# Bestiario de Álgebra Lineal*

G. A. Raggio
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

## 0. Advertencia

Más que un breviario del álgebra lineal, la presente es una lista de definiciones y resultados de la teoría de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales entre ellos. Como casi toda lista es aburrida; esto no quiere decir que los objetos a los que se refiere la lista sean aburridos.

Siguiendo a Euclides, los resultados se enuncian como "Proposiciones" sin distinguir su importancia, dificultad, etc.

La notación es más o menos la estandardizada, pero no es sagrada. Así, $\mathbb{N}$ denota los números naturales sin el cero. El complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$ es $\overline{z}$ y nunca jamás $z^*$. La estrellita se reserva para el adjunto; lamentablemente $(z \cdot \mathbf{1})^* = \overline{z}\mathbf{1}$ pero bueno. . . El lector habrá inferido, espero, que $\mathbf{1}$ es "la identidad". Así es; y es la identidad en contextos muy distintos sin que se distinga el $\mathbf{1}$ que corresponde. Los productos escalares complejos son *lineales en la segunda componente y conjugados lineales en la primera componente.*

Sigue un Índice, y al final hay un índice alfabético.

## Índice



*Esta versión es provisoria. Estaré agradecido si me comunican errores, horrores, etc.

# 1. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** $\boldsymbol{V}$ es un conjunto –cuyos elementos se denominan **vectores**– con una operación binaria $+$ y un producto $\cdot$ por números complejos o reales, tales que: (1) $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \boldsymbol{V}$ satisface todas las propiedades de la suma usual; a saber: es comutativa $x + y = y + x$, es asociativa $x + (y + z) = (x + y) + z$, hay un elemento neutro $0 \in \boldsymbol{V}$ tal que $x + 0 = x$ y para todo $x \in \boldsymbol{V}$ hay $y \in \boldsymbol{V}$ tal que $x + y = 0$; (2)$\mathbb{C}$ (o, $\mathbb{R}$) $\times \boldsymbol{V} \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \in \boldsymbol{V}$ con $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ y $1 \cdot x = x$; y además (3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, y $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Los números complejos o reales se denominen genéricamente **escalares**. El elemento $y$ tal que $x+y = 0$ es único y se anota $-x$. Y el $\cdot$ se escribe solo cuando puede haber confusión. Se puede generalizar la definición permitiendo que los escalares provengan de un cuerpo arbitrario[1]. Todos los espacios vectoriales tratados aquí serán sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y el símbolo $\mathbb{S}$ denota a $\mathbb{C}$ o a $\mathbb{R}$.

## 1.1. Dependencia lineal, bases y dimensión, subespacios

Un conjunto $S \subset \boldsymbol{V}$ se dice **linealmente dependiente** si existe un número finito de vectores $x_1, x_2, \cdots, x_n \in S$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ no todos nulos tales que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice **linealmente independiente**. Un vector $x \in \boldsymbol{V}$ es **combinación lineal** de los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \boldsymbol{V}$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tales que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n$.

Una **base**[2] $B$ de $\boldsymbol{V}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de $\boldsymbol{V}$ tales que todo $x \in \boldsymbol{V}$ es combinación lineal de vectores en $B$. Las **componentes** de $x \in \boldsymbol{V}$ en la base $B$ son los escalares $x_j$ tales que $x = \sum_j x_j b_j$ con $b_j \in B$ (¡la suma es finita!).

**Proposición 1.1** *Las componentes de un vector en una base son unívocas.*

**Proposición 1.2** *Todo espacio vectorial admite una base. Si $\boldsymbol{V}$ admite una base finita entonces todas las bases de $\boldsymbol{V}$ constan de la misma cantidad de elementos.*

[1]Muchos resultados de los que siguen dependen crucialmente de que en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$, $1 + 1 \neq 0$.
[2]Más precisamente una base de Hamel.

Si $\boldsymbol{V}$ admite base finita se dice que $\boldsymbol{V}$ es de dimensión finita $n$ donde $n$ es el número de elementos de cualquier base de $\boldsymbol{V}$. En caso contrario se dice que $\boldsymbol{V}$ es de dimensión infinita. $\dim(\boldsymbol{V})$ denota la dimensión de $\boldsymbol{V}$.

**Proposición 1.3** *Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial complejo (resp. real) de dimensión finita $n$ y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ es una base de $\boldsymbol{V}$ entonces*

$$\Phi_B(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ ,$$

*donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las componentes de $x$ en la base $B$, es una transformación lineal inyectiva y suryectiva*[3] *de $\boldsymbol{V}$ en $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$), cuya inversa es la aplicación lineal*

$$\Phi_B^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \ .$$

Un **subespacio** $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{V}$ es un conjunto tal que toda combinación lineal de vectores de $\boldsymbol{E}$ está en $\boldsymbol{E}$. Como espacio vectorial en si mismo, un subespacio $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{V}$ tiene una dimensión que anotamos $\dim(\boldsymbol{E})$.

**Proposición 1.4** *Si $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{V}$ es un subespacio entonces $\dim(\boldsymbol{E}) \leq \dim(\boldsymbol{V})$. Para toda base $\mathcal{W}$ de $\boldsymbol{E}$, hay una base $\mathcal{V}$ de $\boldsymbol{V}$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.*

**Proposición 1.5** *Si $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ son subespacios de $\boldsymbol{V}$ entonces $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F}$ es un subespacio de $\boldsymbol{V}$. Para todo subconjunto $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ no vacio, hay un único subespacio $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{V}$ tal que si $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ es un subespacio con $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{W}$ entonces $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{W}$.*

Escribimos $\operatorname{lin}(\boldsymbol{M})$ para el subespacio minimal asociado con $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ y lo llamamos **subespacio generado** por $\boldsymbol{M}$.

**Proposición 1.6** *Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ no es vacio, entonces $lin(\boldsymbol{M})$ es el conjunto de las combinaciones lineales de vectores de $\boldsymbol{M}$.*

**Proposición 1.7** *Si $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{V}$ son subespacios de $\boldsymbol{V}$, entonces $\dim(lin(\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F})) + \dim(\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F}) = \dim(\boldsymbol{E}) + \dim(\boldsymbol{F})$.*

Dos subespacios $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{V}$ se dicen **complementarios** si $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F} = \{0\}$ y todo $x \in \boldsymbol{V}$ es combinación lineal de un vector de $\boldsymbol{E}$ con uno de $\boldsymbol{F}$; vale decir: $\operatorname{lin}(\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{V}$.

**Proposición 1.8** *Si $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{V}$ son subespacios complementarios entonces cualquiera sea $x \in \boldsymbol{V}$ hay un único $e \in \boldsymbol{E}$ y un único $f \in \boldsymbol{F}$ tales que $x = e + f$.*

**Suma directa** Si $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ son espacios vectoriales sobre los mismos escalares, entonces la **suma directa** $\boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{V}$ es $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$ con la siguiente suma y multiplicación por escalares

$$\alpha \cdot (u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (\alpha u_1 + u_2, \alpha u_2 + v_2) \ .$$

**Proposición 1.9** *$\boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial.*

En el contexto de subespacios $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{V}$ complementarios, se escribe $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F}$. Esta notación es consistente con la definición de suma directa si se identifica a $\boldsymbol{E}$ con $\boldsymbol{E} \times \{0\}$ y a $\boldsymbol{F}$ con $\{0\} \times \boldsymbol{F}$.

[3] Vea el §2 por estos términos.

## 1.2. Producto escalar

Un **producto escalar** en un espacio vectorial complejo es una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}$ con valores en $\mathbb{C}$ tal que:

1. $\langle\alpha\cdot f+g,\beta\cdot h+k\rangle=\overline{\alpha}\beta\langle f,h\rangle+\overline{\alpha}\langle f,k\rangle+\beta\langle g,h\rangle+\langle g,k\rangle$;
2. $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$;
3. $\langle f,f\rangle\geq 0$ con igualdad si y sólo si $f=0$.

Aquí, $\overline{\alpha}$ denota el **complejo conjugado** del número complejo $\alpha$.

En el caso de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la definición es análoga, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es real y simplemente se omiten las conjugaciones complejas en las condiciones 1. y 2.

En ambos casos, el número no-negativo $\|f\|:=\sqrt{\langle f,f\rangle}$, es una norma (ver §4.2).

**Proposición 1.10** *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar sobre un espacio vectorial complejo o real $\boldsymbol{V}$ entonces*

$$|\langle f,g\rangle|\leq\|f\|\,\|g\|$$

*habiendo igualdad si y sólo si $f$ y $g$ son linealmente dependientes.*

Los espacios vectoriales reales de dimensión finita con producto escalar se tratan en §5.3 (espacios euclideos). Los espacios vectoriales complejos con producto escalar (espacios de Hilbert complejos) se tratan en §5.4.

## 1.3. $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{S}$ denota o bien $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Para $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{S}^n$ denota el conjunto de $n$-tuplos $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ de números en $\mathbb{S}$ con la suma

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

y la multiplicación por escalares

$$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)\ .$$

En $\mathbb{S}^n$ hay además la noción clásica de distancia (ver §4.1)

$$d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)):=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^2}\ ,$$

y asociado a esta distancia el largo (o distancia a $(0,0,\cdots,0)=:0$; ver §4.2)

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}\ .$$

Ambos conceptos están intimamente ligados con el producto escalar

$$\langle(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\rangle:=\sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}y_j\ ,$$

donde ha de obviarse la toma de complejos conjugados en el caso $\mathbb{S}=\mathbb{R}$.

El siguiente esquema de $\mathbb{S}^n$ es usado sistemáticamente en álgebra lineal. Se identifica a $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^n$ con la columna (o matriz $n \times 1$)

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

y con la "fila" (o matriz $1 \times n$) $[x]^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. El producto escalar se escribe

$$[\overline{x}]^T \cdot [y]$$

(lo que es consistente con la definición –§2.1– de la multiplicación de matrices), donde $\overline{x} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$; entonces

$$\|x\| = \sqrt{[\overline{x}]^T \cdot [x]}\ , \quad d(x, y) = \sqrt{([\overline{x}] - [\overline{y}])^T \cdot ([x] - [y])}\ .$$

# 2. Transformaciones lineales

Si $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ son espacios vectoriales sobre los mismos escalares, una **transformación lineal** o **aplicación lineal** o, también **mapa lineal** $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es un mapa lineal de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{W}$: $T(x+y) = Tx + Ty$, y $T(\alpha x) = \alpha(Tx)$. Si $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ entonces escribimos $T(\boldsymbol{S}) := \{Tx :\ x \in \boldsymbol{S}\}$. La **imagen** de una transformación lineal $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es $T(\boldsymbol{V})$. $T$ se dice **suryectiva** si para todo $w \in \boldsymbol{W}$, hay $v \in \boldsymbol{V}$ con $Tv = w$; o sea $T(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{W}$. El **núcleo** de $T$ es $\ker(T) := \{x \in \boldsymbol{V} :\ Tx = 0\}$.

**Proposición 2.11** *Si $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es una transformación lineal entonces $\ker(T)$ es un subespacio de $\boldsymbol{V}$, y $T(\boldsymbol{V})$ es un subespacio de $\boldsymbol{W}$. La dimensión de $\ker(T)$ mas la dimensión de $T(\boldsymbol{V})$ es igual a la dimensión de $\boldsymbol{V}$*[4].

$T$ se dice **inyectivo** si $x \neq y$ implica que $Tx \neq Ty$; esto es lo mismo que decir que $\ker(T) = \{0\}$. En tal caso la **inversa** o **inverso** de $T$ es el mapa $K$ definido sobre $T(\boldsymbol{V}) \subset \boldsymbol{W}$, por $Kw := v$ si $Tv = w$. Decimos que $T$ es **invertible** si $T$ es inyectivo y suryectivo en cuyo caso la inversa se anota $T^{-1}$.

Si $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ y $S : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{X}$ son transformaciones lineales el **producto** $ST : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{X}$ es la transformación lineal definida por $(ST)x := S(Tx)$, $x \in \boldsymbol{V}$.

La transformación lineal de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{V}$ dada por $x \to x$ se anotará con $\mathbf{1}$ o con $\mathbf{1}_{\boldsymbol{V}}$ si se requiere distinguirla.

Si $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{Z}$, y $T : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{U}$, $S : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ son transformaciones lineales, entonces $T \oplus S$ es la transformación lineal de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{W}$ definida por $(T \oplus S)(x \oplus y) = (Tx) \oplus (Sy)$.

### 2.0.1. Funcionales lineales

Las transformaciones lineales $\boldsymbol{V} \to \mathbb{C}$, o bien $\boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ según sobre que escalares está definido el espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, reciben un nombre especial; se llaman **funcionales lineales**. Los siguientes resultados formulados para el caso de dimensión finita, valen en dimensión infinita si $\boldsymbol{V}$ es normado y los funcionales lineales son continuos (ver §4.2).

**Proposición 2.12** *Si $\phi$ es un funcional lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita $\boldsymbol{V}$ entonces el núcleo $\boldsymbol{N}$ de $\phi$ es un subespacio maximal de $\boldsymbol{V}$. O sea: si $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ para un subespacio $\boldsymbol{M}$ entonces $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}$ o $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{V}$. Inversamente, si $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{V}$ es un subespacio maximal de $\boldsymbol{V}$, entonces existe un funcional lineal sobre $\boldsymbol{V}$ cuyo núcleo es $\boldsymbol{N}$.*
*Dos funcionales lineales sobre $\boldsymbol{V}$ tienen el mismo núcleo si y sólo si son proporcionales entre si.*

[4] $\infty + n = \infty$.

**Proposición 2.13** *Dados $n+1$ funcionales lineales $\phi_0$, $\phi_1$, $\cdots$, $\phi_n$ sobre un espacio vectorial de dimensión finita, $\phi_0$ es combinación lineal $\phi_0 = \alpha_1 \cdot \phi_1 + \alpha_2 \cdot \phi_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \phi_n$, con escalares $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\cdots$, $\alpha_n$; si y sólo si el núcleo de $\phi_0$ contiene a la intersección de los núcleos de los $\phi_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$.*

## 2.1. Matrices

Una matriz $n \times m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ $A$ es un arreglo rectangular de $nm$ números complejos o reales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3m} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Estos números $a_{j,k}$ –con $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$– se llaman **entradas matriciales** o **elementos de matriz**. Es frecuente la notación $A = [a_{j,k}]$. Si $A$ y $B$ son matrices de la misma dimensión $(n \times m)$ cuyas entradas están en el mismo cuerpo $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, entonces la matriz $\alpha A + B$ está definida por $\alpha A + B = [\alpha a_{j,k} + b_{j,k}]$. Si $A$ es una matriz $(n \times m)$ y $B$ es una matriz $(m \times p)$ con entradas en los mismos escalares, su **producto** es la matriz $(n \times p)$ dada por

$$AB := \left[ \sum_{\ell=1}^{m} a_{j,\ell} b_{\ell,k} \right].$$

Toda matriz $A$, $n \times m$, multiplicada por derecha por una matriz $m \times 1$ produce una matriz $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3m} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2m}x_m \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \cdots + a_{3m}x_m \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \cdots + a_{4m}x_m \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}.$$

Vale decir asocia a cada vector (columna) de $\mathbb{S}^m$ un vector (columna) de $\mathbb{S}^n$; y esta aplicación es lineal. Vice versa, dada una transformación lineal $T : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$, defina la matriz

$$[T] := [(Te^{(k)})_j]$$

donde $(Te^{(k)})_j$ es la $j$-ésima componente de la imagen bajo $T$ del vector $e^{(k)} \in \mathbb{S}^m$ cuyas componentes son $(e^{(k)})_p = \delta_{k,p}$. Entonces

$$[Tx] = [T][x]$$

donde

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto las matrices junto a su suma y multiplicación constituyen un modelo simple de las transformaciones lineales junto con su suma y producto.

Para matrices se usa la misma nomenclatura que para transformaciones lineales (núcleo, invertible, etc.).

Si $A = [a_{j,k}]$ es una matriz $(n \times m)$, definimos su **adjunta** como la matriz $(m \times n)$ $A^*$ cuyos elementos son

$$(A^*)_{k,j} = \overline{a_{j,k}} \ , \ \ 1 \le j \le n \ , \ \ 1 \le k \le m \ ;$$

la **transpuesta** es la matriz $A^T$ $(m \times n)$ cuyos entradas son

$$(A^T)_{k,j} = a_{j,k} \ , \ \ 1 \le j \le n \ , \ \ 1 \le k \le m \ .$$

La definición dada sirve para matrices con entradas en $\mathbb{C}$ o en $\mathbb{R}$. En el caso real, la adjunta coincide con la transpuesta y suele preferirse llamarla transpuesta. Notese que esto es consistente con la notación de §1.3. El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ suele escribirse $x^T \cdot y$; mientras que en $\mathbb{C}^n$, como $x^* \cdot y$.

## 2.2. Representación matricial

En este apartado suponemos que $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ son espacios vectoriales de dimensión finita $n$ y $m$ respectivamente.

Sea $\mathcal{V} := \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de $\boldsymbol{V}$ y $\mathcal{W} := \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ una base de $\boldsymbol{W}$. Si $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es una transformación lineal, entonces las componentes de $Ax$ en la base $\mathcal{W}$

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} (Ax)_j w_j$$

se obtienen de las componentes de $x$ en la base $\mathcal{V}$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

por medio de la fórmula

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k \ , \ \ j = 1, 2, \cdots m \ ,$$

donde

$$a_{j,k} := (Av_k)_j \ , \ \ j = 1, 2, \cdots, m \ ; \ \ k = 1, 2, \cdots, n \ .$$

En palabras: $a_{j,k}$ es la componente $j$-ésima respecto de la base $\mathcal{W}$ de la imagen bajo $A$ del vector $k$-ésimo de la base $\mathcal{V}$. O,

$$[Ax]_{\mathcal{W}} = [A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}} [x]_{\mathcal{V}} \ ,$$

con

$$[A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}} = [a_{j,k}] = [(Av_k)_j] \ .$$

En términos de los isomorfismos canónicos $\Phi : \boldsymbol{V} \to \mathbb{S}^n$ y $\Psi : \boldsymbol{W} \to \mathbb{S}^m$ (ver proposición 1.3), tenemos

$$\Psi(Ax) = [A]\Phi(x)$$

donde $[A]$ es la matriz $m \times n$ cuyos elementos son $a_{j,k}$. Si hace falta especificar de que bases se trata, usamos $[A]_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$. Así, a cada transformación lineal le corresponde una matriz $[A]$ una vez elegidas bases de $\boldsymbol{V}$ y de $\boldsymbol{W}$; y viceversa.

**Proposición 2.14** *Si $A, B : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ y $C : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{X}$ entonces $[(\alpha A+B)C] = \alpha[A][C]+[B][C]$ cualquiera sea la elección de bases de $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ y $\boldsymbol{X}$.*

Procedimiento práctico para encontrar $[A]_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$:

1. Enumere los vectores que forman la base $\mathcal{V}$ de $\boldsymbol{V}$ del 1 al $n$: $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Enumere los vectores que forman la base $\mathcal{W}$ de $\boldsymbol{W}$ del 1 al $m$: $w_1, w_2, \cdots, w_m$.

2. Ponga $k = 0$.

3. Redefina $k = k + 1$, y determine la imagen $Av_k$ de $v_k$.

4. Determine las $m$ componentes de $Av_k$ respecto de la base $\mathcal{W}$ llamando $a_{j,k}$ a la componente $j$-ésima $(j = 1, 2, \cdots, m)$. La columna $k$-ésima de $[A]_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$ es:

$$\begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \cdot \\ a_{m,k} \end{bmatrix} .$$

   Si $k < n$ vaya al punto 3.

**Cambios de base** Sean $\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \cdots, \widetilde{v}_n\}$ y $\widetilde{\mathcal{W}} = \{\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \cdots, \widetilde{w}_m\}$ bases de $\boldsymbol{V}$ y de $\boldsymbol{W}$ respectivamente.

**Proposición 2.15** *Hay dos transformaciones lineales invertibles unívocas $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ y $S : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$ tales que*

$$Tv_j = \widetilde{v}_j \ , \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \ , \quad Sw_k = \widetilde{w}_k \ , \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \ . \tag{1}$$

*Viceversa si $T$ y $S$ son lineales e invertibles las fórmulas (1) definen una base de $\boldsymbol{V}$ y de $\boldsymbol{W}$ respectivamente.*

**Proposición 2.16**

$$[A]_{\widetilde{\mathcal{W}},\widetilde{\mathcal{V}}} = [S]_{\widetilde{\mathcal{W}},\mathcal{W}}[A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}}[T^{-1}]_{\mathcal{V},\widetilde{\mathcal{V}}} \ ,$$

*donde $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ y $S : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$ son las transformaciones lineales determinadas por $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ en la proposición anterior. Se tiene, $[T^{-1}] = [(\widetilde{v}_j)_k]$ y*

## 2.3. Operadores

Es usual llamar **operadores** (o operadores lineales) a las aplicaciones lineales de un espacio vectorial en si mismo. Ya que si $A, B : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ entonces $\alpha A + B$ es una transformación lineal de $\boldsymbol{V}$ en si mismo, el conjunto $\mathcal{L}(\boldsymbol{V})$ de operadores conforman un espacio vectorial sobre los mismos escalares que $\boldsymbol{V}$. Además, $AB : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, y $A(\alpha B + C) = \alpha AB + AC$, con lo cual $\mathcal{L}(\boldsymbol{V})$ tiene la estructura de un álgebra (¡no comutativa!).

**Proyecciones** Entre los operadores más simples están las **proyecciones**[5], o sea los operadores lineales $P : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ tales que $P^2 := PP = P$. Entre las proyecciones se encuentran la identidad $\mathbf{1}$ y el operador nulo 0.

**Proposición 2.17** *Para un operador $P : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

[5] Reservamos el término **proyección ortogonal** o **ortoproyector** para una proyección $P$ en un espacio vectorial munido de un producto escalar tal que $P^* = P$.

1. *$P$ es una proyección;*

2. *$\mathbf{1} - P$ es una proyección;*

3. *para todo $z \in \boldsymbol{V}$ hay $u, w \in \boldsymbol{V}$ con $z = u + w$, $Pu = u$ y $Pw = 0$.*

*En tal caso $\boldsymbol{U} := P(\boldsymbol{V}) = \{x \in \boldsymbol{V} : \ Px = x\}$ y $\boldsymbol{W} := (\mathbf{1} - P)(\boldsymbol{V}) = \ker(P)$ son subespacios complementarios.*

**Proposición 2.18** *Si $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ son subespacios complementarios de $\boldsymbol{V}$ entonces hay una única proyección $P : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ tal que $P(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ es el núcleo de $P$. Se tiene $\boldsymbol{F} = (\mathbf{1} - P)(\boldsymbol{V})$.*

El mapa $P$ es la identidad si restringimos a $P$ al subespacio $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$, y es el operador nulo si lo restringimos al subespacio $\boldsymbol{W}$. Del mismo modo, si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces el operador $zP + w(\mathbf{1} - P)$ es un operador que multiplica por $z$ a los vectores en $\boldsymbol{U}$ y por $w$ a aquellos en $\boldsymbol{W}$. Si tenemos proyecciones $P_1$, $P_2, \cdots, P_k$ tales que $P_j P_m = \delta_{j,m} P_j$ para $j, k \in \{1, 2, \cdots, k\}$ y además $P_1 + P_2 + \cdots + P_k = \mathbf{1}$, entonces los operadores $z_1 P_1 + z_2 P_2 + \cdots + z_k P_k$ donde $z_1, z_2, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ son operadores muy simples en tanto y en cuanto multiplican a la "componente" en $P_j \boldsymbol{V}$ del vector $v$ por $z_j$.

**Transformaciones de semejanza** $A, B : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, se dicen **semejantes** si existe $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ invertible tal que $T^{-1}AT = B$. En muchos problemas el objetivo es dada la aplicación $A$ encontrar al operador semejante $B$ más simple posible.

### 2.3.1. Determinantes

La matriz asociada a un operador es cuadrada. La **determinante** de una matriz cuadrada $n \times n$, $A$, es el escalar

$$det(a_{j,k}) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} p(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \cdots a_{n,\pi(n)} \ ,$$

donde la suma es sobre las permutaciones $\pi$ de $n$ objetos y $p(\pi)$ es la paridad de la permutación $\pi$.

**Proposición 2.19** *(Expansión de Laplace) Si $A = (a_{j,k})$ es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$, entonces*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{k,j} det(M_{k,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} det(M_{j,k})$$

*para todo $k = 1, 2, \cdots, n$, donde $M_{j,k}$ es la matriz cuadrada de dimensión $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de $A$ eliminando la $j$-ésima fila y la $k$-ésima columna.*

Este resultado puede usarse para definir la determinante recursivamente (en la dimensión) partiendo de la definición de la determinate de una matriz $(1 \times 1)$; $det([z]) = z$.
Más profunda y rica es la relación de la determinante con el volumen (en $\mathbb{R}^n$). Viendo a la determinante como función de las $n$ columnas (o bien, alternativamente, de las $n$ filas) de la matriz,

$$det(a_{j,k}) =: D(a_{\cdot,1}, a_{\cdot,2}, \cdots, a_{\cdot,n}) \ ,$$

es salvo un signo igual al volumen del poliedro formado por los $n + 1$ vértices 0 y $a_{\cdot,j}$, $j = 1, 2, \cdots, n$. La determinante es entonces la única función definida en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \times \cdots \times \mathbb{S}^n$ que cumple: (1) $D(v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0$ si dos (o más) de los $v_j \in \mathbb{S}^n$ son iguales; (2) Dejando todos menos uno de los vectores fijos, $D$ es lineal en el vector variable; (3) $D(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$ donde $e_j \in \mathbb{S}^n$ es el vector cuya única componente no nula es la $j$-ésima y esta es 1.

**Proposición 2.20** *Si $A = (a_{j,k})$ es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *las columnas de $A$ son linealmente independientes;*

2. *las filas de $A$ son linealmente independientes;*

3. $det(A) \neq 0$.

**Proposición 2.21** *Si $A$ y $B$ son matrices cuadradas de la misma dimensión, entonces $det(AB) = det(A)det(B)$.*

**Proposición 2.22** *La matriz cuadrada $A$ es invertible si y sólo si $det(A) \neq 0$.*

**Proposición 2.23** *Las matrices semejantes tienen la misma determinante.*

### 2.3.2. Dimensión 2

Se tiene

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ ,$$

y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = (det(A))^{-1} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} ; ,$$

si la determinante no se anula.

### 2.3.3. Dimensión 3

Se tiene

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{33}a_{12}a_{21} \ ,$$

y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= (det(A))^{-1} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11} \\ a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} ,$$

si la determinante no se anula.

# 3. Teorema espectral y forma canónica de Jordan

Los operadores $A = z_1P_1 + z_2P_2 + \cdots + z_kP_k$ donde $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_k$ son proyecciones que satisfacen $P_jP_k = \delta_{j,k}P_j$, $P_1 + P_2 + \cdots + P_k = \mathbf{1}$; y $z_1, z_2, \cdots , z_k$ son escalares se dicen **diagonalizables** ya que si elegimos una base arbitraria en cada uno de los subespacios $P_j\boldsymbol{V}$ que descomponen a $\boldsymbol{V}$ en una suma directa, $\boldsymbol{V} = P_1\boldsymbol{V} \oplus P_2\boldsymbol{V} \oplus \cdots \oplus P_k\boldsymbol{V}$, obtendremos que la matriz asociada a $A$ es diagonal y donde $z_j$, aparece en la diagonal tantas veces como la dimensión de $P\boldsymbol{V}_j$. Esto también nos indica de que no todo operador es diagonalizable. Un ejemplo es un operador $A$ definido en un espacio (complejo o real) de dimensión 2 cuya matriz en alguna base tome la forma[6]

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

[6]Se verifica inmediatamente que si $A$ es semejante a una matriz diagonal, esa matriz debe ser 0.

La diagonalizabilidad de un dado operador depende crucialmente de los escalares permitidos. La matriz

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y si lo es sobre $\mathbb{C}$.

**Espectro** Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial complejo[7]. $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **autovalor** del operador $A$ si existe $0 \neq v \in \boldsymbol{V}$ tal que $Av = \lambda v$. En tal caso, $v$ se llama un **autovector** de $A$ al autovalor $\lambda$. Llamamos **espectro**[8] de $A$, y lo anotamos $\sigma(A)$ al conjunto de los autovalores de $A$. Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $\boldsymbol{E}_\lambda := \{x \in \boldsymbol{V} : \ Av = \lambda v\}$ es un subespacio de $\boldsymbol{V}$ (el subespacio generado por los autovectores a ese autovalor) y su dimensión se denomina **multiplicidad geométrica** de $\lambda$.

**Proposición 3.24** *(Teorema Espectral) Si el espacio vectorial complejo es de dimensión finita y $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ es un operador, entonces $\sigma(A)$ no es vacio y para todo $\lambda \in \sigma(A)$ existe una única proyección $P_\lambda$ y un único operador $D_\lambda$ tales que:*

1. $P_\lambda A = AP_\lambda = P_\lambda A P_\lambda = \lambda P_\lambda + D_\lambda$;
2. $D_\lambda P_\lambda = P_\lambda D_\lambda = D_\lambda$;
3. $D_\lambda^{m(\lambda)} = 0$;

*donde $m(\lambda)$ es la dimensión del subespacio $\{x \in \boldsymbol{V} : \ P_\lambda x = x\}$. Se tiene $P_\lambda P_\mu = 0$ si $\lambda \neq \mu$,*

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = \mathbf{1}$$

*y*

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda + D_\lambda \ .$$

*Se tiene $P_\lambda(\boldsymbol{V}) = \ker((A - \lambda \mathbf{1})^n)$ y*

$$\ker(P_\lambda) = \bigoplus_{\lambda \neq \mu \in \sigma(A)} \ker((A - \mu \mathbf{1})^n) \ .$$

¡Observe que ambas sumas pueden formularse como sumas directas! Un operador $A$ tal que $A^p = 0$ para algún $p \in \mathbb{N}$, se dice **nilpotente**. Los operadores $D_\lambda$ son nilpotentes[9]. El número natural $m(\lambda)$ se denomina **multiplicidad algebraica** del autovalor $\lambda$; este número es mayor o igual a la multiplicidad geométrica de $\lambda$ ya que $\boldsymbol{E}_\lambda \subset P_\lambda \boldsymbol{V}$. Un autovalor se dice **simple** o no degenerado, si $m(\lambda) = 1$. En tal caso la multiplicidad geométrica coincide con la algebraica y se tiene $D_\lambda = 0$. Cuando $m(\lambda) \geq 2$, el autovalor se dice **degenerado**. Un autovalor $\lambda$ se llama **semisimple**, si $D_\lambda = 0$. La multiplicidad geométrica coincide con la algebraica si y sólo si el autovalor es semisimple. Por lo tanto, un operador es diagonalizable si todos sus autovalores son semisimples.

Recordamos que si $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ y elegimos una base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de $\boldsymbol{V}$, entonces a $A$ le corresponde una matriz $n \times n$, $\mathbb{A} = (a_{j,k})$, tal que si $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, entonces $Av = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{j,k} v_k\right) e_j$; o lo que es lo mismo, el $j$-ésimo coeficiente del desarrollo de $Av$ en la base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ está dado por

$$\sum_{k=1}^n a_{j,k} v_k \ .$$

La determinación del espectro de un operador $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ procede via

[7] Lo que sigue puede hacerse en un espacio vectorial real pero no conduce a nada. El espectro de la $[B]$ exhibida es vacio.
[8] En dimensión infinita este sería el espectro puntual (que puede ser vacio).
[9] El teorema no dice que $D_\lambda^k$ es imposible para $k \leq m(\lambda)$ ($D_\lambda = 0$ es posible).

**Proposición 3.25** *Sea* $\boldsymbol{V}$ *un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Si* $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *es un operador lineal entonces las siguientes condiciones sobre un número complejo* $\lambda$ *son equivalentes:*

1. $\lambda$ *es autovalor del operador* $A$*;*
2. *el operador* $A - \lambda\mathbf{1}$ *no es inyectivo;*
3. *se tiene* $det([A] - \lambda\mathbf{1}) = 0$*, para la matriz* $[A]$ *asociada a* $A$ *via alguna base de* $\boldsymbol{V}$*;*
4. *se tiene* $det([A] - \lambda\mathbf{1}) = 0$*, para la matriz* $[A]$ *asociada a* $A$ *via la elección de cualquier base de* $\boldsymbol{V}$*;*
5. *el sistema de* $n$ *ecuaciones lineales en* $n$ *incognitas complejas* $z_1$*,* $z_2$*,* $\cdots$*,* $z_n$

$$(2) \qquad [A]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix},$$

*donde* $[A]$ *es la matriz asociada a* $A$ *via cualquier base de* $\boldsymbol{V}$*; tiene una solución no nula.*

*En tal caso, las soluciones de (2) son las componentes de los autovectores de* $A$ *al autovalor* $\lambda$ *en la base pertinente.*

**Forma canónica de Jordan**

**Proposición 3.26** *(Forma canónica de Jordan) Si* $A$ *es una matriz compleja* $n \times n$ *entonces hay* $m \geq 1$ *números naturales* $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$ *con* $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$*; y* $m$ *números complejos* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$*, tales que* $A$ *es semejante a la matriz*

$$(3) \qquad J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_m}(\lambda_m)\,,$$

*donde, para cualquier* $k \in \mathbb{N}$*, y* $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $J_k(\lambda)$ *es la matriz* $k \times k$ *dada por*

$$(4) \qquad J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Llamamos a $J_k(\lambda)$ el bloque de Jordan de orden $k$ asociado a $\lambda$. Cada uno de los bloques de Jordan que aparecen en (3) está asociado a un autovalor de $A$. El número total de bloques es igual a la cantidad de autovectores linealmente independientes de $A$. La cantidad de bloques asociados a un mismo autovalor que aparecen en (3) es igual a la multiplicidad geométrica de ese autovalor. La suma de los órdenes de los bloques asociados a un mismo autovalor es igual a la multiplicidad algebraica del autovalor.

El siguiente procedimiento determina la forma canónica de Jordan de una matriz cuadrada $A$.

1. determine los autovalores y, si es posible, las multiplicidades algebraicas y geométricas de estos autovalores;
2. si el autovalor $\lambda$ tiene multiplicidad geométrica $k$ entonces hay en total $k$ bloques de Jordan asociados a $\lambda$;
3. para cada autovalor $\lambda$ determine los rangos $r(p;\lambda)$ de $(A - \lambda\mathbf{1})^p$ para $p = 1, 2, \cdots, n$. Estos rangos no crecen con $p$. Para todo $p = 1, 2, \cdots$, el número $r(p-1;\lambda) + r(p+1;\lambda) - 2r(p;\lambda)$ es no negativo e igual a la cantidad de veces que aparece el bloque de Jordan $J_p(\lambda)$ en (3).
4. Si $p_o$ es el menor natural tal que $r(p_o;\lambda)$ es minimal, entonces $p_o$ es el orden máximo del bloque de Jordan asociado con $\lambda$.

Si conocemos los autovalores, el punto 3. hace innecesarios a todos los otros puntos: no hace falta determinar multiplicidad algebraica ni geométrica.

**Ejemplo** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

Se tiene $det(A-\lambda\mathbf{1}) = -\lambda(1-\lambda)^2$, por lo cual $\sigma(A) = \{0,1\}$, con $m(0) = 1$ y $m(1) = 2$. Los autoespacios son $\boldsymbol{E}_0 = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{C}\}$ y $\boldsymbol{E}_1 = \{\alpha(e_1+e_2) : \ \alpha \in \mathbb{C}\}$, con lo cual ambos autovalores tienen multiplicidad geométrica 1. Hay entonces dos bloques de Jordan, uno para cada autovalor. Como 0 es autovalor simple, el bloque de Jordan asociado es $J_1(0)$, y por ende el bloque de Jordan asociado a 1 es $J_2(1)$. La forma canónica está dada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Debido a la baja dimensión, no es necesario usar los puntos 3. y 4. del procedimiento. Pero el cálculo da: $r(0,0) = 3$, $r(k,0) = 2$ para $k = 1,2,\cdots$; $r(0,1) = 3$, $r(1;1) = 2$, $r(k;1) = 1$, para $k = 2,3,\cdots$. Luego, hay un solo bloque asociado con 0 y es efectivamente $J_1(0)$ y un solo bloque asociado con 1 y es, efectivamente, $J_2(1)$.

Para encontrar la descomposición espectral de $A$ hacemos lo que sigue. Ya que $e_1$ es autovector al autovalor 0, debemos tener $P_0e_1 = e_1$; y puesto que $e_1+e_2$ es autovector a 1 tenemos $P_1(e_1+e_2) = e_1+e_2$. Además, $P_1e_1 = P_1P_0e_1 = 0$ y $P_0(e_1+e_2) = P_0P_1(e_1+e_2) = 0$, de donde $P_0e_2 = -P_0e_1 = -e_1$ y $P_1e_2 = e_1+e_2$. Esto determina la primera y segunda columna de $P_0$ y de $P_1$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} , \ P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} .$$

La condición $P_0^2 = P_0$ se cumple si y sólo si

$$ac = bc = b . \tag{5}$$

Y

$$0 = P_0A - AP_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a-i-b \\ 0 & 0 & -ic \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

indica que $c = 0$ que, junto con (5) implica $b = 0$ y $a = i$. Tenemos entonces

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \ D_0 = P_0A = 0 .$$

En este caso, ya que $P_1 = \mathbf{1} - P_0$ y $D_1 = AP_1 - P_1$, hemos terminado. No obstante haciendo caso omiso, la condición de proyección para $P_1$ es

$$t^2 = t , \ \ st = 0 , \ \ r = s + rt , \tag{6}$$

y

$$0 = P_1A - AP_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i+r-s \\ 0 & 0 & i-it \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

conlleva $t = 1$ que junto con (6) implica $s = 0$ y $r = -i$. Luego,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \ D_1 = P_1A - P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

# 4. Distancias, largos, $\cdots$

En este apartado nos ocupamos de conceptos como "los vectores $x$ e $y$ están cerca el uno del otro". Para ello se introducen métricas o normas adecuadas a la estructura vectorial. En general esto no suele hacerse cuando el espacio vectorial es de dimensión finita: 'los vectores $x$ e $y$ están cerca el uno del otro" si, cualquiera sea la base, sus componentes lo están. En dimensión infinita la cosa se complica considerablemente.

## 4.1. Espacios métricos

Un **espacio métrico** $\boldsymbol{X}$ es un conjunto con una operación binaria $d : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to [0, \infty)$ llamada **distancia** tal que (1) $d(x, y) = d(y, x)$; (2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$; (3) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. La condición (2) se conoce com **desigualdad del triángulo**. Decimos que una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos $x_n \in \boldsymbol{X}$, **converge** a $x \in \boldsymbol{X}$ si $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. $x$ se denomina el **límite de la sucesi ón** y se escribe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$; y cuando no viene al caso cual es el límite de la sucesión, decimos simplemente que la sucesión es **convergente**.

**Proposición 4.27** *Si $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \boldsymbol{X}$ es una sucesión convergente su límite es único y cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_o$.*

Un subconjunto $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{X}$ se dice **cerrado** si para toda sucesión convergente $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \boldsymbol{M}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} x_n \in \boldsymbol{M}$.

Una sucesión $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \boldsymbol{X}$ se dice **de Cauchy** si satisface la condición del resultado anterior; viz. para todo $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_o$. El resultado enunciado dice que toda sucesión convergente es de Cauchy.

Un espacio métrico se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Sean $(\boldsymbol{X}, d)$ e $(\boldsymbol{Y}, \rho)$ dos espacios métricos. La aplicación $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ se dice **continua** en $x_o \in \boldsymbol{X}$ si cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_o) < \delta$ implica que $\rho(f(x), f(x_o)) < \epsilon$. Si $f$ es continua en todo punto de $\boldsymbol{X}$ decimos que $f$ es continua.

**Proposición 4.28** *$f : (\boldsymbol{X}, d) \to (\boldsymbol{Y}, \rho)$ es continua si y sólo si para toda sucesión $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ convergente en $\boldsymbol{X}$ se tiene $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.*

### 4.1.1. $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$ como espacios métricos

Los espacios $(\mathbb{C}, d(z, w) = |z - w|)$ y $(\mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|)$ son completos (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Es usual que, cuando no se especifica lo contrario, esta es la distancia que se usa (por ejemplo, para definir continuidad).

## 4.2. Espacios vectoriales normados

Una **norma** en un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es una aplicación $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ tal que: (1) $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$; (2) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \, \|v\|$; (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdad del triángulo). Un espacio vectorial **normado** es aquel que poseé una norma.

**Proposición 4.29** *Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial con una norma $\| \cdot \|$ entonces*

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

*define una distancia y $(\boldsymbol{V}, d)$ es un espacio métrico. Las aplicaciones $\boldsymbol{V} \ni v \mapsto v + w$ y $\boldsymbol{V} \ni v \mapsto \alpha \cdot v$ son continuas para todo $w \in \boldsymbol{V}$ y todo escalar $\alpha$.*

**Proposición 4.30** *Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial normado entonces*

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|\ .$$

*Si $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subset \boldsymbol{V}$ es una sucesión convergente a $x \in \boldsymbol{V}$, entonces* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Si no se especifica otra cosa, la convergencia en un espacio vectorial normado se entiende en el sentido del espacio métrico $(\boldsymbol{V}, d)$. En particular, un conjunto $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{V}$ se dice **cerrado** si contiene los límites de todas sus sucesiones convergentes. El **cierre** de $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ es el menor subconjunto $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{V}$ cerrado con $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}$.

**Proposición 4.31** *Todo $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{V}$ admite un cierre.*

**Proposición 4.32** *Si $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{V}$ es un subespacio de dimensión finita, entonces es cerrado.*

Un operador $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ de un espacio vectorial normado se dice **isométrico**, o se llama **isometría**, si $\|Av\| = \|v\|$.

### 4.2.1. Series y combinaciones lineales infinitas. Bases

En un espacio vectorial normado tiene sentido hablar de convergencia de series infinitas, lo que nos permite definir combinaciones lineales infinitas. Si $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \boldsymbol{V}$, y la sucesión $\{s_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ definida por

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} v_j$$

es convergente, escribimos $\sum_{n\geq 1} v_n$ para su límite. Esto nos permite redefinir el concepto de base para un espacio vectorial de dimensión infinita (vease §1), si aceptamos tomar combinaciones lineales infinitas de los vectores de la base. Una **combinación lineal infinita** de vectores $\{v_1, v_2, \cdots\} \subset \boldsymbol{V}$ es una serie infinita $\sum_{n\geq 1} \alpha_n v_n$. Observe que una combinación lineal (finita) es una combinación lineal infinita ya que podemos poner $\alpha_n = 0$ para todo $n$ salvo un número finito. Una base[10] de un espacio vectorial normado $\boldsymbol{V}$ es un subconjunto $B$ de $\boldsymbol{V}$ tal que para todo $v \in \boldsymbol{V}$ hay una única sucesión $\{v_1, v_2, \cdots\} \subset B$ y una única sucesión $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\} \subset \mathbb{S}$, tal que

$$v = \sum_{n\geq 1} \alpha_n v_n\ .$$

Esta expresión se llama **expansión** o **desarrollo** de $v$ en la base $B$ y $\alpha_n$ son las **componentes**.

**Proposición 4.33** *Si $B$ es una base de $\boldsymbol{V}$ entonces es linealmente independiente.*

No todo espacio vectorial normado admite una base[11]. Pero muchos (sino todos) de los espacios vectoriales normados que aparecen en problemas físicos admiten una base.

### 4.2.2. Transformaciones lineales continuas o acotadas

**Proposición 4.34** *Si $(\boldsymbol{V}, \|\cdot\|_v)$ y $(\boldsymbol{W}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{W}})$ son espacios vectoriales normados sobre los mismos escalares, entonces las siguientes condiciones sobre una transformación lineal $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ son equivalentes:*

1. *$T$ es continua;*
2. *$T$ es continua en algún punto;*
3. *$T$ es continua en $0$;*

[10] Más precisamente una base de Schauder.

[11] Incluso si es separable, o sea incluso cuando hay un conjunto denumerable $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ tal que el cierre de $\mathrm{lin}(\boldsymbol{W})$ es $\boldsymbol{V}$.

*4. $T$ es acotada, o sea existe $K \geq 0$ tal que*

$$\|Tv\|_{\boldsymbol{W}} \leq K\|v\|_{\boldsymbol{V}} \ ,$$

*para todo $v \in \boldsymbol{V}$.*

En tal caso,

$$\|T\| := \sup\{\frac{\|Tv\|_{\boldsymbol{W}}}{\|v\|} : \ 0 \neq v \in \boldsymbol{V}\} = \sup\{\|Tv\|_{\boldsymbol{W}} : \ v \in \boldsymbol{V} \ , \ \|v\|_{\boldsymbol{V}} = 1\} \ ,$$

se llama la **norma** de la transformación $T$, y la transformación se dice **acotada**

**Proposición 4.35** *El espacio $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ de las aplicaciones continuas de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{W}$, provisto de la norma de las transformaciones es un espacio vectorial normado.*

**Proposición 4.36** *Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita entonces toda transformación lineal $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es continua.*

# 5. Espacios con producto escalar

En este apartado $\boldsymbol{H}$ está munido de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En este caso, la estructura geométrica de $\boldsymbol{H}$ es más rica y importa como juega un operador respecto del producto escalar. La norma asociada con el producto escalar es $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Dos vectores $x, y \in \boldsymbol{H}$ se dicen **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$. El **complemento ortogonal** de $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{H}$ es $\boldsymbol{M}^\perp := \{x \in \boldsymbol{H} : \ \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in \boldsymbol{M}\}$.

**Proposición 5.37** *Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{H}$ entonces $\boldsymbol{M}^\perp$ es un subespacio cerrado,*
*$(\boldsymbol{M}^\perp)^\perp$ es el menor subespacio cerrado de $\boldsymbol{H}$ que contiene a $\boldsymbol{M}$, y $((\boldsymbol{M}^\perp)^\perp)^\perp = \boldsymbol{M}^\perp$.*

Una **base ortonormal** es una base $B$ cuyos vectores están normalizados a 1 y son dos-a-dos ortogonales: $\|x\| = 1$ para todo $x \in B$, y $\langle x, y \rangle = 0$ si $x, y \in B$ con $x \neq y$.

**Proposición 5.38** *Si $B$ es una base ortonormal de un espacio vectorial con producto escalar, se tiene:*

1. *Las componentes de $f \in \boldsymbol{H}$ en la base $B$ son los números $\langle b, f \rangle$, $b \in B$, y hay un número denumerable de componentes no nulas:*

$$v = \sum_{b \in B} \langle b, v \rangle b \ .$$

2. *Se tiene*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{b \in B} \langle f, b \rangle \langle b, g \rangle \ ;$$

*en particular, es válida la identidad de Parseval:*

$$\|f\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle b, f \rangle|^2 \ .$$

**Proposición 5.39** *Todo espacio vectorial con producto escalar admite una base ortonormal.*

**Proposición 5.40** *Si $\boldsymbol{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto escalar y $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es un operador acotado entonces vale la siguiente identidad de polarización:*

$$\langle g, Af \rangle = \frac{1}{4} \left( \langle f + g, A(f + g) \rangle - \langle f - g, A(f - g) \rangle \right.$$
$$\left. + i\langle f + ig, A(f + ig) \rangle - i\langle f - ig, A(f - ig) \rangle \right) \ .$$

## 5.1. El adjunto

**Proposición 5.41** *Si $A$ es un operador acotado entonces existe un único operador acotado $B : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ tal que:*

$$\langle f, Ag \rangle = \langle Bf, g \rangle$$

*para todo $f$ y todo $g$ en $\boldsymbol{H}$.*

Este operador se llama el **adjunto** de $A$ y se anota $A^*$. La obervación geométrica fundamental es

**Proposición 5.42** *Si $A$ es un operador acotado entonces* $\ker(A^*) = A(\boldsymbol{H})^\perp$.

**Proposición 5.43** *En el caso de dimensión finita, elegida una base ortonormal de $\boldsymbol{H}$, se tiene $[A^*] = [A]^*$, donde*

$$([A]^*)_{j,k} := \overline{[A]_{k,j}} \,,$$

*de acuerdo con §2.1.*

**Proposición 5.44** *Si $A, B : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ son operadores acotados y $\alpha \in \mathbb{S}$, entonces $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$ y $(AB)^* = B^* A^*$.*

Un operador $A$ acotado es: **autoadjunto**, si $A^* = A$; es **normal**, si $A^*A = AA^*$; **unitario**, si es invertible y $A^{-1} = A^*$. Un **ortoproyector** o **proyección ortogonal** es una proyección autoadjunta.

**Proposición 5.45** *Para un operador $U : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ sobre un espacio vectorial munido de un producto escalar, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$U$ es unitario;*
2. *$U^*$ es unitario;*
3. *$\langle Uf, Uf \rangle = \langle f, f \rangle = \langle U^*f, U^*f \rangle$, para todo $f \in \boldsymbol{H}$;*
4. *$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle = \langle U^*f, U^*g \rangle$, para todo $f, g \in \boldsymbol{H}$.*

*Si $\boldsymbol{H}$ es de dimensión finita las condiciones son equivalentes a las siguientes:*

5. *$\langle Uf, Uf \rangle = \langle f, f \rangle$, para todo $f \in \boldsymbol{H}$;*
6. *$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$, para todo $f, g \in \boldsymbol{H}$.*

## 5.2. Geometría euclideana

**Proposición 5.46** *Una proyección $P : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es ortogonal si y sólo si $P(\boldsymbol{H})$ es el complemento ortogonal de $ker(P)$.*

De nuevo con otro énfasis

**Proposición 5.47** *Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}$ es un subespacio cerrado, entonces $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{M}^\perp$ son subespacios complementarios y la proyección $P$ tal que $P(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ es el núcleo de $P$ (ver proposición 2.18) es autoadjunta. Inversamente, si $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{L}$ son subespacios complementarios de $\boldsymbol{E}$ y la proyección $Q$ con $Q(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{L}$ igual al núcleo de $Q$, es autoadjunta, entonces $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}^\perp$.*

**Proposición 5.48** *Sea $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{E}$ un subespacio, entonces cualquiera sea el vector $f \in \boldsymbol{E}$, el vector $x \in \boldsymbol{G}$ tal que $\|f - x\|$ es minimal es único e igual a $Pf$ donde $P$ es el ortoproyector con $P(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{G}$ y $(\mathbf{1} - P)(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{G}^\perp$.*

## 5.3. Espacios euclideos

Un **espacio euclideo** $\boldsymbol{E}$ es un espacio vectorial real de dimensión finita munido de un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y norma $\|\cdot\|$ asociada (ver §1.2; §4.2).

Los operadores que satisfacen las condiciones de la proposición 5.45, se llaman **ortogonales**. En §5.1, estos operadores se decian unitarios, término que se reserva para el caso complejo. Los operadores autoadjuntos en el caso de un espacio euclideo se denominan **simétricos**.

**Proposición 5.49** *(Teorema espectral) Si $\boldsymbol{E}$ es un espacio euclideo y $A$ es un operador simétrico, entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ y para cada $\lambda \in \sigma(A)$ existe un ortoproyector $P_\lambda$ tal que $P_\lambda P_\mu = 0$ si $\lambda \neq \mu$ y*

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda \ .$$

*Si $[A]$ es la matriz asociada a $A$ via una base ortonormal, entonces hay un operador ortogonal $T$ tal que $[T^* A T]$ es diagonal.*

**Proposición 5.50** *Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, o sea*

$$Q(x) = \sum_{j,k=1}^{n} q_{j,k} x_j x_k \ , \ \ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ ,$$

*con $q_{j,k} = q_{k,j} \in \mathbb{R}$, entonces hay una matriz $(n \times n)$, $[T]$ que es ortogonal y tal que con*

$$[y](x) := T[x]$$

*se tiene*

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j (y_j(x))^2 \ ,$$

*donde $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ son los autovalores de la matriz $(q_{j,k})$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad.*

**Proposición 5.51** *(Teorema espectral para operadores normales) Si $\boldsymbol{E}$ es un espacio euclideo, $A$ es un operador normal sobre $\boldsymbol{E}$ y $B$ es una base ortonormal de $\boldsymbol{E}$, entonces existe una transformación ortogonal $T$ de $\boldsymbol{E}$ tal que, respecto de la base $B$,*

$$[T^* A T] = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots A_k \ ,$$

*donde las matrices $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_k$ son reales y de dimensión $(1 \times 1)$, o bien reales y de dimensión $(2 \times 2)$ de la forma*

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \ ,$$

*con $\beta \neq 0$*[12].

## 5.4. Espacios de Hilbert

Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial complejo munido de un producto escalar que es completo con respecto a la distancia asociada a la norma (ver §4.2) asociada al producto escalar (ver §1.2).

**Proposición 5.52** *Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial munido de un producto escalar y tiene dimensión finita, entonces es un espacio de Hilbert.*

[12] Los autovalores de esta matriz, vista como matriz compleja, son $\alpha \pm i\beta$.

**Proposición 5.53** *Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal.*

**Proposición 5.54** *Si $A$ es un operador sobre un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$ de dimensión finita entonces hay una base ortonormal de $\boldsymbol{H}$ tal que la matriz $[A]$ es triangular superior.*

**Proposición 5.55** *(Teorema espectral) Si $\boldsymbol{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita y el operador $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es normal ($A^*A = AA^*$) entonces los autovalores de $A$ son semisimples. Se tiene*

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

*donde $P_\lambda$ es el ortoproyector al autoespacio de $A$ asociado con $\lambda$. Se tiene $P_\lambda P_\mu = 0$ para $\lambda \neq \mu$. Dada una base ortonormal arbitraria de $\boldsymbol{H}$, existe un operador unitario $U : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ tal que la matriz $[U^*AU]$ asociada via esa base es diagonal.*

Observe que los operadores autoadjuntos y los operadores unitarios son normales.

### 5.4.1. Operadores positivos

Un operador $A$ acotado sobre $\boldsymbol{H}$ se dice **positivo** (o mejor, aunque se use poco, **no negativo**; el término **positivo semidefinido** también se usa) si $\langle v, Av \rangle \geq 0$ para todo $v \in \boldsymbol{H}$. Cuando la desigualdad es estricta para $v \neq 0$, decimos que $A$ es **estrictamente positivo**.

**Proposición 5.56** *Las siguientes condiciones sobre un operador continuo $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ son equivalentes:*

1. *$A$ es positivo;*
2. *existe $B : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ acotado tal que $A = B^*B$;*
3. *existe $C : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ acotado y autoadjunto tal que $A = C^2$*

*En tal caso $A$ es autoadjunto. Si $\boldsymbol{H}$ es de dimensión finita, entonces las condiciones son equivalentes a:*

4. *$A$ es autoadjunto y $\sigma(A) \subset [0, \infty)$[13];*
5. *si $[A]$ es la matriz asociada con $A$ via una base ortonormal de $\boldsymbol{V}$ entonces todos los menores principales de $[A]$ tienen determinante no negativo.*

Los **menores principales** de una matriz cuadrada, son todas las matrices cuadradas que se obtienen eliminando filas y columnas correspondientes (e.g., la tercera y octava fila y la tercera y octava columna).

# 6. Espacios de funciones

Si consideramos un conjunto $\boldsymbol{X}$ arbitrario y las funciones $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{V}$, donde $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial, entonces definiendo $(\alpha \cdot f + g)(x) := \alpha f(x) + g(x)$, obtenemos un espacio vectorial sobre los mismos escalares que $\boldsymbol{V}$, cuyos vectores son funciones. Si, además, $\boldsymbol{V}$ es normado, entonces se dice que la función $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{V}$ es **acotada** si existe $K \geq 0$ tal que $\|f(x)\|_{\boldsymbol{V}} \leq K$ para todo $x \in \boldsymbol{X}$.

**Proposición 6.57** *Las funciones acotadas sobre un conjunto $\boldsymbol{X}$ a valores en un espacio vectorial normado forman, a su vez, un espacio normado con la norma*

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\| : \ x \in \boldsymbol{X}\} \ .$$

[13] La condición de que $A$ sea autoadjunto no se puede omitir. La matriz $[A]$ de §3 tiene espectro $\{0\}$ y no es positiva con respecto al producto escalar canónico (§1.3); tampoco es autoadjunta.

## 6.1. Funciones continuas

Si el espacio $\boldsymbol{X}$ donde están definidas las funciones es un espacio métrico, entonces podemos considerar funciones continuas. Como $\alpha \cdot f + g$ es continua si $f$ y $g$ lo son, las funciones continuas –denotadas por $\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V})$– forman un espacio vectorial. El caso más usual es $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}$ o $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}$.

**Proposición 6.58** *Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio métrico y $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial normado completo, entonces $\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V})$ es completo respecto de la norma*

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\| : \ x \in \boldsymbol{X}\} \ .$$

Cuando $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}$ o $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$, tiene sentido hablar de funciones diferenciables. En efecto,

$$\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) \ , \ h \neq 0 \ ,$$

es para todo $x \in \boldsymbol{X}$ un vector en $\boldsymbol{V}$ y, si el límite para $h \to 0$ existe en $\boldsymbol{V}$, o sea: hay $v \in \boldsymbol{V}$ tal que cualquiera sea la sucesión $\{h_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ en $\boldsymbol{X}$ con $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} - v \right\| = 0 \ ,$$

entonces decimos que $v$ es la **derivada** de $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{V}$ en $x$, y escribimos $v = f'(x)$. Ya que la suma de funciones diferenciables en este sentido, vuelve a ser diferenciable, obtenemos nuevamente un espacio vectorial. Se pueden, por supuesto, considerar derivadas de orden superior. Etc.
$\mathcal{C}_p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V})$ denota usualmente las funciones definidas en el espacio métrico $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}$ o $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$ a valores en el espacio vectorial normado $\boldsymbol{V}$ que son $p$ veces diferenciables y la $p$-ésima derivada es continua.

# 7. Bibliografía

El libro

G. Strang: *Linear Algebra and its Applications.* Academic Press, Orlando 1980.

es un libro de álgebra lineal en el sentido clásico (con matrices, filas que se permutan, pivotes, ...) muy práctico y didáctico. Una presentación elemental, cuidada y completa más acorde con el tenor de este breviario es

S. Axler: *Linear Algebra Done Right.* Springer-Verlag, New York 1997,

Uno de mis favoritos es (completo, accesible, simple, y elegante):

P.D. Lax: *Linear Algebra.* Wiley-Interscience, New York 1997.

El libro

P.R. Halmos: *Finite-Dimensional Vector Spaces.* Springer-Verlag, New York 1974.

presenta un tratamiento del álgebra lineal “abstracta” una pizca más avanzado que el del libro de Axler. Un compendio completo y moderno para especialistas y usuarios es:

R.A. Horn, and C.R. Johnson: *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge 1985.

El capítulo primero del magnifico libro

T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1995.

trata la teoría de los espacios vectoriales de dimensión finita y sus transformaciones lineales. Luego desarrolla la teoría en dimensión infinita (con especial énfasis en la teoría de perturbaciones del espectro).