=\int_c^{c+L}\varphi(s+kL)ds=\int_c^{c+L}\varphi(s)ds\ .\ \blacksquare$$

B. Teoremas de aproximación y convergencia

Teorema 7 *Si la función f definida $[-\pi,\pi]$ es continua y en $t\in(-\pi,\pi)$ los límites*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\ ,\quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

existen y son finitos entonces la serie de Fourier de f evaluada en t converge a $f(t)$.

La demostración la damos en una serie de pasos. Los primeros son válidos bajo hipótesis que exceden o son variaciones de las del enunciado del teorema y pueden aplicarse en muchos casos para obtener resultados análogos[11].

Lema 4 *Para $t\neq 0$, $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$. Además, $\lim_{t\to 0}\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} = 2n+1$.*

Demostración: Use la fórmula de adición de una progresión geométrica $\sum_{j=0}^{n} z^j = (1-z^{n+1})/(1-z)$ que implica $\sum_{j=1}^{n} z^j = (z-z^{n+1})/(1-z)$ con $z=e^{\pm it}$. ■

Obtenemos dos consecuencias inmediatas:

$$f_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e_n(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N}e_n(t)f(s)\overline{e_n(s)}\,ds$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left(\sum_{n=-N}^{N}e_n(t-s)\right)ds=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\frac{\sin((N+1/2)(t-s))}{\sin((t-s)/2)}\,ds\ ;$$

o sea

$$f_N(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\frac{\sin((N+1/2)(t-s))}{\sin((t-s)/2)}\,ds\ ; \tag{28}$$

y, ya que $\int_{-\pi}^{\pi}e_k(t)=2\pi\delta_{k,0}$ para $t\neq 0$,

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((N+1/2)(t-s))}{\sin((t-s)/2)}\,ds=1\ . \tag{29}$$

Si no diferenciamos entre f y su extensión 2π-periódica a todo $\mathbb{R}$ (que puede introducir una discontinuidad en múltiplos enteros de π), y usamos la periodicidad del integrando en (28), estas dos identidades tienen como consecuencia

$$\boxed{f(t)-f_N(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(t+x))\frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}\,ds}\ . \tag{30}$$

[11] Creo que esto se debe a Dirichlet.

La estrategia para demostrar el teorema se basa en esta relación y el siguiente análisis del integrando. Sea

$$\xi(x;t) := \frac{f(t) - f(t+x)}{\sin(x/2)} = \frac{f(t) - f(t+x)}{x} \, \frac{x}{\sin(x/2)} \; x \in \mathbb{R} \, ,$$

y

$$\xi_{\pm}(x;t) := \mp (i/2) \xi(x;t) e_{\pm}(x/2) \; , \;\; x \in \mathbb{R} \, .$$

Entonces, ya que

$$\sin((N+1/2)x) = (-i/2) \left[e_N(x) e_1(x/2) - e_{-N}(x) e_{-1}(x/2) \right] \; ,$$

tenemos

$$f(t) - f_N(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\xi_+(x;t) e_N(x) + \xi_-(x;t) e_{-N}(x) \right] = \widehat{\xi_+(\cdot;t)}(-N) + \widehat{\xi_-(\cdot;t)}(N) \; ,$$

si las funciones $\xi_{\pm}(\cdot;t)$ admiten coeficientes de Fourier lo que será el caso si $\xi(\cdot;t)$ los admite. ¡Pero estos coeficientes de Fourier tienden a 0 cuando $N \to \infty$!

Fijemos $t \in [-\pi, \pi]$ y veamos que $\xi(\cdot;t)$ es de módulo integrable y de módulo cuadrado integrable sobre $[-\pi, \pi]$. Tomemos $\epsilon > 0$ lo suficientemente chico para que $-\pi + \epsilon \leq t \leq \pi - \epsilon$ y consideremos en un entorno de radio ϵ de $x = 0$ a la función $x \mapsto g_t(x) := (f(t) - f(t+x))/x$ que es continua en $[-\epsilon, \epsilon]$ fuera de $x = 0$. Por hipótesis sobre los límites laterales desde la izquierda y derecha del cociente diferencial, tanto $|g_t|$ como $|g_t|^2$ son integrables en $[-\epsilon, 0]$ y en $[0, \epsilon]$ y por ende en $[-\epsilon, \epsilon]$. Fuera del intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$, la funciones $|g_t|$ y $|g_t|^2$ son integrable como producto de la función continua de módulo y módulo cuadrado integrables $x \mapsto f(t) - f(t+x)$ y la función continua $x \mapsto 1/x$ que es de módulo y módulo cuadrado integrables. La función $x \mapsto x/\sin(x/2)$ es continua en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$ ya que $\sin(x/2)$ no se anula allí salvo en $x = 0$ y se tiene $\lim_{x \to 0} x/\sin(x/2) = 2$. Pero entonces $\xi(x;t) = g_t(x) x/\sin(x/2)$ es de módulo y de módulo cuadrado integrables en $[-\pi, \pi]$. Lo mismo es el caso para $\xi_{\pm}(\cdot;t)$ pues estas funciones son producto de ξ con una función continua. Los coeficientes de Fourier $\widehat{\xi_{\pm}(\cdot;t)}(n)$ están bien definidos y por el Lema de Riemann-Lebesgue (22) que se dedujo del Teorema 1 cuyas hipótesis satisfacen $\xi_{\pm}(\cdot;t)$. Esto completa la demostración del teorema.

Teorema 8 *(Teorema de Aproximación) Sea f es continua sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ y $\epsilon > 0$.*

1. *existe un polinomio trigonométrico P tal que $\|f - P\|_2 \leq \epsilon$.*
2. *si $f(\pi) = f(-\pi)$, existe un polinomio trigonométrico P tal que $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.*

Demostración: Demostramos primero la segunda afirmación. Por la continuidad existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| \leq \epsilon/4$ cuando $|t - s| \leq \delta$. Si $2\pi/\delta$ es entero reemplace δ por algo más chico tal que ese cociente no sea entero. Con $t_o = -\pi$, sea $t_k = t_o + k\delta$ para $k = 1, 2, \cdots, N-1$ donde $N-1$ es el mayor número natural menor a $2\pi/\delta$; sea $t_N = \pi$. Entonces $-\pi = t_o < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = \pi$ es una partición del intervalo. Todo $t \in [-\pi, \pi]$ pertenece a exactamente uno de los intervalos $[t_k, t_{k+1})$ lo que nos permite definir

$$g(t) = f(t_k) + \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\delta}(t - t_k) \ \ , \ \ t_k \leq t \leq t_{k+1} \ , \ \ k = 0, 1, 2 \cdots N-1 \ .$$

La construcción garantiza que g es continua y tiene derivada continua y constante en cada uno de los intervalos (t_k, t_k+1) para $k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. Además $g(\pi) = f(\pi) = f(-\pi)$, por lo tanto g satisface las hipótesis de la primera proposición y existe entonces $K \in \mathbb{N}$ tal que $|g(t) - g_K(t)| \leq \epsilon/2$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Pero, para todo t se tiene $t \in [t_k, t_{k+1})$ con algún k y entonces

$$|f(t) - g(t)| = |f(t) - f(t_k) - \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\delta}(t - t_k)|$$

$$\leq |f(t) - f(t_k)| + \frac{|f(t_{k+1}) - f(t_k)|\,|t - t_k|}{\delta} \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon/2 \,,$$

ya que $|t - t_k| \leq \delta$ y $|t_{k+1} - t_k| = \delta$. Pero entonces

$$|f(t) - g_K(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - g_K(t)| = \epsilon \ .$$

Pasamos a la primera afirmación. Si $f(-\pi) = f(\pi)$ entonces tomamos un polinomio trigonométrico P tal que $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon^2$. Entonces

$$\|f - P\|_2^2 = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - P(t)|^2\, dt \leq \epsilon^2 \ .$$

Si $f(-\pi) \neq f(\pi)$ sea C el máximo valor de $|f(x)|$ en nuestro intervalo. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \text{mín}\{\pi\epsilon^2/(8C^2), 2\pi\}$. Definamos

$$h(t) := \begin{cases} f(t) & , \quad -\pi \leq t \leq \pi - \delta \\ f(\pi - \delta) + \frac{f(-\pi)}{\delta}(t - \pi + \delta) & , \quad \pi - \delta < t \leq \pi \end{cases} \ .$$

Claramente h es continua y satisface $h(\pi) = h(-\pi)$ de modo que apelando a la segunda afirmación, hay un polinomio trigonométrico con $\|h - P\|_2 \leq \epsilon/2$. Estimamos

$$\|f - h\|_2^2 = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - h(t)|^2\, dt = (1/2\pi)\int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(t) - h(t)|^2\, dt \ .$$

Ahora, en el intervalo $[\pi - \delta, \pi]$, h es el segmento de recta que une los puntos $(\pi - \delta, f(\pi - \delta))$ con $(\pi, f(-\pi))$ y se tiene $f(-\pi) \leq h(t) \leq f(\pi - \delta)$ o bien $f(\pi - \delta) \leq h(t) \leq f(-\pi)$ y en todo caso $-C \leq h(t) \leq C$ o sea: $|h(t)| \leq C$. Por lo tanto, en este intervalo, usando la desigualdad

$$(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \iff (x-y)^2 \geq 0$$

valida para reales x, y, obtenemos

$$|f(t) - h(t)|^2 \leq 2|f(t)|^2 + 2|h(t)|^2 \leq 4C^2 \ .$$

Entonces

$$\|f - h\|_2^2 \leq 4C^2\delta/(2\pi) \leq \epsilon^2/4 \ ;$$

de modo que

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - P\|_2 \leq \epsilon \ .$$

Teorema 9 *El sistema* $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *es completo. Para toda función* f *de módulo cuadrado integrable su serie de Fourier converge a* f *en media cuadrática.*