UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

SERIE “C”

TRABAJOS DE FÍSICA

Nº 10/16

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Guido A. Raggio

Editor: Miguel A. Chesta

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Ecuaciones diferenciales ordinarias*

G.A. Raggio
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,
Universidad Nacional de Córdoba

Revisión de agosto de 2011 y de noviembre de 2015

Índice

1. Introducción **2**

2. Ecuaciones de primer orden **6**
2.1. Ecuaciones separables . . . 6
2.1.1. Ecuaciones reducibles a separables . . . 10
2.2. Ecuación diferencial de Clairaut . . . 11
2.3. Ecuaciones homogeneas . . . 12
2.3.1. Ecuaciones reducibles a homogeneas . . . 12
2.4. Ecuaciones exactas . . . 13
2.4.1. Factor integrante . . . 14
2.5. Ecuaciones lineales . . . 14
2.6. Ecuaciones reducibles a ecuaciones lineales (ejemplos selectos) . . . 15
2.7. Solución iterativa del problema de Cauchy . . . 15
2.8. Teoremas de existencia y unicidad . . . 16
2.8.1. Contracciones en espacios métricos . . . 17

3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden **19**
3.1. Ecuaciones lineales . . . 19
3.1.1. Caso homogeneo . . . 20
3.1.2. Caso inhomogeneo . . . 24
3.1.3. Función de Green para problemas inhomogeneos . . . 26
3.1.4. Problemas de autovalores . . . 31
3.1.5. Soluciones en series . . . 33
3.1.6. Primeros pasos en la teoría de la *ED* de Bessel . . . 39

4. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden **41**
4.1. Continuidad estructural y respecto de las condiciones iniciales . . . 45
4.2. Estabilidad de sistemas de primer orden autónomos . . . 46
4.2.1. Sistemas autónomos lineales . . . 47
4.2.2. Sistemas no lineales . . . 49
4.3. Sistemas lineales no autónomos (la exponencial ordenada) . . . 50

5. Bibliografía **51**

*Notas provisorias para *Métodos Matemáticos de la Física*, 2^{do}-cuatrimestre 2008

1. Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria es algo así como una relación funcional para una variable y una función de esa variable que involucra además a las derivadas de la función. Si esto no es claro no importa; es dificil no reconocer a una ecuación diferencial cuando uno se topa con ella. Intentando formalizar, uno escribiría

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \,, \tag{1}$$

donde F es función de $n+2$ variables, y es función de la variable x, y $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ son las derivadas sucesivas de y. Lo que uno busca entonces es una función y de x que sea n veces diferenciable y tal que cualquiera sea el valor (permitido) de x, se tenga

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \,.$$

El calificativo "ordinaria" se refiere a que hay sólo una variable (usualmente real o compleja) y no más, por lo cual no entran en juego las derivadas parciales. En la práctica, (1) es demasiado general. Así,

$$(y')^2 - 3xy + \sinh(y^2) = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria en el sentido de (1), pero es más útil verla como dos ecuaciones diferenciales ordinarias distintas:

$$y' = \sqrt{3xy - \sinh(y^2)} \,, \quad y' = -\sqrt{3xy - \sinh(y^2)} \,.$$

Así, es como es más útil, decir que una ecuación diferencial ordinaria es

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \,, \tag{2}$$

para algún $n = 1, 2, \cdots$; lo que se obtiene de (1) resolviendo para $y^{(n)}$ cuando se puede. El **orden** de la *ED* [1]es entonces n.

Ejemplo 1.1: Para $k \in \mathbb{R}$ fijo, considere $y' = ky$, una *ED* de orden 1. No habría inconveniente en interpretarla como ecuación diferencial para una función analítica de una variable compleja z que varia en un abierto cualquiera de $\mathbb{C}$. Aquí, la vemos como *ED* para una función real $y(\cdot)$ de una variable real x. Cuando $k = 0$, $y(x) = a$ donde $a \in \mathbb{R}$ es la solución. En este caso muy poco interesante, cualquiera sea el punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, hay una y sólo una ϕ tal que $\phi(x_o) = y_o$; se tiene $\phi(x) = y_o$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Cuando $k \neq 0$,

$$y_a(x) = ae^{kx} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario es solución; basta derivar para verificarlo. Observe que el caso $a = 0$ nos da la solución trivial $y \equiv 0$. Esta solución y_a tiene la propiedad de que $y_a(0) = a$. Veamos que es la única con esta propiedad.

Lema 1 *Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución, y $\phi(0) = 0$, entonces $\phi \equiv 0$.*

<u>Demostración</u>: Integrando $\phi' = k\phi$, obtenemos $\phi(x) = k\int_0^x \phi(s)ds$ cualquiera sea x. Entonces $|\phi(x)| \leq |k|\int_0^x |\phi(t)|dt$ para $x > 0$; y $|\phi(x)| \leq |k|\int_0^{|x|} |\phi(-t)|dt$, si $x < 0$.

Para $x > 0$, sea $u(x) := |k|\int_0^x |\phi(t)|dt$ que satisface $u(x) \geq 0$. Entonces $u'(x) = |k|\ |\phi(x)| \leq |k|u(x)$. Luego

$$(e^{-|k|x}u)' = -|k|e^{-|k|x}u + |k|e^{-|k|x}|\phi(x)| \leq 0 \,,$$

e integrando de 0 a $x > 0$, $0 \geq e^{-|k|x}u(x) - u(0) = e^{-|k|x}u(x)$, de donde $u(x) \leq 0$ y, por ende $u(x) = 0$. Esto implica que $|\phi(x)| = 0$ para todo $x > 0$, o sea $\phi(x) = 0$ para todo $x \geq 0$.

[1] Usamos *ED* para abreviar "ecuación diferencial (ordinaria)".

Para $x < 0$, ponemos $u(x) := |k| \int_0^{-x} |\phi(-t)|dt$. Nuevamente, $u(x) \geq 0$ y $u'(x) = -|k|\ |\phi(x)| \geq -|k|u(x)$. Luego,

$$(e^{|k|x}u)' = |k|e^{|k|x}u - |k|e^{|k|x}|\phi(x)| \geq 0 \ ,$$

e integrando de $x < 0$ a 0,

$$0 \leq \int_x^0 (e^{|k|t}u)'(t)dt = u(0) - e^{|k|x}u(x) = -e^{|k|x}u(x) \ .$$

De aquí se sigue que $\phi(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.[2] ■

La demostración del lema es instructiva y la dos ideas básicas se puede usar frecuentemente para demostrar unicidad. ¿Cuales son las dos ideas básicas? Una es que integrando la ecuación diferencial obtenemos una ecuación integral (que resulta ser equivalente; ver §2.7) que nos permite plantear las cosas en otros términos. La otra idea, es considerar la integral $u(x) = \int_{x_o}^x |\phi(t)|dt$ de una solución ϕ y considerar $u(x)/\phi(x)$ demostrando que es constante.
Ahora, el lema nos permite demostrar que hemos encontrado todas las soluciones posibles. En efecto, si ϕ es solución, considere $f = \phi - y_{\phi(0)}$. Tenemos $f(0) = \phi(0) - y_{\phi(0)}(0) = 0$, y $f' = k\phi - ky_{\phi(0)} = kf$. Luego $f \equiv 0$ y por ende $\phi = y_{\phi(0)}$.

Cuando se conoce una solución explícitamente como en este caso, podemos incluso proceder directamente: si ϕ es solución entonces con $g(x) = e^{-kx}\phi(x)$ tenemos $g'(x) = -ke^{-kx}\phi(x) + e^{-kx}k\phi(x) = 0$ de modo que g es constante en cada intervalo y luego $\phi(x) = ae^{kx}$ en cada intervalo.[3] ◀

Ejemplo 1.2: La ecuación diferencial (de primer orden)

$$y' = y^{1/3} \ , \tag{3}$$

tiene sentido a priori para funciones $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ya que la raíz cúbica de un real está bien definida y es única. La fórmula de integración

$$\int \frac{dt}{t^{1/3}} = \frac{3}{2}t^{2/3}$$

es válida para $t \neq 0$ pues con $G_C(t) = (3/2)t^{2/3} + C$ tenemos efectivamente $G'_C(t) = t^{-1/3}$ si $t \neq 0$. Suponiendo entonces que $y \neq 0$ podemos usar esto para integrar (3): De $G_C(y) = x + D$, con $C, D \in \mathbb{R}$; obtenemos,

$$y^{2/3} = \frac{2}{3}(x - B)$$

con $B \in \mathbb{R}$. El miembro izquierdo es por hipótesis sobre y estrictamente positivo, en tanto y en cuanto es el cuadrado de un real; por lo tanto $x > B$. Elevando al cubo, $y^2 = \left(\frac{2}{3}(x - B)\right)^3$ y tomando la raíz cuadrada, obtenemos

$$y_\pm = \pm\left(\frac{2}{3}(x - B)\right)^{3/2} \ ,$$

donde $t^{3/2}$ denota el cubo de la raíz cuadrada positiva del número no negativo t, como putativas "soluciones" de (3). Para ver que, efectivamente

$$\phi_b^\pm(x) := \pm\left(\frac{2}{3}(x - b)\right)^{3/2} \ , \ \ x \geq b \tag{4}$$

es solución de (3), <u>en el intérvalo</u> $[b, \infty)$ basta derivar y verificar que se cumple la ecuación diferencial. Observamos que $\lim_{x \to b^+}(\phi_b^\pm(x))^{1/3} = 0$ y que también $\lim_{x \to b^+}(\phi_b^\pm)'(x) = 0$; con lo cual la extensión de

[2] El símbolo ■ indica el fín de una demostración.
[3] El símbolo ◀ indica la finalización de un ejemplo.

esta solución a una solución en todo $\mathbb{R}$ es trivialmente $\phi_b^{\pm}(x) = 0$ si $x \leq b$. No distinguimos a $\phi_b^{\pm}$ de su extensión:

$$\phi_b^{\pm}(x) := \begin{cases} \pm\left(\frac{2}{3}(x-b)\right)^{3/2} & , \quad \text{si } x \geq b \\ 0 & , \quad \text{si } x < b \end{cases} .$$

Observe que $\phi_b^{\pm}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y es solución de (3). La pregunta es: ¿ tenemos "todas" la soluciones posibles de (3)? Y, la respuesta es no ya que $y(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es solución de (3) en todo $\mathbb{R}$.

Dejando de lado la pregunta si, ahora si, hemos encontrado todas las soluciones posibles de (3), veamos que el problema asociado con (3)

$$y' = y^{1/3} \ , \ \ y(x_o) = y_o \ , \ \ (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2 \ , \tag{5}$$

tiene solución cualquiera sea $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, pero la solución no es única para $y_o = 0$.

Dado $x_o \in \mathbb{R}$ arbitrario, construimos una solución no nula del problema (5) con $y_o = 0$, y como $y \equiv 0$ es solución de (5), vemos que la solución existe pero no es única. Para esto usamos $\phi_b^{\pm}(x)$, con $b \geq x_o$ arbitrario obteniendo <u>no denumerablemente infinitas</u> soluciones no nulas distintas de (5) con $y_o = 0$. Hemos entonces demostrado que

Lema 2 *Si $y_o = 0$, entonces hay no denumerablemente infinitas soluciones distintas de (5): $y \equiv 0$ y $\phi_b^{\pm}$, con $b \geq x_o$.*

Consideremos ahora el problema (5) con $y_o \neq 0$ arbitrario. Buscamos armar una solución en base a las soluciones (4). La idea es transparente si apelamos a la figura 1: basta correr las curvas integrales $\phi_b^{\pm}$ hacia la derecha o izquierda (o sea elegir b) hasta que esta curva comprenda (toque) el punto (x_o, y_o). Primeramente,

$$y_o = \left(\frac{2}{3}(x_o - b)\right)^{3/2}$$

admite una única solución para b, dada por

$$b = x_o - \frac{3}{2} y_o^{2/3} \ .$$

Observe que $b < x_o$. Luego, si $y_o > 0$,

$$\psi_{x_o,y_o}(x) := \phi^{+}_{x_o - 3y_o^{2/3}/2}(x) \ ,$$

satisface la ecuación diferencial (3) en $\mathbb{R}$ en virtud de que $\phi^{+}_{x_o - 3y_o^{2/3}/2}$ lo hace, y que además,

$$\psi_{x_o,y_o}(x_o) = \phi^{+}_{x_o - 3y_o^{2/3}/2}(x_o) = y_o \ .$$

En el caso $y_o < 0$, tomamos

$$\psi_{x_o,y_o}(x) := \phi^{-}_{x_o - 3y_o^{2/3}/2}(x) \ .$$

Con esto hemos verificado que (5) admite solución cualquiera sea $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$.

¿Será cierto que: la solución de (5) recién construida es la única si $y_o \neq 0$? La respuesta es que si, y aca va la demostración.

Lema 3 *Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de (3) y $y(a) = 0$ entonces $y(x) = 0$ para todo $x \leq a$.*

Demostración: Sea $c := \inf\{x \leq a : \ y(t) = 0 \text{ para todo } t \in [x, a]\}$. Si c es finito, i.e. $c > -\infty$, entonces la continuidad de y implica que $y(c) = 0$ y hay $\epsilon > 0$ tal que $y(x) \neq 0$ para todo $x \in (c - \epsilon, c)$. En caso de que $y(x) > 0$, para $x \in (c - \epsilon, c)$ se desprende de (3) que $(c - \epsilon, c) \ni x \mapsto y(x)$ es creciente y por lo tanto $y(c) > y(c - \epsilon) > 0$. En el caso $y(x) < 0$ para $x \in (c - \epsilon, c)$, entonces $(c - \epsilon, c) \ni x \mapsto y(x)$ es decreciente y por lo tanto $y(c) < y(c - \epsilon) < 0$. En ambos cosas obtenemos una contradicción al hecho de que $y(c) = 0$. Por lo tanto, c no es finito, y efectivamente $y(x) = 0$ para $x \leq a$. ■

Suponiendo entonces que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de (3) no idénticamente nula, habrá $a \in \mathbb{R}$ tal que y no se anula a la derecha de a y, a fortiori, no cambia de signo. Entonces la integración realizada para resolver a (3) a la derecha de a es válida, y

$$y(x) = \pm\left(\frac{2}{3}(x - b)\right)^{3/2}$$

a la derecha de a con $b \leq a$; donde el signo está determinado de acuerdo a que $y(x)$ sea positivo $(+)$ o negativo $(-)$ a la derecha de a. Ya que $y(b) = 0$, el lema nos da las soluciones generales ya encontradas, pues $y(x) = 0$ para todo $x \leq b$. Esto demuestra que habiamos encontrado todas las solucione posibles de (3)

Lema 4 *Si ϕ es solución no nula de (3) en $\mathbb{R}$ entonces hay $a \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = \phi_a^{\pm}(x)$.*

Esto nos dice inmediatamente que las solución del problema (5) es única cuando $y_o \neq 0$; o sea en los semiplanos superior o inferior. La figura 1 muestra tres curvas integrales (soluciones).

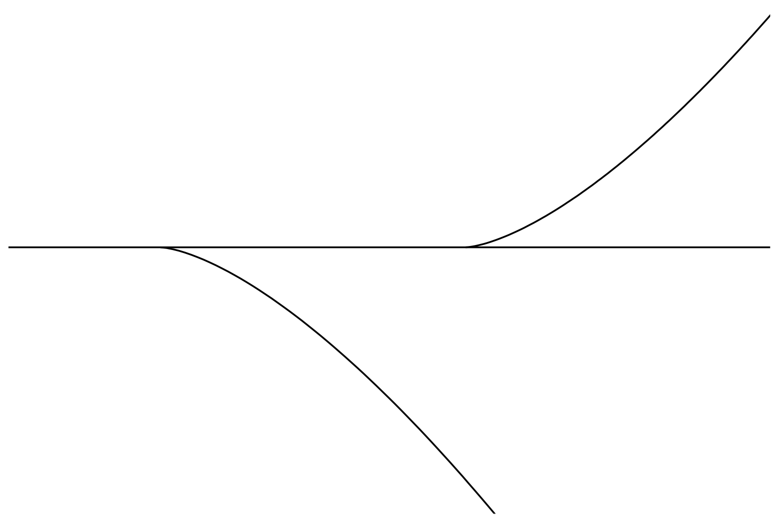

Figura 1: Tres curvas integrales de $y' = y^{1/3}$.

◀

Los dos ejemplos discutidos se comportan de manera distinta cuando se plantea el problema de la existencia y unicidad de la solución cuando se impone una condición sobre ϕ (en los ejemplos $\phi(x_o) = y_o$ con $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$). El **problema de Cauchy** asociado con una *ED* es

(6) $$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \ , \ \ y(x_o) = y_o \ , \ \ y'(x_o) = y_1 \ , \ \ \cdots \ , \ \ y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1} \ ,$$

donde $x_o, y_o, y_1, \cdots, y_{n-1}$ son valores fijos. Frecuentemente se usa la nomenclatura dinámica y se habla de problema de condiciones iniciales ya que se especifican las $n-1$ primeras derivadas en el punto "inicial" x_o.

2. Ecuaciones de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es algo como

$$y' = f(x,y) \; .$$

El problema de Cauchy asociado es entonces

$$y' = f(x,y) \; , \quad y(x_o) = y_o \; . \tag{7}$$

Citamos aquí el siguiente resultado fundamental y muy útil.

Teorema 2.1 *(Existencia y unicidad local para el problema de Cauchy) Sea E un entorno del punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f : E \to \mathbb{R}$ es continua y la derivada parcial $\partial f/\partial y$ existe y es acotada en E, entonces hay un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ con $x_o \in I$ y una única función diferenciable $\phi : I \to \mathbb{R}$ tal que $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ para $x \in I$ y $\phi(x_o) = y_o$.*

Reconsideremos los dos ejemplos de la introducción a la luz de este teorema. En el primer ejemplo, $f(x,y) = ky$ y se satisfacen las hipótesis del Teorema en todo $\mathbb{R}^2$. Las conclusiones fueron verificadas explicitamente. En el segundo ejemplo, $f(x,y) = y^{1/3}$ no admite derivada parcial $\partial f/\partial y$ en los puntos $(x, 0)$ y esta no es acotada en cualquier entorno de un punto de este tipo. Vimos explicitamente que no hay unicidad para la solución del problema de Cauchy en estos puntos.

2.1. Ecuaciones separables

Se habla de una ec. diferencial **separable**, si f factoriza: $f(x,y) = g(y)h(x)$. En tal caso, el siguiente procedimiento construye soluciones; aunque a priori nada garantiza que todas las posibles. Si $g(y) \neq 0$, podemos escribir $y'(x)/g(y) = h(x)$. Si G es función diferenciable de una variable real t con $G'(t) = 1/g(t)$, y H es función diferenciable de una variable real s con $H'(s) = h(s)$, entonces $G(y) = H(x) + C$, donde C es una constante, define implícitamente, si hay suerte, una solución de la *ED*. Ya que, por la regla de la cadena aplicada a $x \to G(y(x))$, tenemos $y'/g(y) = G'(y) = H' = h$. El método funciona, o sea produce una solución, si $g(y) \neq 0$ y si se tienen las conclusiones del Teorema de la función implícita que recordamos.

Teorema 2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $F : A \to \mathbb{R}$ continua con derivadas parciales $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$ continuas. Si $(x_o, y_o) \in A$ con $F(x_o, y_o) = 0$ y $(\partial F/\partial y)(x_o, y_o) \neq 0$ entonces hay un rectángulo $R = \{(x,y) \in A : \; |x - x_o| < h \; , \; |y - y_o| < k\}$ en A tal que para todo $x \in I := (x_o - h, x_o + h)$ hay un único $y \in J := (y_o - k, y_o + k)$ con $F(x,y) = 0$[4]. La función $\phi : I \to J$ definida por $\phi(x) := y$ es diferenciable con derivada continua*

$$\phi'(x) = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x, \phi(x))}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x, \phi(x))} \; .$$

Observese que en el caso que nos interesa $F(x,y) = G(y) - H(x) - C$, $\partial F/\partial x = -h$, y $\partial F/\partial y = 1/g$; la hipótesis $g(y) \neq 0$ es crucial para lograr la función ϕ implícitamente definida por $F(x,y) = 0$.

[4] Aquí y en lo que sigue $:=$ equivale a "definido por"; así, $J := (y_o - k, y_o + k)$ se lee como J es el intervalo (abierto) de extremos $y_o - k$ y $y_o + k$.

Ejemplo 2.1: La ecuación diferencial logística

$$y' = k(A - y)y \tag{8}$$

juega un papel importante en el modelado matemático de procesos de crecimiento de poblaciones (biología, ecología, etc.). Suponemos $k, A > 0$. Se trata de una *ED* de primer orden separable, con $h(t) = k$ y $g(y) = (A - y)y$. Aquí, la variable independiente se designa con t y se habla del tiempo. Vemos que $g(y) = 0$ si $y = 0$ o bien $y = A$. También observamos que $y \equiv 0$ y $y \equiv A$ son soluciones de la ec. logística. Usando la notación del párrafo inicial, tenemos $H(t) = kt$. Para encontrar la integral G, se hace la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{(A-y)y} = \frac{1}{Ay} + \frac{1}{A(A-y)} \ ,$$

luego

$$G(y) = A^{-1} \ln |y| - A^{-1} \ln |A - y| = A^{-1} \ln \left(\frac{|y|}{|A-y|} \right) \ ,$$

donde $y \neq 0$ y $y \neq A$. En tal caso, las hipótesis del Teorema de la función implícita se cumplen y obtenemos las siguientes "soluciones de la ec. logística":

$$|y| = |A - y| C \exp(\kappa t) \ , \ \ \kappa := Ak \ , \ \ C > 0 \ .$$

Para obtener a y como función del tiempo se distinguen tres casos

1. $0 < y < A$. De $y = (A - y)Ce^{\kappa t}$ obtenemos

$$y(t) = \frac{ACe^{\kappa t}}{1 + Ce^{\kappa t}} \ ;$$

y no hay restricción alguna sobre el intérvalo de tiempo donde esto es solución de (8). En efecto, $\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t)$ es una función estrictamente creciente con $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$ y $\lim_{t \to \infty} y(t) = A$. Obtenemos una solución del problema de Cauchy (7) para (8) con $y(t_o) = y_o \in (0, A)$:

$$y_{(t_o, y_o)}(t) = \frac{Ay_o e^{\kappa(t - t_o)}}{A - y_o + y_o e^{\kappa(t - t_o)}} \ , \ \ t \in \mathbb{R} \ . \tag{9}$$

Esta es la solución que interesa en el contexto de la evolución temporal de poblaciones.

2. $y > A$. Entonces $y = (y - A)Ce^{\kappa t}$ y

$$y(t) = \frac{ACe^{\kappa t}}{Ce^{\kappa t} - 1} \ ;$$

pero, ya que $C > 0$, el denominador puede ser ≤ 0, en cuyo caso $y > A$ no se cumple. La solución es válida para $Ce^{\kappa t} > 1$ o sea $t > -\kappa^{-1} \ln(C)$. Tenemos $(-\ln(C)/\kappa, \infty) \ni t \mapsto y(t)$ es estrictamente decreciente con $\lim_{t \to -\ln(C)/\kappa} y(t) = \infty$ y $\lim_{t \to \infty} y(t) = A$. Esta solución nos provee de una solución del problema de Cauchy para (8) en la cual $y(t_o) = y_o > A$:

$$y_{(t_o, y_o)}(t) = \frac{Ay_o e^{\kappa(t - t_o)}}{y_o e^{\kappa(t - t_o)} - y_o + A} \ , \ \ t > t_o - \kappa^{-1} \ln((y_o - A)/y_o) \ . \tag{10}$$

3. $y < 0$. Entonces $y = (y - A)Ce^{\kappa t}$ y

$$y(t) = -\frac{ACe^{\kappa t}}{1 - Ce^{\kappa t}} \ ,$$

que es solución de (8) para $t < -\ln(C)/\kappa$. Entonces, $(-\infty, -\ln(C)/\kappa) \ni \mapsto y(t)$ es estrictamente decreciente con $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$, y $\lim_{t \to -\ln(C)/\kappa} y(t) = -\infty$. El problema de Cauchy (7) con $y_o < 0$ tiene la solución

$$y_{(t_o, y_o)}(t) = \frac{Ay_o e^{\kappa(t - t_o)}}{-y_o + A + y_o e^{\kappa(t - t_o)}} \ , \ \ t < t_o + \kappa^{-1} \ln((A - y_o)/(-y_o)) \ . \tag{11}$$

En los casos 2. y 3. vemos que la solución diverge a tiempo finito. No podemos esperar en general que el dominio de variabilidad de la variable independiente sea ilimitado. Utilizando el teorema de existencia y unicidad local, se puede demostrar que la solución del problema de Cauchy para (8) es única.

condición inicial	solución
$y_o < 0$	(11)
$y_o = 0$	$y \equiv 0$
$0 < y_o < A$	(9)
$y_o = A$	$y \equiv A$
$y_o > A$	(10)

La siguiente figura muestra cinco curvas integrales.

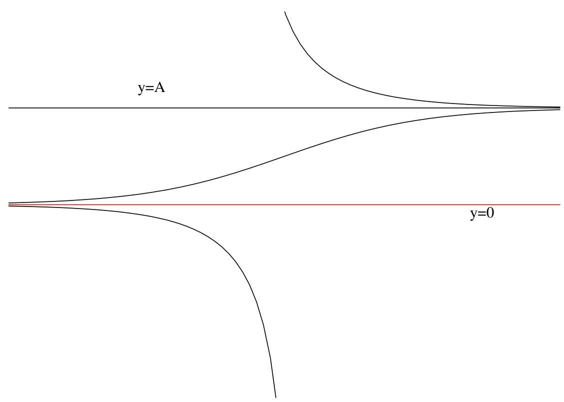

Figura 2: Cinco curvas integrales de la ecuación logística.

◀

Ejemplo 2.2: Considere la ED

$$y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y}\ , \quad y(0) = 1\ .$$

Esta es no-lineal, separable y de primer orden. La integración produce

$$G(y) := y^3 - 3y^2 + C = x + x^3 =: H(x)\ ,$$

donde C es una constante. Ya que $H(0) = 0$ y $G(1) = -2 + C$ obtenemos $C = 2$. Entonces

$$G(y) = y^3 - 3y^2 + 2 = (y-1)(y^2 - 2y - 2) = (y-1)(y-\alpha^+)(y-\alpha^-)\ ,$$

donde $\alpha^\pm = 1 \pm \sqrt{3}$ son las raices (ceros) de $y \mapsto y^2 - 2y - 2$. El análisis de la función G es inmediato con $G'(y) = 3y^2 - 6y = 3y(y-2)$ y $G''(y) = 6(y-1)$. La función G es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ con un cero en α^-; decreciente en $[0,2]$ con un cero en 1; y creciente en $[2,\infty)$ con un cero en α^+. Además es cóncava en $(-\infty, 1]$ (0 es un máximo local con $G(0) = 2$) y convexa en $[1,\infty)$ (2 es un mínimo local con $G(2) = -2$).
La función H con $H'(x) = 3x^2 + 1$ y $H''(x) = 6x$ es impar y creciente con $\lim_{x\to\pm\infty} H(x) = \pm\infty$ de modo que H es una biyección de $\mathbb{R}$. Observamos que $H(\pm 1) = \pm 2$.

La función $y(x)$ está determinada implícitamente por

$$G(y) = H(x) \tag{12}$$

y ya que $G'(y) = 0$ solamente para $y = 0$ o $y = 2$, el Teorema de la Función implícita nos garantiza la existencia de una única función $y(x)$ definida en un entorno de $x = 0$ con $y(0) = 1$ que es diferenciable con

$$y'(x) = \frac{H'(x)}{G'(y)}$$

de donde $y(\cdot)$ es solución única del problema de Cauchy en ese entorno de $x = 0$.

La discusión cualitativa de y en función de $h := H(x)$ puede hacerse graficamente; vea la figura 3.

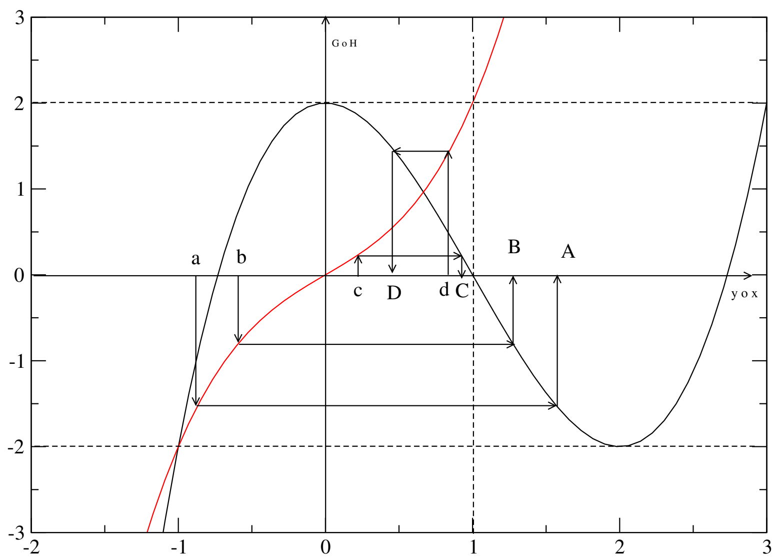

Figura 3: Determinación gráfica de la función $y(x)$: $y(-1) = 2$, $y(a) = A$, $y(b) = B$, $y(0) = 1$, $y(c) = C$, $y(d) = D$, etc. , $y(1) = 0$.

Si h varia en el intervalo $[-2, 2]$ (que contiene a $h = 0$) entonces y varia en el intervalo $[0, 2]$ y la función $h \mapsto \xi(h) = y(x)$ es monótona decreciente con $\xi(-2) = y(-1) = 2$ y $\xi(2) = y(1) = 0$. La función $[-1, 1] \ni x \mapsto y(x)$ es monótona decreciente y es solución del problema de Cauchy dado. Se tiene

$$\lim_{x \to \pm 1} 3y(x)^2 - 6y(x) = \lim_{x \to \pm 1} G'(y(x)) = 0 \ , \quad \lim_{x \to -\pm 1} y'(x) = \lim_{h \to \pm 2} \xi(h) = -\infty \ .$$

La figura 4, muestra la función $x \mapsto y(x)$ obtenida númericamente por el método de Newton iterando

$$y_{n+1} = y_n - \frac{G(y_n) - H(x)}{G'(y_n)} \ , \ n = 0, 1, 2, \cdots \ ,$$

a partir de $y_0 = 1$ con unas pocas (< 5) iteraciones; aunque para x cerca de ± 1 (donde la derivada es infinita) se uso un valor inicial más próximo a 2 respectivamente 0 para $x \approx -1$, respectivamente $x \approx 1$.

El gráfico sugiere que la solución y tiene la simetría $y(-x) - 1 = -(y(x) - 1)$ y, efectivamente, $G(t) = t^3 - 3t$ es impar de modo que $y(-x) = -y(x) + 2$.

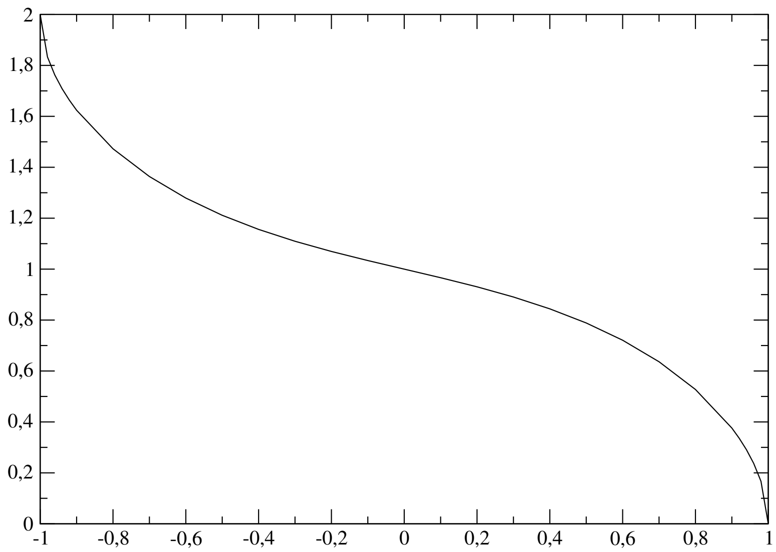

Figura 4: La función $y(x)$ calculada numéricamente por el método de Newton.

Discutimos breve- y cualitativamente la solución en su dependencia de $y_o := y(0)$. Ya que $H(0) = 0$ la constante C está determinada por $G(y_o) = 0$ o sea que $C = 3y_o^2 - y_o^3$ (vea la Figura 5).

- Si $y_o < 0$, entonces $C > 0$ y la solución única del problema de Cauchy está definida en $(-\infty, x_o)$ donde $x_o > 0$ queda determinado por $H(x_o) = C$. $y(\cdot)$ es monótona creciente y cóncava con $\lim_{x \to x_o^-} y'(x) = \infty$.
- Si $y_o = 0$ hay dos soluciones distintas para $x < 0$ que convergen a $y_o = 0$ para $x \to 0$ y no hay solución para $x > 0$.
- Si $0 < y_o < 2$, se tiene $0 < C < 4$. La solución es única y está definida en el intervalo finito (a, b) con $a < 0 < b$ donde $H(a) = G(2) = C - 4$ y $H(b) = G(0) = C$. $y(\cdot)$ es monótona decreciente con $\lim_{x \to a^+} y'(x) = \lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty$.
- Si $y_o = 2$ no hay solución para $x < 0$ y hay dos distintas para $x > 0$ ambas tienden a $y_o = 2$ para $x \to 0$.
- Si $y_o > 2$, se tiene $C < 4$ y la solución única del problema de Cauchy está definida en (x_1, ∞) donde $x_1 < 0$ está determinado por $H(x_1) = G(2) = C - 4$. $y(\cdot)$ es monótona creciente y convexa con $\lim_{x \to x_1^+} = \infty$.

◀

2.1.1. Ecuaciones reducibles a separables

Si $f(x, y) = h(ax + by + c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces definiendo

$$z(x) := ax + by(x) + c \, ,$$

tenemos

$$z' = a + by' = a + bh(z) \, ,$$

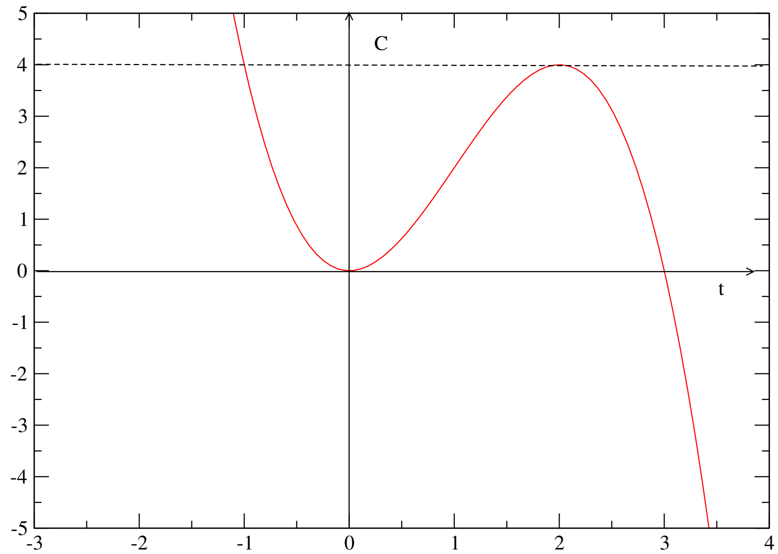

Figura 5: $C = 3t^2 - t^3$ vs t. Determinación de la constante C.

que es separable.

2.2. Ecuación diferencial de Clairaut

La *ED* de Clairaut es la *ED* de primer orden

$$y = y'x + f(y') \ . \tag{13}$$

Aparece frecuentemente en problemas geométricos y está relacionada con la transformación de Legendre.

Derivando (13),

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y'' \iff y''(x + f'(y')) = 0 \ .$$

Si $y'' = 0$ tenemos $y(x) = ax + b$ que insertado en (13) nos impone $b = f(a)$, y por lo tanto toda recta

$$y_a(x) := ax + f(a) \ , \ \ a \in \mathbb{R} \ ,$$

es solución de le *ED* de Clairaut. Si pedimos en cambio que $f'(y') = -x$, y obtenemos una solución ϕ de (13), entonces la recta tangente a la curva $(x, \phi(x))$ en $x = t$ es

$$\xi_t(x) = \phi'(t)(x - t) + \phi(t) = \phi'(t)x \underbrace{-t\phi'(t) + \phi(t)}_{f(\phi(t))} = \phi'(t)x + f(\phi'(t)) \ ,$$

o sea una de las rectas que es solución de (13). La solución directa de $f'(y') = -x$ suele ser dificil. Se obtiene por integración directa si la función inversa a f' es conocida. También se puede poceder eliminando a de las ecuaciones

$$f'(a) = -x \ , \ \ y = ax + f(a) \ ,$$

para obtener y como función de x.

Ejemplo 2.3: Sea $f(x) = -2(x/3)^{3/2}$ para $x \geq 0$ y considere la ec. de Clairaut

$$y = xy' + f(y') = xy' - 2(y'/3)^{3/2} \ .$$

Debemos tener $y' \geq 0$. Las soluciones rectas son

$$y_a(x) = ax - 2(a/3)^{3/2} \ ;$$

pero $a \geq 0$. Luego,

$$-x = f'(y') = -\sqrt{(y'/3)}$$

con lo cual $y'(x) = 3x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $y(x) = x^3 + b$ y la constante b se determina de la *ED* y vale 0. ◀

2.3. Ecuaciones homogeneas

Si $f(\cdot,\cdot)$ es homogenea de grado 0, o sea $f(tx, ty) = f(x, y)$ entonces la *ED* asociada con f se dice **homogenea**. En tal caso, definiendo

$$u(x) := y(x)/x \ , \ \ g(t) := f(1, t) \ ,$$

tenemos

$$g(u) = f(1, u) = f(1, y/x) = f(x, y) = y' = (xu)' = u + xu' \ ,$$

o sea

$$xu' = g(u) - u \ ,$$

que es separable. Si G es una primitiva de $t \to 1/(g(t) - t)$, tendremos

$$G(u) = \ln|x| + C \ , \ \ e^{G(u)} = C|x| \ .$$

2.3.1. Ecuaciones reducibles a homogeneas

Considere

$$f(x, y) = \phi\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \ ,$$

con c y γ no ambos nulos lo que hace que la *ED* correspondiente no sea homogenea. Suponemos también que α y β no son ambos nulos.

Si hay $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lambda\alpha$ y $b = \lambda\beta$, entonces las rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ son paralelas y, en tal caso,

$$f(x, y) = \phi\left(\frac{\lambda(\alpha x + \beta y) + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

y la substitución $z = \alpha x + \beta y$ transforma la *ED* en una separable (ver Ec. reducibles a separables). En caso contrario, las rectas mencionadas se cortan y se propone trasladar el origen del sistema de coordenadas al punto de corte. La matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

es invertible. Usamos la invertibilidad para deshacernos de las constantes c y γ que impiden la homogenidad. Sean h y k tales que[5]

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -\gamma \end{bmatrix} \ .$$

[5] (h, k) es el punto de intersección de las rectas.

Definiendo
$$t := x - h \ , \quad s := y - k \ ,$$
tendremos
$$\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{at + ah + bs + bk + c}{\alpha t + \alpha h + \beta s + \beta k + \gamma} = \frac{at + bs}{\alpha t + \beta s} \ .$$
Con lo cual
$$(ds/dt) = (dy/dx)(dx/dt) = y' = \phi \left(\frac{at + bs}{\alpha t + \beta s} \right) \ ,$$
que es una *ED* homogenea para (s, t).

2.4. Ecuaciones exactas

Supongase que la ecuación

$$F(x, y) = c \ , \tag{14}$$

donde c es constante, define implícitamente una función diferenciable y de x. En tal caso, derivando (14) obtenemos
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)(x, y) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)(x, y) y' = 0 \ .$$
Si es dada una ED

$$A(x, y) + B(x, y) y' = 0 \ , \tag{15}$$

y existe una función $F(x, y)$ que satisface (14), que define una función implícita $y(x)$ diferenciable y tal que $A(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x, y)$, $B(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x, y)$, entonces esta función y es solución de la ED (15). En tal caso se habla de una ED **exacta** y se suele escribir (15) de forma simétrica como
$$A(x, y) \cdot dx + B(x, y) \cdot dy = 0 \ .$$
El método de solución procede determinando (por integración parcial indefinida) una función $x \mapsto \Phi(x; y)$ –para y fijo– que sea una primitiva de $A(x, y)$ y luego, para x fijo, una primitiva $y \mapsto \Psi(y; x)$ de $B(x, y)$. Entonces se pueden ajustar las constantes libres en las funciones Φ y Ψ de modo que $\Phi(x; y) = \Psi(y; x) = F(x, y)$ de donde $x \mapsto y(x)$ queda determinada implícitamente.

Una condición suficiente para que la ED (15) sea exacta es:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)(x, y) = \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)(x, y) \ . \tag{16}$$

Ejemplo 2.4: $y'(3 - \ln(x)) = \frac{y}{x} + 6x$ no es separable pero es exacta ya que con $A(x, y) = 6x + y/x$ tenemos $(\partial A/\partial y) = 1/x$ y con $B(x, y) = \ln(x) - 3$ se tiene $(\partial B/\partial x) = 1/x$.
$$\int A(x, y)\, dx = 3x^2 + y \ln(x) + \alpha(y) =: \Phi(x; y) \ , \quad \int B(x, y)\, dy = y(\ln(x) - 3) + \beta(x) =: \Psi(y; x) \ ;$$
la función α (alternativamente β) se determina de la condición $\Phi(x; y) = \Psi(y; x) = F(x, y)$ y obtenemos $F(x, y) = 3x^2 + y(\ln(x) - 3)$. Entonces,
$$y(x) = \frac{c - 3x^2}{\ln(x) - 3}$$
con c una constante. ◀

2.4.1. Factor integrante

Cuando una ED (15) no es exacta, existe la posibilidad de que

$$h(x,y)\,\{A(x,y)+B(x,y)\,y'\}=0$$

si lo sea. Para ello es necesario que el llamado **factor integrante** h satisfaga la ecuación diferencial en derivadas parciales que se obtiene de (16); o sea:

$$A(x,y)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)(x,y)-B(x,y)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)(x,y)+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)(x,y)-\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)(x,y)\right)h(x,y)=0\ .$$

En tal caso obtenemos vía la solución de la ED exacta una solución de la ED inexacta dada.
Ejemplo 2.5: Considere $y'=\frac{y+6x^2}{x(3-\ln(x))}$ que es la misma ED del ejemplo anterior pero que reescribimos como $y+6x^2+x(\ln(x)-3)y'=0$. Con $A(x,y)=y+6x^2$ y $B(x,y)=x(\ln(x)-3)$ la ED no es exacta. Sin embargo, con $h(x,y)=1/x$ tenemos

$$0=h(x,y)\,[A(x,y)+B(x,y)y']=\frac{y}{x}+6x+(\ln(x)-3)y'$$

que es exacta y la misma ED del ejemplo anterior. ◀

2.5. Ecuaciones lineales

Si $f(x,y)$ es función lineal de y, o sea $f(x,y)=a_o(x)y+g(x)$, hablamos de una *ED* ordinaria **lineal** de primer orden. Conviene en este caso hablar de *ED* **lineal normal** o **lineal regular** para distinguirlo del caso **lineal** más general (1)

$$a_1(x)y'+a_o(x)y+q(x)=0\ .$$

Si aquí $a_1(x)\neq 0$ para todo x obtenemos, dividiendo por $a_1(x)$, la *ED* lineal normal. El caso donde $a_1(x)=0$ para algún x se tratará más adelante. La *ED* lineal normal de primer orden es entonces

$$y'=-p(x)y+g(x)\ . \tag{17}$$

Cuando $g\equiv 0$, esta ecuación se denomina **homogenea**, en caso contrario **inhomogenea**. Sea P una primitiva de p en el intérvalo $I\subset\mathbb{R}$. Observe que si p es continua en I, y I es finito, entonces siempre existe una primitiva. Entonces

$$\phi_A(x):=Ae^{-P(x)}\ ,$$

donde $A\in\mathbb{R}$ está definida en I y es diferenciable allí con $\phi_A'=-p(x)\phi_A$. O sea que ϕ_A es solución de la ec. homogenea. Además,

$$(e^{P(x)}y)'=p(x)e^{P(x)}y+e^{P(x)}y'=e^{P(x)}g(x)\ ,$$

de donde integrando,

$$e^{P(x)}y(x)=e^{P(x_o)}y(x_o)+\int_{x_o}^{x}e^{P(t)}g(t)dt\ ,$$

o sea que

$$y(x)=e^{-P(x)+P(x_o)}y(x_o)+e^{-P(x)}\int_{x_o}^{x}e^{P(t)}g(t)dt\ .$$

Usando el teorema de existencia y unicidad local, podemos demostrar

Teorema 2.3 *Si p y g son continuas para x en un intervalo $I\subset\mathbb{R}$, y $P:I\to\mathbb{R}$ es diferenciable con $P'=p$, entonces la solución del problema de Cauchy (7) asociado con (17) es única y dada por*

$$y(x)=\exp(-P(x)+P(x_o))y_o+e^{-P(x)}\int_{x_o}^{x}e^{P(t)}g(t)dt\ .$$

2.6. Ecuaciones reducibles a ecuaciones lineales (ejemplos selectos)

La ec. de **Bernoulli**

$$y' + p(x)y = g(x)y^t \ , \ \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

es lineal normal y homogenea para $t = 1$ y lineal normal no homogenea para $t = 0$. También observamos que para $t > 0$, $y \equiv 0$ es solución. Definimos

$$z(x) = (y(x))^{1-t} \ ,$$

para $t \neq 1$, observando que debemos tener algún cuidado cuando t no es entero. Entonces,

$$z' = (1-t)y^{-t}y' = (1-t)y^{-t}(-py + gy^t) = (1-t)(-pz + g)$$

es una ec. lineal normal para z.

Es más inmediato proponer $y(x) = A(x)e^{-P(x)}$ donde $P' = p$. Entonces,

$$A'e^{-P} - pAe^{-P} = (Ae^{-P})' = y' = -py + gy^t = -pAe^{-P} + gA^t e^{-tP} \ ,$$

o sea

$$A'/A^t = ge^{(1-t)P} \ .$$

Esta *ED* para A es separable y

$$A(x)^{1-t} = A(x_o)^{1-t} + (1-t)\int_{x_o}^{x} g(s)e^{(1-t)P(s)}ds \ .$$

Considere la *ED* **de Riccati**

$$y' = r(x)y^2 - p(x)y + g(x) \ .$$

El siguiente método permite construir una nueva solución a partir de una conocida. Si ϕ es solución, entonces, con $z := y - \phi$, tenemos

$$z' = y' - \phi' = r(y^2 - \phi^2) - p(y - \phi) = -pz - r\phi^2 + r(z + \phi)^2 = -pz + rz^2 + 2r\phi z \ ,$$

o lo que es lo mismo,

$$z' + (p - 2r\phi)z = rz^2 \ ,$$

que es una *ED* de Bernoulli.

2.7. Solución iterativa del problema de Cauchy

Suponga que se tiene una solución y del problema de Cauchy (7)

$$y' = f(x,y) \ , \ \ y(x_o) = y_o \ ,$$

definida en un intérvalo $I \subset \mathbb{R}$. Integrando, obtenemos

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t, y(t))dt \ . \tag{18}$$

Inversamente, si $y : I \to \mathbb{R}$ satisface esta ecuación integral, entonces es diferenciable, por el Teorema Fundamental del Cálculo, y es solución del problema de Cauchy.

Esto sugiere analizar el problema de Cauchy vía la ecuación integral (18). Supongamos que $f(\cdot,\cdot)$ está definida en $I \times J$ donde I y J son intérvalos reales, y f es continua. Para $g : I \to J$ continua, definimos

$$T(g)(x) := y_o + \int_{x_o}^{x} f(t, g(t))dt \ . \tag{19}$$

Entonces T es un mapa que aplica las funciones continuas sobre I a valores en J en funciones diferenciables sobre I. Además, $T(\phi) = \phi$ si y sólo si ϕ es solución del problema de Cauchy. ϕ es entonces lo que se llama un **punto fijo** de la aplicación T. Esto nos provee de una ruta a la demostración de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy, vía el análisis de los puntos fijos de T.

La posibilidad de aplicar sucesivamente al operador T sugiere la pregunta de cuando el proceso iterativo

$$g^{(n+1)} := T(g^{(n)}) \ , \ \ n = 1, 2, \cdots \ ,$$

es convergente; ya que cuando este proceso converge esperamos que el límite sea un punto fijo de T y por ende una solución del problema de Cauchy. Habrá entonces que especificar la noción de convergencia, cosa que no se ha hecho aún.

2.8. Teoremas de existencia y unicidad

Cuando I es finito y cerrado, asociamos a cada función g continua en $\mathcal{C}(I)$, su norma

$$\|g\| := \max\{|g(x)| : x \in I\} \ .$$

Con esto $\mathcal{C}(I)$ es un espacio vectorial real normado. Recordando que el límite uniforme de funciones continuas es continuo y que

Lema 5 *Una sucesión $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{C}(I)$ converge uniformemente a f si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$.

Teorema 2.4 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, y $J \subset \mathbb{R}$ cerrado. Entonces $\mathcal{C}(I; J)$, las funciones continuas sobre I a valores en J, provisto de la norma $\|\cdot\|$ es un espacio vectorial real completo.*

Tomemos ahora un intérvalo cerrado I y $J \subset \mathbb{R}$. Consideramos el operador T dado por (19) definido para funciones en $\mathcal{C}(I)$ a valores en J.

Lema 6 *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intérvalo cerrado finito, y f es continua y acotada sobre $I \times J$, el operador T definido sobre $\mathcal{C}(I, J)$ por (19) es continuo. Si además existe $\beta > 0$ tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \beta |y_1 - y_2| \tag{20}$$

para todo $x \in I$ y todo $y_1, y_2 \in J$, entonces

$$|T(g)(x) - T(h)(x)| \leq \beta \int_{x_o}^{x} |g(t) - h(t)||dt| \leq \beta |x - x_o| \|g - h\| \ . \tag{21}$$

Demostración: La aplicación $I \ni x \mapsto f(x, g(x))$ es continua para $g \in \mathcal{C}(I; J)$. Cuando f es acotada (lo que se cumple automaticamente si J es cerrado y acotado), tendremos $|f(t, p)| \leq K$ y

$$|T(g)(x) - T(h)(x)| \leq \int_{x_o}^{x} |f(t, g(t)) - f(t, h(t))| \cdot |dt| \leq 2|x - x_o|K \ ,$$

de donde, tomando el máximo sobre $x \in I$, $\|T(g) - T(h)\| \leq 2K|I|$, siendo $|I|$ el largo del intérvalo I. Luego, T es continuo.

Si se cumple (20), tendremos

$$\begin{aligned} |T(g)(x) - T(h)(x)| &\leq \int_{x_o}^{x} |f(t, g(t)) - f(t, h(t))| \cdot |dt| \\ &\leq \beta \int_{x_o}^{x} |g(t) - h(t)| \cdot |dt| \leq \beta \|g - h\| \ |x - x_o| \ . \end{aligned}$$

■

La condición (20) se llama **condición de Lipschitz**. Observese, que si la derivada parcial $(\partial f / \partial y)(x, y)$ existe y es acotada $|(\partial f / \partial y)(x, y)| \leq K$, entonces el Teorema del Valor Medio indica que se cumple (20).

2.8.1. Contracciones en espacios métricos

Un mapa $R : X \to X$ de un espacio métrico X en si mismo es una **contracción** si existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que cualesquiera sean $x, y \in X$,

$$d(R(x), R(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ es la distancia definida en $X \times X$. Es inmediato que una contracción es continua.

Teorema 2.5 *Si $R : X \to X$ es una contracción del espacio métrico completo X entonces R admite un punto fijo y este es único.*

<u>Demostración</u>: Suponga que $R(f) = f$ y $R(g) = g$; entonces $d(f, g) = d(R(f), R(g)) \leq \alpha d(f, g)$ con $\alpha < 1$ es imposible salvo cuando $d(f, g) = 0$ en cuyo caso $f = g$. Luego, si hay un punto fijo, este es único.

Para $x \in X$ considere la sucesión $\{x_n := R^n(x) : \ n \in \mathbb{N}\}$[6], $x_o = x$. Entonces, para $n \geq 1$,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(R(x_n)), R(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) = \alpha d(R(x_{n-1}), R(x_{n-2}))$$

$$\leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_o) \ .$$

Si $d(x_1, x) = 0$ entonces $x_1 = R(x) = x$ y x es un punto fijo. En caso contrario, $d(x_1, x) > 0$. Entonces, cualesquiera que sean los naturales m, n con $m \geq n$, tendremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots d(x_{n+1}, n)$$

$$\leq \alpha^{m-1} d(x_1, x) + \alpha^{m-2} d(x_1, x) + \cdots + \alpha^n d(x_1, x)$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k \right) d(x_1, x) \ .$$

Ya que $\alpha < 1$ la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ es convergente. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe n_o tal que para $m \geq n \geq n_o$, $\sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k < \epsilon / d(x_1, x)$. Luego $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para $m \geq n \geq n_o$. Por la completitud de X, existe $f \in X$ tal que $f = \lim_{n \to \infty} x_n$. Entonces $d(R(f), f) \leq d(R(f), R(x_n)) + d(f, R(x_n)) \leq \alpha d(f, x_n) + d(f, x_{n+1})$ y, tomando el límite $n \to \infty$ concluimos que $d(R(f), f) \leq 0$ o sea que $d(R(f), f) = 0$ y $R(f) = f$. ■

Corolario 2.5.1 *Si $R : X \to X$ es continuo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que R^n es una contracción, entonces R admite un punto fijo que es único.*

<u>Demostración</u>: Por el teorema $R^n(f) = f$ para un único $f \in X$. Entonces, $R^n(R(f)) = R(R^n(f)) = R(f)$ y $R(f)$ es un punto fijo de R^n, y por ende $R(f) = f$, o sea que f es punto fijo de R. Si $R(g) = g$, entonces $R^n(g) = g$ con lo cual $g = f$. ■

Estamos ahora listos para aplicar estos resultados al operador integral T asociado a una *ED* de primer orden. La demostración del primer resultado es una aplicación directa del teorema del punto fijo para contracciones y merece ser olvidado a la luz de los resultados más fuertes que siguen.

Teorema 2.6 *Si f satisface la condición de Lipschitz (20) en $I \times J$ entonces existe un subintervalo $L \subset I$ con $x_o \in L$ tal que el problema de Cauchy (7) tiene solución única en L.*

<u>Demostración</u>: Usando la cota (21), basta elegir $L \subset I$ tales que $\beta |x - x_o| < 1$ para todo $x \in L$. Luego, tomando el máximo sobre $x \in L$, T definido en $\mathcal{C}(L)$ es una contracción y admite un único punto fijo que es la única solución, en L, del problema de Cauchy. ■

[6] $\mathbb{N}$ denota los números naturales $0, 1, 2, \cdots$.

Teorema 2.7 *Si f satisface la condición de Lipschitz (20) en $I \times J$ entonces el problema de Cauchy (7) admite una única solución.*

Demostración: Con (21) estimamos

$$|T^2(g)(x) - T^2(h)(x)| \leq \beta \int_{x_o}^{x} |T(g)(t) - T(h)(t)| \cdot |dt| \leq \beta^2 \int_{x_o}^{x} |t - x_o| \cdot |g(t) - h(t)| \cdot |dt|$$

$$\leq \beta^2 \|g - h\| \int_{x_o}^{x} |t - x_o| \cdot |dt| = \frac{\beta^2 |x - x_o|^2}{2} \|g - h\| \, .$$

Lo que nos conduce a conjeturar que:

$$|T^m(g)(x) - T^m(h)(x)| \leq \frac{\beta^m |x - x_o|^m}{m!} \|g - h\| \; ;$$

y esto lo probamos por inducción. En efecto,

$$|T^{m+1}(g)(x) - T^{m+1}(h)(x)| \leq \beta \int_{x_o}^{x} |T^m(g)(t) - T^m(h)(t)| \cdot |dt|$$

$$\leq \frac{\beta^{m+1} \|g - h\|}{m!} \int_{x_o}^{x} |t - x_o|^m \cdot |dt| = \frac{\beta^{m+1} |x - x_o|^{m+1}}{(m+1)!} \|g - h\| \, .$$

Tomando el máximo respecto de $x \in I$, tendremos

$$\|T^m(g) - T^m(h)\| \leq \frac{\beta^m |I|^m}{m!} \|g - h\| \, ,$$

donde $|I|$ es el largo del intérvalo I. Existe entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^m |I|^m / m! < 1$ y entonces T^m es contracción. Aplicando el corolario al teorema del punto fijo, hemos terminado. ■

Teorema 2.8 *Sea I es un intérvalo no necesariamente acotado. Si f satisface una condición de Lipschitz (20) para $I_n \times J$ donde $I_n \subset I$ es para todo $n \geq 1$ un intérvalo cerrado y finito, y se tiene $I_n \subset I_{n+1}$ y cualquiera sea $x \in I$ hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_m$, entonces el problema de Cauchy (7) tiene solución única.*

Demostración: Para algún m, se tiene $x_o \in I_m$ y a fortiori $x_o \in I_k$ para $k \geq m$. En $I_k \times J$ tenemos solución única ϕ_k del problema de Cauchy en I_k y, ya que $I_k \subset I_{k+1}$, la restricción de la solución ϕ_{k+1} a I_k es igual a ϕ_k. Dado $x \in I$ buscamos $k \geq m$ lo suficientemente grande para que $x \in I_k$ lo que nos da una solución del problema de Cauchy:

$$\phi(x) := \phi_k(x) \; , \quad x_o, x \in I_k \; .$$

Si ahora y es solución del problema de Cauchy, entonces $y - \phi|_{I_k} \equiv 0$ para todo I_k con k lo suficientemente grande. En particular, cualquiera sea $u \in I$, $y(u) = \phi(u)$ pues todo u está en algún I_k. ■

Estos resultados implican los resultados de existencia y unicidad locales y globales que hemos citado. Por ejemplo, en el caso de una *ED* lineal normal, si p es continua en un intérvalo I entonces es acotada en todo subintérvalo finito y por ende $f(x,y) = -p(x)y + g(x)$ satisface una condición de Lipschitz (20) con respecto a la segunda variable en cualquier subintérvalo finito de I. Aplicando el Teorema 2.8, obtenemos la unicidad de la solución al problema de Cauchy, viz. el Teorema 2.3.

3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Las ecuaciones de segundo orden son, de acuerdo a (1) de la forma $F(x, y, y', y'') = 0$, o menos generalmente y de acuerdo a (2), $y'' = f(x, y, y')$.

Si F o f no dependen de y, entonces la transformación $u = y'$ transforma la *ED* dada en una de primer orden para u: $F(x, u, u') = 0$ o $u' = f(x, u)$.

Ejemplo 3.1: $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0$ para $x > 0$. La transformación $u(x) := y'(x)$ nos da la *ED* lineal de primer orden $x^2u' + 2xu = 1$ para u. Ya que buscamos solución para $x > 0$, podemos escribir $u' = -(2/x)u + (1/x^2)$. La solución es:

$$u(x) = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x} \; .$$

Integrando, obtenemos

$$y(x) = A + \frac{B}{x} + \ln(x) \; .$$

◀

Otro tipo de ecuaciones de segundo orden reducible a ecuaciones de primer orden es aquel donde la variable independiente x no aparece en F o f. Así, si $f(x, y, y') = g(y, y')$, entonces con $u = y'$ tendremos $u' = g(y, u)$; lo que sugiere ver a y como variable independiente. Luego, $(du/dx) = (du/dy)(dy/dx) = u(du/dy)$ y $u(du/dy) = g(y, u)$. Si $\psi(y)$ es solución de esta última *ED*, entonces obtenemos una solución a la ec. original si $y' = \psi(y)$.

Ejemplo 3.2: $yy'' + (y')^2 = 0$. Aquí, suponiendo que $y \neq 0$, obtenemos via $u = y'$, que $yu(du/dy) + u^2 = 0$. La solución $u \equiv 0$ corresponde a $y \equiv$ *const* que es en efecto solución. Para $u \neq 0$, $y(du/dy) + u = 0$ conduce a la ec. separable $du/dy = -u/y$ con solución $\phi(y) = C/y$. Entonces, $y' = C/y$ conduce a $y^2 + A = Bx$. Luego, $y_\pm(x) = \pm\sqrt{Bx + A}$, $x \neq -A/B$, son soluciones de la *ED* dada. ◀

Para atacar una ED como $y'' = f(y)$, podemos multiplicar por y' y usar que $((y')^2/2)' = y'y''$. Si F es una primitiva de f entonces derivando $((y')^2/2) - F(y)$ obtenemos $y'y'' - f(y)y' = 0$ o sea que

$$\frac{1}{2}\,(y')^2 = F(y) + C$$

y tomando la raíz cuadrada obtenemos ED separables. Este método llamado de cuadraturas es de uso frecuente en problemas de mecánica y expresa la conservación de la energía.

El resultado básico que garantiza existencia y unicidad local es

Teorema 3.1 *Si f es continua en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ y las derivadas parciales $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ existen y son continuas en U, entonces el problema de Cauchy asociado a*

$$y'' = f(x, y, y')$$

admite una solución única para un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a x_o.

3.1. Ecuaciones lineales

La ecuación diferencial lineal de segundo orden es

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \; ;$$

esta será **normal o regular** si P no se anula para todo x, en cuyo caso la rescribimos

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \; . \tag{22}$$

Teorema 3.2 *Si p, q, y g son continuas en el intérvalo I entonces la solución del problema de Cauchy asociado (22) en I es única.*

Las dos siguientes transformaciones son a veces de utilidad en la discusión de una *ED* lineal general $Py'' + Qy' + Ry = G$. Si P no se anula en ningún punto, S es una primitiva de Q/P, y

$$p := \exp(S)\ ,\ \ q := Rp/P\ ,\ \ h := Gp/P\ ,$$

entonces

$$(py')' + qy = h\ .$$

Además, con

$$r := \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{P}\right)'\ ,\ \ m := g\sqrt{p}/P\ ,\ \ w := y\sqrt{p}\ ,$$

se tiene

$$w'' + rw = m\ .$$

3.1.1. Caso homogeneo

Si $g \equiv 0$ en (22) hablamos de una *ED* lineal normal homogenea. En este caso, si y_1 y y_2 son soluciones entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ también lo es cualesquiera que sean las constantes c_1 y c_2. En particular, $y \equiv 0$ es solución. El espacio de las soluciones es entonces un espacio vectorial. Por el teorema de existencia y unicidad local, la *ED* homogenea admite una única solución al problema de Cauchy.

El siguiente resultado, que se desprende inmediatamente del teorema de existencia y unicidad, es importante

Proposición 3.1 *Suponga que p y q son continuas sobre el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y que ϕ es solución de la ec. homogenea (22) en I; entonces:*

1. *si $\phi(x_o) = \phi'(x_o) = 0$ para algún $x_o \in I$, entonces $\phi \equiv 0$.*
2. *si ϕ se anula en algún subintervalo abierto no vacio de I, entonces $\phi \equiv 0$.*

Demostración: En el caso de 1., ϕ es solución del problema de Cauchy $\phi(x_o) = 0$ y $\phi'(x_o) = 0$. Pero $y \equiv 0$ en I también es solución del mismo problema de Cauchy. Luego $\phi \equiv 0$ por el teorema 3.2. En el caso 2., si ϕ se anula en un subintervalo abierto y no vacio J de I, entonces ϕ' se anula en J; y la afirmación se desprende de 1. ■

Proposición 3.2 *Sean p y q continuas en el intérvalo I, y ϕ_1, ϕ_2 dos soluciones de la ec. homogenea (22).*

1. *Si*

   $$W_{\phi_1,\phi_2}(x) := \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) \neq 0 \tag{23}$$

   para todo $x \in I$, entonces dado $(x_o, y_o, u_o) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, existen constantes reales c_1 y c_2 únicas, tales que $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ es la solución de (22) con $\phi(x_o) = y_o$ y $\phi'(x_o) = u_o$.

2. *(Abel) $W_{\phi_1,\phi_2}(x) = c\exp(-P(x))$ donde $c \in \mathbb{R}$ y $P'(x) = p(x)$.*
3. *Si ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes entonces $W_{\phi_1,\phi_2}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

Demostración:

1. Estas constantes están determinadas por la ecuaciónes
$$y_o = c_1\phi_1(x_o) + c_2\phi_2(x_o)\ ,\ \ u_o = c_1\phi_1'(x_o) + c_2\phi_2'(x_o)\ .$$
Ahora (23) para x_o, es precisamente la condición necesaria y suficiente para que este sistema de dos ec. lineales tenga una única solución dada por
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_o) & \phi_2(x_o) \\ \phi_1'(x_o) & \phi_2'(x_o) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_o \\ u_o \end{bmatrix}\ .$$

2. Tenemos
$$\phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1 = 0\ ,$$
$$\phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2 = 0\ ,$$
y multiplicando la primera identidad por ϕ_2 y la segunda por ϕ_1 y restando obtenemos
$$(\phi_1\phi_2'' - \phi_2\phi_1'') + p(\phi_1'\phi_2 - \phi_2'\phi_1) = 0\ ;$$
o sea
$$W_{\phi_1,\phi_2}' + pW_{\phi_1,\phi_2} = 0\ .$$
La solución de esta *ED* lineal normal homogenea es $W_{\phi_1,\phi_2}(x) = ce^{-P(x)}$.

3. Suponga que W_{ϕ_1,ϕ_2} se anula para algún punto $x_o \in I$. Entonces hay c_1 y c_2 reales no ambos nulos tales que
$$c_1\phi_1(x_o) + c_2\phi_2(x_o) = 0 = c_1\phi_1'(x_o) + c_2\phi_2'(x_o)$$
ya que $W_{\phi_1,\phi_2}(x_o) = 0$ es el determinante de este sistema de ecuaciones lineales. Entonces $\phi := c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ es solución del problema de Cauchy de (22) con $\phi(x_o) = \phi'(x_o) = 0$. Por la proposición 3.1, $\phi \equiv 0$ con lo cual ϕ_1 y ϕ_2 no son linealmente independientes. ■

La función W_{ϕ_1,ϕ_2} definida por (23) se llama **wronskiano** de ϕ_1 y ϕ_2. Observe que por la fórmula de Abel, el wronskiano de dos soluciones no se anula nunca si no es idénticamente nulo.
Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que el espacio vectorial formado por las soluciones de una *ED* lineal normal homogenea tiene a lo sumo dimensión 2. Como veremos, tiene exactamente dimensión 2.

Lema 7 *Las funciones f_1 y f_2 definidas y diferenciables en un intérvalo I son linealmente independientes si $W_{f_1,f_2}(x) \neq 0$ para algún $x \in I$.*

Demostración: Si $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$ entonces
$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0\ ,\ \ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0\ .$$
Si
$$W_{f_1,f_2}(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0$$
para algún $x \in I$, entonces la matriz es invertible y de esto se deduce que $c_1 = c_2 = 0$.[7] ■

[7] Suponga en cambio $W_{f_1,f_2}(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = 0$ para todo $x \in I$. Si $f_2 \equiv 0$ entonces $f_2 = 0.f_1$. Si f_2 no es identicamente nula, entonces poniendo $g(x) := f_1(x)/f_2(x)$ para $x \in K_2 := \{x \in I :\ f_2(x) \neq 0\}$, se tendrá, por continuidad de f_2, que K_2 es abierto y como $g' = 0$, $f_1 = cf_2$ en K_2 con $c \in \mathbb{R}$. La continuidad de f_1 y de f_2 implican que $f_1 = cf_2$ en la clausura $\overline{K_2}$ de K_2. Del mismo modo, $f_2 = df_1$ en la clausura $\overline{K_1}$ de $K_1 := \{x \in I :\ f_1(x) \neq 0\}$. Si $K_1 \cap K_2$ no es vacio, entonces $d = 1/c$. Pero puede pasar que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $c = 0$ y $d = 0$; y f_1, f_2 son linealmente independientes. Por ejemplo: $f_1(x) = (2/3)x^{3/2}$ para $x \geq 0$ y $f_1(x) = 0$ para $x < 0$ es diferenciable; $f_2(x) = 0$ para $x > 0$ y $f_2(x) = (2/3)(-x)^{3/2}$ para $x \leq 0$ es diferenciable; $W_{f_1,f_2} \equiv 0$; pero f_1 y f_2 son linealmente independientes (sobre cualquier intérvalo que contenga un entorno de 0).
Otro ejemplo: $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = |x|^3$ en $\mathbb{R}$ son linealmente independientes pero $W_{f_1,f_2} \equiv 0$.

Coeficientes constantes Si en la *ED* lineal normal homogenea (22), tenemos $p(x) = a$ y $q(x) = b$, entonces la función $\xi_r(x) := e^{rx}$ satisface

$$\xi_r'' + a\xi_r' + b\xi_r = (r^2 + ar + b)\xi_r$$

y será solución cuando $r^2 + ar + b = 0$. Las raices de esta ecuación son:

$$r_\pm = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \ .$$

Ya que

$$W_{\xi_{r_+},\xi_{r_-}}(x) = -e^{-ax}\sqrt{a^2 - 4b} \ ,$$

no se anula si $a^2 \neq 4b$, en ese caso tendremos dos soluciones linealmente independientes que generan todas las soluciones. Cuando $a^2 = 4b$, $r_+ = r_- = r = -a/2$ y hay que encontrar otra solución. Para ello, usamos el método de d'Alembert que plantea una solución de la forma $y = u\xi_r$. Obtenemos

$$y' = u'\xi_r + u\xi_r' \ , \ \ y'' = u\xi_r'' + 2u'xi_r' + u''\xi_r \ ,$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 = by + ay' + y'' &= u(a\xi_r + b\xi_r' + \xi_r'') + u'(2\xi_r' + b\xi_r) + u''\xi_r \\ &= u'(-a\xi_r + a\xi_r) + u''\xi_r \ , \end{aligned}$$

con lo cual $u(x) = Ax + B$. Luego, tomando $A = 1$ y $B = 0$, $\phi_2(x) = x\xi_r(x)$ es solución. Y como

$$W_{\xi_r,\phi_2}(x) = e^{-ax} \ ,$$

estas dos soluciones son linealmente independientes.

Teniendo en cuenta (verifiquelo) que si $y(x) \in \mathbb{C}$ es solución de la *ED* lineal normal homogenea donde p, q toman valores reales, entonces $Re(y(x))$ y $Im(y(x))$ también son soluciones, obtenemos:

Teorema 3.3 *Para $a, b \in \mathbb{R}$, toda solución de la ED*

$$y'' + ay' + by = 0$$

en cualquier intérvalo $I \subset \mathbb{R}$ es una combinación lineal de las funciones linealmente independientes ξ_+ y ξ_- dadas por:

1. $\xi_\pm(x) = \exp(r_\pm x)$, $r_\pm = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$, *para* $a^2 > 4b$*;*
2. $\xi_+(x) = exp(-ax/2)\cos(\sqrt{4b - a^2}x)$, $\xi_-(x) = \exp(-ax/2)\sin(\sqrt{4b - a^2}x)$, *para* $4b > a^2$*;*
3. $\xi_+(x) = exp(-ax/2)$, $\xi_-(x) = x\exp(-ax/2)$ *para* $a = 4b$*.*

Volvemos ahora a la *ED* lineal normal y homogenea.

Teorema 3.4 *(d'Alembert) Si p, q son continuas sobre un intérvalo $I \subset \mathbb{R}$, $P' = p$ y ϕ es solución en I de la ED (22) homogenea tal que $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces*

$$u(x) = \phi(x)\int_{x_o}^{x} \frac{\exp(-P(t))}{\phi(t)^2} dt \ , \ \ x_o \in I \ ,$$

es una solución linealmente independiente de ϕ.

Demostración: Calcule las derivadas de u y verifique que es solución de la *ED* Se tiene $W_{\phi,u}(x) = \exp(-P(x))$ con lo cual ϕ y u son linealmente independientes. ■

Demostramos que el espacio vectorial de las soluciones es bidimensional.

Teorema 3.5 *Si p y q son continuas en un intérvalo $I \subset \mathbb{R}$, el espacio vectorial de las soluciones de la ED (22) homogenea tiene dimensión 2.*

Demostración: Por el teorema de existencia y unicidad hay dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 tales que: $\phi_1(x_o) = 0$, $\phi_1'(x_o) = 1$, $\phi_2(x_o) = 1$, y $\phi_2'(x_o) = 0$; donde $x_o \in I$. Estas soluciones son distintas y su Wronskiano satisface $W_{\phi_1,\phi_2}(x_o) = -1$ con lo cual son linealmente independientes. Por la proposición 3.2, no hay más soluciones linealmente independientes. ■

Los siguientes resultados (debidos a Sturm) proveen información genérica sobre ceros de soluciones de ED lineales normales de segundo orden.

Teorema 3.6 *Bajo las hipótesis de la proposición 3.2, si ϕ_1, ϕ_2 son dos soluciones y se tiene $\phi_1(x_o) = \phi_2(x_o) = 0$ para algún $x_o \in I$, entonces ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes.*

Demostración: $W_{\phi_1,\phi_2}(x_o) = 0$. Aplique la proposición 3.2. ■

Teorema 3.7 *, si ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes entonces sus ceros alternan: Entre dos ceros de una hay exactamente un cero de la otra.*

Demostración: Por la proposición 3.2, W_{ϕ_1,ϕ_2} no se anula y no cambia de signo. Sean $a, b \in I$ con $a < b$ dos ceros consecutivos de ϕ_2 (que no es idénticamente nula por la hipótesis de independencia lineal); o sea $\phi_2(a) = \phi_2(b) = 0$ y $\phi_2(t) \neq 0$ para $t \in (a, b)$. Por lo tanto $W_{\phi_1,\phi_2}(a) = \phi_1(a)\phi_2'(a)$ y $W_{\phi_1,\phi_2}(b) = \phi_1(b)\phi_2'(b)$ tienen el mismo signo y no se anulan. Pero $\phi_2'(a)$ y $\phi_2'(b)$ tienen signo distinto y por ende $\phi_1(a)$ y $\phi_1(b)$ también tienen signo distinto. Por el Teorema del Valor Intermedio, hay $c \in (a, b)$ con $\phi_1(c) = 0$. Si hay otro cero de ϕ_1 en (a, b) entonces intercambiando ϕ_1 con ϕ_2 en el argumento recién hecho, obtengo que ϕ_2 tiene un cero en (a, b) lo que contradice la suposición. Por lo tanto c es el único cero de ϕ_1 en (a, b). ■

Teorema 3.8 *Si en $I \subset \mathbb{R}$, se tiene $y_1''(x)+r_1(x)y_1(x) = 0$ y $y_2''(x)+r_2(x)y_2(x) = 0$ donde $r_1(x) > r_2(x)$ para todo $x \in I$, y y_2 no es idénticamente nula, entonces entre dos ceros de y_2 hay a lo menos un cero de y_1.*

Demostración: Suponga $a < b$ son ceros consecutivos de y_2 en I; o sea $y_2(a) = y_2(b) = 0$ y $y_2(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Podemos –considerando a $-y_2$– suponer que $y_2(t) > 0$ para $t \in (a, b)$. En tal caso $y_2'(a) > 0$ y $y_2'(b) < 0$ pues por la proposición 3.1 ninguno de estos dos números puede ser cero.
Tenemos

$$W_{y_1,y_2}(a) = y_1(a)y_2'(a) \ , \quad W_{y_1,y_2}(b) = y_1(b)y_2'(b) \ ,$$

y

$$\frac{dW_{y_1,y_2}}{dx}(x) = y_1(x)y_2(x)(r_1(x) - r_2(x)) \ .$$

La demostración será por el absurdo. Supongamos entonces que y_1 no se anula en (a, b). Podemos suponer que $y_1(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$. En ese caso, por la continuidad de y_1, $y_1(a) \geq 0$ y $y_2(b) \geq 0$ lo que implica –por un lado– que $W_{y_1,y_2}(a) \geq 0$ y $W_{y_1,y_2}(b) \leq 0$. Pero, como $dW_{y_1,y_2}/dx > 0$ en el intervalo (a, b) necesariamente $W_{y_1,y_2}(b) > W_{y_1,y_2}(a) \geq 0$.
La suposición de que y_1 no tiene ceros en (a, b) es falsa. ■

3.1.2. Caso inhomogeneo

Si g no se anula identicamente en I, (22) es una *ED* inhomogenea. Se tiene el siguiente resultado trivial

Teorema 3.9 *Si y_1 y y_2 son soluciones de (22) entonces $y_1 - y_2$ es solución de la correspondiente ED homogenea. Toda solución de (22) es de la forma*

$$y = \eta + c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

donde η es una solución cualquiera pero fija de (22), $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y ϕ_1, ϕ_2 son soluciones de la correspondiente ED homogenea, cuyo Wronskiano no se anula (luego son linealmente independientes).

Esto reduce el problema a la caza de una solución cualquiera de la *ED* El método de variación de las constantes nos provee de una solución como sigue. Hacemos el Ansatz

$$y(x) = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x) ,$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son dos soluciones cuyo wronskiano no se anula de la correspondiente *ED* homogenea; y c_1, c_2 son funciones a determinar. Entonces,

$$y' = c_1'\phi_1 + c_1\phi_1' + c_2'\phi_2 + c_2\phi_2'$$

involucra a las derivadas de c_1 y c_2; luego, y'' tendrá derivadas dobles de c_1 y c_2. Para evitar esto, pedimos que

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 \equiv 0 . \tag{24}$$

Entonces,

$$y'' = (c_1\phi_1' + c_2\phi_2')' = c_1'\phi_1' + c_1\phi_1'' + c_2'\phi_2' + c_2\phi_2'' .$$

y será solución si

$$\begin{aligned} g = y'' + py' + qy &= c_1'\phi_1' + c_1\phi_1'' + c_2'\phi_2' + c_2\phi_2 + p(c_1\phi_1' + c_2\phi_2') + q(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \\ &= c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' + c_1(\phi_1'' + p\phi_1' + q\phi_1) + c_2(\phi_2'' + p\phi_2' + q\phi_2) = c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' . \end{aligned}$$

Esta ecuación combinada con (24) se puede escribir como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix}}_{=:\Phi(x)} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} .$$

Ya que $\det(\Phi(x)) = W_{\phi_1,\phi_2}(x) \neq 0$, $\Phi(x)$ es invertible y

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = (\Phi(x))^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} .$$

Ahora con la fórmula para la inversa de una matriz 2×2,

$$(\Phi(x))^{-1} = \frac{1}{W_{\phi_1,\phi_2}} \begin{bmatrix} \phi_2' & -\phi_2 \\ -\phi_1' & \phi_1 \end{bmatrix} ;$$

ergo

$$c_1' = \frac{-\phi_2 g}{W_{\phi_1,\phi_2}} , \quad c_2' = \frac{\phi_1 g}{W_{\phi_1,\phi_2}} .$$

Integrando y eligiendo las constantes de integración nulas pues nos interesan primitivas de c_1 y c_2 lo más simples posibles,

$$c_1(x) = -\int_{x_o}^{x} \frac{\phi_2(t)g(t)}{W_{\phi_1,\phi_2}(t)}dt , \quad c_2(x) = \int_{x_o}^{x} \frac{\phi_1(t)g(t)}{W_{\phi_1,\phi_2}(t)}dt ,$$

donde $x_o \in I$ es arbitrario En definitiva,

Teorema 3.10 *Si ϕ_1, ϕ_2 son soluciones de la ED homogenea (22) cuyo Wronskiano no se anula, entonces*

$$\eta(x) = -\phi_1(x) \int_{x_o}^{x} \frac{\phi_2(t) g(t)}{W_{\phi_1,\phi_2}(t)} dt + \phi_2(x) \int_{x_o}^{x} \frac{\phi_1(t) g(t)}{W_{\phi_1,\phi_2}(t)} dt$$

es solución de la ED inhomogenea cualquiera sea $x_o \in I$.

Ejemplo 3.3: Consideramos el desplazamiento unidimensional de una partícula de masa m (> 0) sobre la que actuan una fuerza proporcional al desplazamiento, otra fuerza proporcional a la velocidad y una fuerza externa F que depende del tiempo:

$$mu'' + cu' + ku = F \ .$$

Consideramos el caso $c, k \geq 0$. El lector obervará que con las identificaciones pertinentes, la *ED* (lineal regular y inhomogenea de segundo orden) es la misma que

$$LQ'' + RQ' + C^{-1}Q = E \ ,$$

para la carga Q en un circuito eléctrico de resistencia R, impedancia L y capacidad C sujeto a un voltaje externo E. Convendrá introducir los parámetros $\omega_o = \sqrt{k/m}$ y $\gamma := c/2m$
Resolvemos primero la *ED* homogenea asociada: $mu'' + cu' + ku = 0$. Las soluciones son:

$$\phi_\pm(t) = \exp(r_\pm t) \ , \ \ r_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \ , \ \ \text{si } \gamma > \omega_o \ ;$$

$$\phi_+(t) = \exp(-\gamma t) \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} t) \ , \ \ \phi_-(t) = \exp(-\gamma t) \sin(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} t) \ , \quad \text{si } \omega_o > \gamma \ ;$$

$$\phi_+(t) = \exp(-\gamma t) \ , \ \ \phi_-(t) = t \exp(-\gamma t) \ , \quad \text{si } \gamma = \omega_o \ .$$

La primera observación importante es:

$$\text{si } c > 0 \text{ entonces } r_\pm < 0 \ \ .$$

En consecuencia, en todos los casos,

$$\lim_{t \to \infty} \phi_\pm(t) = 0 \ , \quad \text{si } c > 0.$$

Consideramos ahora el forzamiento especial $F(t) = F_o \cos(\omega t)$ con $\omega \geq 0$. Pero, en vez de formular las integrales de d'Alembert para obtener una solución η particular, argumentamos que si u es solución entonces

$$u = \eta + c_+ \phi_+ + c_- \phi_-$$

y, para tiempos grandes,

$$u \asymp \eta \ ;$$

donde la función η es una solución de la *ED* inhomogenea y $\lim_{t\to\infty}(u(t) - \eta(t)) = 0$. Esto nos induce a esperar que η sea una función oscilatoria dominada por la frecuencia del forzamiento ω; así planteamos

$$\eta(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde δ es un corrimiento de fase y A una amplitud, ambas a determinar. Tenemos

$$\eta' = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \ , \ \ \eta'' = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \ .$$

Luego, pedimos que η resuelva la *ED* y, usando los teoremas de adición para las funciones trigonométricas,

$$F_o \cos(\omega t) = -Am\omega^2 \left(\cos(\omega t)\cos(\delta) - \sin(\omega t)\sin(\delta)\right) - Ac\omega \left(\sin(\omega t)\cos(\delta) + \cos(\omega t)\sin(\delta)\right)$$

$$+Ak(\cos(\omega t)\cos(\delta) - \sin(\omega t)\sin(\delta))$$

Igualando los factores de $\cos(\omega t)$ por un lado y los de $\sin(\omega t)$ por el otro,

$$F_o = -Am\omega^2 \cos(\delta) - Ac\omega \sin(\delta) + Ak\cos(\delta) \ ,$$

$$0 = Am\omega^2 \sin(\delta) - Ac\omega \cos(\delta) - Ak\sin(\delta) \ ;$$

de aquí,

$$\sin(\delta) = \frac{-c\omega}{\sqrt{m^2(\omega_o^2-\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \ , \ \ \cos(\delta) = \frac{m(\omega_o^2-\omega^2)}{\sqrt{m^2(\omega_o^2-\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \ , \ \ A = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(\omega_o^2-\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \ .$$

Luego,

$$\eta(t) = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(\omega_o^2-\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \ \cos(\omega t + \delta) \ .$$

Esta solución particular de la *ED* es llamada **estacionaria**. A pesar de que η depende de t, la terminología que procede de la relación asintótica $u \asymp \eta$ válida para $t \to \infty$ no debe confundirnos. Conviene notar que la solución estacionaria es independiente de (eventuales) condiciones iniciales que determinan los valores de los coeficientes c_+ y c_-. Se suele llamar **transitoria** a $c_+\phi_+ + c_-\phi_-$ ya que $\lim_{t\to\infty} c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t) = 0$.

Una vez obtenida la solución general de la *ED* con $c > 0$, podemos pasar al límite $c \to 0$ si nada lo impide. En este caso el impedimento es el caso resonante $\omega_o = \omega$ en el cual hay que tener algo de cuidado. Pero, si $\omega \neq \omega_o$, tendremos a

$$\frac{F_o}{m(\omega_o^2-\omega^2)} \cos(\omega t) + a\cos(\omega_o t) + b\sin(\omega_o t) \quad (\omega \neq \omega_o)$$

como solución general de la *ED* para $c = 0$. Para el caso resonante,

$$\frac{F_o}{2m\omega_o} \ t\sin(\omega_o t) + a\cos(\omega_o t) + b\sin(\omega_o t) \quad (\omega = \omega_o)$$

es la solución general para $c = 0$.
◀

3.1.3. Función de Green para problemas inhomogeneos

El tema se volverá a tratar en el contexto de las distribuciones donde se obtiene una motivación y tratamiento más transparentes.

Consideremos una ED lineal normal de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

en algún intervalo real I. Supongamos que P no se anula en este intervalo; dividiendo por P y multiplicando por $\exp(S(x))$ donde $S'(x) = Q(x)/P(x)$ obtenemos omitiendo la variable

$$e^S y'' + e^S(Q/P)y' + e^S(R/P)y = e^S G/P \ ;$$

con $p := e^S$, tenemos $p' = pS' = p(Q/P)$ y con $q := pR/P$ y $g := pG/P$, arribamos a

$$py'' + p'y' + qy = (py')' + qy = g \ .$$

Ejemplo 3.4: De

$$x^3y'' - xy' + 2y = 0 \ ,$$

dividimos por x^3 (o sea en $(0,\infty)$ o bien en $(-\infty,0)$):

$$y'' - x^{-2}y' + 2x^{-3}y = 0 \ .$$

Multiplicando por (el factor integrante) $e^{\int -x^{-2}\,dx} = e^{1/x}$, nos da

$$e^{1/x}y'' - \frac{e^{1/x}}{x^2}y' + 2\frac{e^{1/x}}{x^3}y = 0$$

y la forma canónica

$$(e^{1/x}y')' + 2\frac{e^{1/x}}{x^3}y = 0 \ .$$

◀

Una forma canónica muy util pues el operador diferencial de segundo orden $f \mapsto (pf')'$ tiene la siguiente propiedad obtenida por integración por partes

$$\int_I g(pf')'\,dx = gpf'|_I - \int_I g'pf'\,dx = gpf'|_I - g'pf|_I + \int_I (pg')'f\,dx \ .$$

Así que cuando los dos primeros sumandos con la contribución del borde del interavlo I se anulan, se trata de un operador autoadjunto.

Consideramos el problema

$$g(x) = (pu')'(x) + q(x)u(x) \ , \quad a < x < b \ , \quad u(a) = u(b) = 0 \ . \tag{25}$$

Suponemos que p y q definidas en $[a,b]$ son continuas, que p no tiene ceros y es además diferenciable con derivada continua. Para u definida en $[a,b]$ dos veces diferenciable, el operador L está definido por

$$Lu := (pu')' + qu = pu'' + p'u' + qu \ .$$

Esto nos permite reescribir al problema como: $g = Lu$, $u(a) = u(b) = 0$. Observamos que el espacio $\mathcal{K}$ de las funciones u dos veces diferenciables con segunda derivada continua en $[a,b]$, y con $u(a) = u(b) = 0$, forman un espacio vectorial real. La imagen de $\mathcal{K}$ bajo L está contenida en las funciones continuas $\mathcal{C}$.

Lema 8 *La restricción de L a $\mathcal{K}$ es inyectiva si y sólo si hay dos soluciones y_1, y_2 de la ED $Ly = 0$ con $y_1(a) = y_2(b) = 0$ y $y_1(b) \neq 0 \neq y_2(a)$.*

Demostración: Ya que p no tiene ceros, $L \neq 0$. Observamos primeramente que si y_1 e y_2 existen entonces son no nulas y de esto se desprende que $y_1'(a) \neq 0 \neq y_2'(b)$. Para el Wronskiano W_{y_1,y_2} tendremos entonces $W_{y_1,y_2}(a) = -y_2(a)y_1'(a) \neq 0$ y $W_{y_1,y_2}(b) = y_1(b)y_2'(b) \neq 0$.
Si existen las soluciones requeridas, y $Lu = 0$ con $u \in \mathcal{K}$, entonces $u = \alpha y_1 + \beta y_2$; $0 = u(a) = \beta y_2(a)$ implica $\beta = 0$ y $0 = u(b) = \alpha y_1(b)$ implica $\alpha = 0$. Por lo tanto $u \equiv 0$ o sea que L es inyectivo.
Suponga que no existen las soluciones requeridas. Vale decir $s_1(a) = s_2(b) = 0$ para soluciones no nulas s_1 y s_2 de $Ly = 0$, implica que $s_1(b) = 0$, o bien $s_2(a) = 0$, o bien $s_1 = cs_2$. En el primer caso, $s_1 \in \mathcal{K}$; en el segundo caso $s_2 \in \mathcal{K}$; en el tercer caso $s_1 \in \mathcal{K}$. En todos los casos, L no es inyectivo en $\mathcal{K}$. ■

En consecuencia, el operador inverso A que asigna a cada $Lu \in \mathcal{C}$ la función $u \in \mathcal{K}$ está definido. Se observa que la homogenidad de la condición de contorno es crucial para el resultado. En efecto, si pedimos que $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$, con α y β no ambos nulos, no podríamos haber demostrado el lema.

Lema 9 *Si hay dos soluciones y_1, y_2 de la ED $Ly = 0$ con $y_1(a) = y_2(b) = 0$ y $y_1(b) \neq 0 \neq y_2(a)$, entonces la restricción de L a $\mathcal{K}$ es suryectiva.*

Demostración: Sean y_1 e y_2 soluciones linealmente independientes de $Ly = 0$ con $y_1(a) = 0 = y_2(b)$. Entonces, como hemos visto en la demostración del resultado anterior, $y_1(b) \neq 0 \neq y_2(a)$. Sea $g \in \mathcal{C}$, por el Teorema de existencia y unicidad hay una solución η de la *ED* $L\eta = g$, entonces

$$u := \frac{-\eta(b)}{y_1(b)} y_1 + \frac{-\eta(a)}{y_2(a)} y_2 + \eta\,,$$

satisface $Lu = g$, y $u(a) = u(b) = 0$. ■

Esto nos dice que el operador $L : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ es invertible. Su inversa $A : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ satisface

$$u = Ag\ ,$$

y nos provee por lo tanto de la solución del problema (25). De hecho, ya tenemos todos los elementos para calcular explicitamente la inversa A de L. Bastará agregar y aplicar el Teorema 3.10 a lo hecho en la demostración del segundo lema. Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la *ED* homogenea $Ly = 0$ con $y_1(a) = y_2(b) = 0$. Como vimos en la demostración del primer lema, $y_1(b) \neq 0 \neq y_2(a)$. Aplicando el Teorema 3.10,

$$\eta(x) = -y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt$$

satisface $L\eta = g$, y se tiene $\eta(a) = 0$. Entonces, por lo visto en la demostración del segundo lema

$$u(x) := \frac{-\eta(b)}{y_1(b)} y_1(x) + \frac{-\eta(a)}{y_2(a)} y_2(x) + \eta(x) = \frac{-\eta(b)}{y_1(b)} y_1(x) + \eta(x)\,,$$

satisface $Lu = g$ y $u(a) = u(b) = 0$. Pero,

$$u(x) = \eta(x) + \frac{-y_1(x)}{y_1(b)} \left(-y_1(b) \int_a^b \frac{y_2(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt + y_2(b) \int_a^b \frac{y_1(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt \right)$$

$$= \eta(x) + y_1(x) \int_a^b \frac{y_2(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt$$

$$= -y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt + y_1(x) \int_a^b \frac{y_2(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt$$

$$= y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(t)g(t)}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} dt\ ;$$

o sea

$$u = Ag\ ,\ \ (Ag)(x) := \int_a^b G(x,t)g(t)dt\ ,$$

donde

$$G(x,t) := \frac{1}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} \left\{ \begin{array}{lcl} y_2(x)y_1(t) & , & \text{si } a \leq t \leq x \\ y_1(x)y_2(t) & , & \text{si } x \leq t \leq b \end{array} \right. \ ,\ \ x,t \in [a,b]\ .$$

Esta es la función de **Green** asociada al problema (25). Aunque es costumbre escribir así a G, el factor $1/p(t)W_{y_1,y_2}(t)$ es constante. Esto se desprende del Teorema de Abel. En efecto, $W_{y_1,y_2}(t) = ce^{-P(t)}$ donde $P' = p'/p$ o sea $P = \ln|p|$ y c es constante (y no nula); por ende $pW_{y_1,y_2} = cp/|p| = \pm c$, ya que p que no tiene ceros no cambia de signo. Podemos reescribir

$$G(x,t) = \alpha \left\{ \begin{array}{lcl} y_2(x)y_1(t) & , & \text{si } a \leq t \leq x \\ y_1(x)y_2(t) & , & \text{si } x \leq t \leq b \end{array} \right. \ ,\ \ x,t \in [a,b]\ ,$$

donde $\alpha = p(b)W_{y_1,y_2}(b) = p(b)y_1(b)y_2'(b)$. Como consecuencia de esto, obtenemos la simetría de G:

$$G(x,t) = G(t,x) \ .$$

La expresión para G pareciera depender de la elección de las soluciones de la ED homogenea $Ly = 0$ con $y_1(a) = y_2(b) = 0$. Est es solo aparente. Si $\widetilde{y}_1$ que no es idénticamente nula satisface $L\widetilde{y}_1 = 0$ y además $\widetilde{y}_1(a) = 0$, entonces el Teorema 3.6 implica que $\widetilde{y}_1 = \alpha y_1$. Por lo mismo una solución $\widetilde{y}_2$ con $\widetilde{y}_2(b) = 0$ resulta linealmente dependiente de y_2: $\widetilde{y}_2 = \beta y_2$. Entonces $W_{\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2}(x) = \alpha\beta W_{y_1,y_2}(x)$ y la función G definida via $\widetilde{y}_1$ y $\widetilde{y}_2$ es idéntica a la ya construida.

$G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, y las derivadas parciales de primer y segundo orden existen cuando $x \neq t$. Se tiene

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x,t) = \frac{1}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} \begin{cases} y_2'(x)y_1(t) & , \quad \text{si } a \leq t < x \\ y_1'(x)y_2(t) & , \quad \text{si } x < t \leq b \end{cases} \ , \ \ x \neq t \ .$$

Luego,

$$\lim_{x\to t^+} \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x,t) - \lim_{x\to t^-} \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x,t) = 1/p(t) \ ,$$

y hay una discontinuidad de las derivadas parciales de primer orden en la recta $x = t$.

Para obtener un método para resolver el problema (25), habría que poner lo hecho patas para arriba dando una caracterización diferencial de la función de Green. Veremos que G es la única solución del problema:

Determine una función continua Φ sobre $[a,b] \times [a,b]$ tal que, para todo $t \in (a,b)$ se tenga:

1. $(\partial/\partial x)(p(\partial\Phi/\partial x))(x,t) + q(x)\Phi(x,t) = 0$ para $x < t$ y $\Phi(a,t) = 0$;
2. $(\partial/\partial x)(p(\partial\Phi/\partial x))(x,t) + q(x)\Phi(x,t) = 0$ para $x > t$ y $\Phi(b,t) = 0$;
3. $\lim_{x\to t^+}(\partial\Phi/\partial x))(x,t) - \lim_{x\to t^-}(\partial\Phi/\partial x))(x,t) = 1/p(t)$.

De 3. inferimos que Φ no es idénticamente nula.
Considere 1. Sea y_1 una solución no nula arbitraria de $Ly = 0$ en $[a,b]$ con $y_1(a) = 0$. Entonces, con $\Phi(x,t) := A(t)y_1(x)$ tenemos $L\Phi(\cdot,t) = 0$, y $\Phi(a,t) = 0$; vale decir Φ es solución de 1. Reciprocamente, si Φ está definida para $x < t$, y es solución no nula de 1., entonces por el Teorema 3.6, $\Phi(x,t)$ depende linealmente de y_1 para cada $t \in [a,b]$; o sea: $\Phi(x,t) = A(t)y_1(x)$ Luego, hemos demostrado que la solución de 1. es:

$$\Phi(x,t) = A(t)y_1(x) \ , \ \ x < t \ ,$$

donde y_1 es solución arbitraria no nula de la *ED* homogenea $Ly = 0$ en $[a,b]$ con $y_1(a) = 0$.
Procediendo del mismo modo con 2., obtenemos

$$\Phi(x,t) = B(t)y_2(x) \ , \ \ x > t \ ,$$

donde y_2 es solución arbitraria no nula de la *ED* homogenea $Ly = 0$ en $[a,b]$ con $y_2(b) = 0$.
Para cubrir el requerimiento de continuidad de Φ, debemos tener que tanto A como B sean continuas donde están definidas. Además la continuidad en (x,x) implica que

$$B(x)y_2(x) = A(x)y_1(x) \ , \ \ x \in [a,b] \ .$$

Esto lo satisfacemos con

$$A(x) = \gamma(x)y_2(x) \ , \ \ B(x) = \gamma(x)y_1(x) \ .$$

Tenemos entonces

$$\Phi(x,t) = \gamma(t) \begin{cases} y_2(t)y_1(x) & , \quad x < t \\ y_1(t)y_2(x) & , \quad x > t \end{cases} ;$$

y

$$(\partial\Phi/\partial x)(x,t) = \gamma(t) \begin{cases} y_2(t)y_1'(x) & , \quad x < t \\ y_1(t)y_2'(x) & , \quad x > t \end{cases} ;$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to t^+} (\partial\Phi/\partial x)(x,t) - \lim_{x\to t^-} (\partial\Phi/\partial x)(x,t)$$
$$= \gamma(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)) = \gamma(t)W_{y_1,y_2}(t)$$

con lo cual (3) impone

$$\gamma(t) = \frac{1}{p(t)W_{y_1,y_2}(t)} .$$

Esto determina a Φ y es inmediato que $\Phi \equiv G$.

El problema diferencial que caracteriza a G puede, en el ámbito de las distribuciones escribirse como:

$$(LG)(x,t) = \delta(x-t) \ , \ \ G(a,t) = G(b,t) = 0 \ ,$$

obtenido de (25) reemplazando a la inhomogenidad g por la delta de Dirac centrada en t.

Si uno quiere aplicar el método de la función de Green a un problema con condiciones de contorno no homogeneas como

$$(pv')' + qv = g \ , \ \ v(a) = \alpha \ , \ \ v(b) = \beta \ ,$$

entonces introduciendo una función 2 veces diferenciable h tal que $h(a) = \alpha$ y $h(b) = \beta$, y poniendo $u = v - h$, tendrase

$$(pu')' + qu = g - (ph')' - qh \ , \ \ u(a) = u(b) = 0 \ ,$$

a lo que se le puede aplicar el método. Una función h que siempre cumple con las condiciones es la recta

$$h(x) = \frac{v(b) - v(a)}{b - a}(x - a) + v(a) .$$

Ejemplo 3.6: En el intervalo $[0, \ell]$, consideramos

$$u'' + k^2 u = f \ , \ \ u(0) = u(\ell) = 0 \ ,$$

donde $k > 0$. $s(t) := \sin(kt)$ y $c(t) := \cos(kt)$ son soluciones de la *ED* homogenea y son linealmente independientes ya que $W_{s,c}(t) = -k$. Claramente, $y_1 = s$ satisface $y_1(0) = 0$. Buscamos una solución y_2 de la ec. homogenea con $y_2(\ell) = 0$. Debemos tener $y_2(t) = as(t) + bc(t)$ con $a\sin(k\ell) + b\cos(k\ell) = 0$. Si $k\ell = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$, $b = 0$ y y_2 no será linealmente independiente de y_1. En caso que $k\ell \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$y_2(t) = \cos(k\ell)s(t) - \sin(k\ell)c(t) = \sin(k(t - \ell))$$

es solución de la ec. homogenea, satisface $y_2(\ell) = 0$ y es linealmente independiente de y_1 pues $W_{y_1,y_2} = k\sin(k\ell)$. Es inmediato calcular que cuando $k \neq n\pi/\ell$, se tiene

$$G(x,t) = \frac{\cos(k(\ell - |x-t|)) - \cos(k(x + t - \ell))}{2k\sin(k\ell)} .$$

La solución es entonces

$$u(x) = \frac{1}{2k\sin(k\ell)} \int_0^\ell [\cos(k(\ell - |x-t|)) - \cos(k(x+t-\ell))]f(t)\, dt .$$

¿Que sucede cuando $k\ell = n\pi$ para algún $n \in \mathbb{N}$ donde no encontramos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 con $y_1(0) = y_2(\ell) = 0$? En tal caso $s(0) = s(\ell) = 0$ y el operador $Lu := u'' + k^2 u$ definido para u con $u(0) = u(\ell) = 0$, no es invertible puesto que $s \in ker(L)$. La solución de la ED inhomogenea con condición de borde homogenea no es única; si u es solución entonces $u+\alpha s$ también lo es. ◀

3.1.4. Problemas de autovalores

Consideramos el operador diferencial L dado por $Lu = (pu')' + qu$ en el intervalo (a, b). Sabemos que esta es la forma general de un operador diferencial lineal de segundo orden normal con condiciones de continuidad sobre los coeficientes. Las funciones p y q se suponen continuas en $[a, b]$, p es además diferenciable en (a, b) y no tiene ceros allí. Buscamos funciones u definidas y dos veces diferenciables en este intervalo que satisfagan:

$$(Lu)(x) = \lambda\rho(x)u(x) \ ,$$

donde ρ es una función real dada que cumple $\rho(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ y λ es algún número real. Además, se deben cumplir las condiciones de contorno

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \ , \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \ , \tag{26}$$

donde α_1, α_2 no son ambas nulas y lo mismo se pide a β_1, β_2. Esto se puede escribir como $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \neq \beta_1^2 + \beta_2^2$. Este problema constituye un **problema de Sturm-Liouville**.

En general no habrá solución para todo λ; y aquellos λ donde hay solución se denominan **autovalores** del problema. Las correspondientes soluciones u se denominan **autofunciones**. Es inmediato que el conjunto de las autofunciones a un dado autovalor es un espacio vectorial ya que L es un operador lineal y la condición de contorno (26) es lineal en los valores de la función en los extremos. Este subespacio se denomina **autoespacio** asociado al autovalor y su dimensión se denomina **multiplicidad geométrica** del autovalor.

Veamos que si imponemos las condiciones de contorno (26) entonces L es auto-adjunto respecto del producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\, dx \ .$$

En efecto, integrando dos veces por partes

$$\langle f, Lg\rangle = \int_a^b f(x)[(pg')'(x)+q(x)g(x)]\, dx = \langle qf, g\rangle+[f(b)p(b)g'(b)-f(a)p(a)g'(a)]-\int_a^b f'(x)p(x)g'(x)\, dx$$

$$= \langle qf, g\rangle + [f(b)p(b)g'(b) - f(a)p(a)g'(a)] - [f'(b)p(b)g(b) - f'(a)p(a)g(a)] + \int_a^b (pf')'(x)g(x)\, dx$$

$$= \langle Lf, g\rangle + p(b)[f(b)g'(b) - f'(b)g(b)] + p(a)[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)] \ ;$$

Verificamos ahora que los dos sumandos provenientes del borde se anulan cuando tanto f como g satisfacen (26). Si $\beta_1 \neq 0 \neq \beta_2$, entonces $f'(b) = -\beta_1 f(b)/\beta_2$, $g'(b) = -\beta_1 g(b)/\beta_2$, con lo cual:

$$g(b)f'(b) - f(b)g'(b)) = g(b)(-\beta_1/\beta_2)f(b) - f(b)(-\beta_1/\beta_2)g(b) = 0 \ .$$

Si $\beta_1 = 0$ pero $\beta_2 \neq 0$, la segunda condición de (26) es $f'(b) = g'(b) = 0$ y nuevamente

$$g(b)f'(b) - f(b)g'(b)) = 0 \ ;$$

similarmente, si $\beta_1 \neq 0$ pero $\beta_2 = 0$, la segunda condición de contorno es $f(b) = g(b) = 0$ y también

$$f(b)g'(b) - g(b)f'(b)) = 0 \ .$$

Procediendo de manera enteramente análoga con la primera de las condiciones de contorno (i.e., α_1, α_2), completamos la verificación.

Pasamos a analizar autovalores y sus correspondientes autofunciones. Supongamos que tenemos dos autofunciones u_λ y u_μ a autovalores λ y μ distintos. Entonces

$$(\lambda-\mu)\rho(x)u_\lambda(x)u_\mu(x) = u_\mu(x)(Lu_\lambda)(x) - u_\lambda(x)(Lu_\mu)(x) \;;$$

Integrando sobre $[a,b]$ obtenemos

$$(\lambda-\mu)\int_a^b \rho(x)u_\lambda(x)u_\mu(x)\;dx = \langle u_\mu, Lu_\lambda\rangle - \langle u_\lambda, Lu_\mu\rangle = 0\;.$$

Como $\lambda \neq \mu$ obtenemos

$$\int_a^b \rho(x)u_\lambda(x)u_\mu(x)\,dx = 0\;.$$

Ya que $\rho(x) > 0$ para $x \in (a,b)$,

$$\langle u, v\rangle_\rho = \int_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx$$

define un producto escalar para funciones continuas sobre $[a,b]$. Pues $\int_a^b \rho(x)f(x)^2\;dx \geq 0$ y hay igualdad si y solo si $f \equiv 0$ ya que ρ es estrictamente positiva. Obtenemos entonces la relación de ortogonalidad de las autofunciones a autovalores distintos

$$\langle u_\lambda, u_\mu\rangle_\rho = 0\;.$$

Veamos también que dos autofunciones al mismo autovalor son necesariamente linealmente dependientes. Recordamos que el espacio vectorial de las soluciones de $(py')' + (q-\lambda\rho)y = 0$ tiene dimensión 2. Si hubiere autofunciones y_1 y y_2 linealmente independientes al mismo autovalor λ entonces toda solución del problema $(py')' + (q-\lambda\rho)y = 0$ sería de la forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$, y cumpliría las condiciones de contorno (26). Pero el problema de Cauchy para esta ED homogenea siempre admite solución incluso cuando no se cumple (26).
Por lo tanto, todos los autoespacios son unidimensionales y la multiplicidad geométrica de todo autovalor es 1. En tal caso se dice que el autovalor es **simple**.

También se puede demostrar que los autovalores forman una sucesión infinita $\{\lambda_n\;:\;\; n \in \mathbb{N}\}$ que enumerada de menor a mayor $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, cuando $p(x) > 0$, tiene dos propiedades notables:

1. λ_o es finito y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$;
2. la autofunción asociada a λ_n que está determinada univocamente salvo multiplicación por una constante no nula tiene exactamente n ceros en (a,b);

y que las respectivas autofunciones $\{u_n\;:\;\; n \in \mathbb{N}\}$ si son adecuadamente renormalizadas de manera que $\langle u_n, u_n\rangle_\rho = 1$ tienen la propiedad de que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, f\rangle_\rho u_n(x)\;,$$

donde la convergencia es uniforme para cualquier función f dos veces diferenciable en (a,b).

La demostración de estas propiedades importantes se puede dar aplicando la técnica de la funcíon de Green para transformar el problema diferencial de Sturm-Liouville en una ecuación integral. En efecto si $G(\cdot,\cdot)$ es la función de Green asociada al operador L que satisface las condiciones de contorno, entonces el problema de Sturm-Liouville es equivalente a

$$u(x) = \lambda\int_a^b G(x,t)\rho(t)u(t)dt\;.$$

Ejemplo 3.7: Algunos ejemplos importantes:

- La ED de Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \ , \quad x > 0$$

puede escribirse en forma de problema de Sturm-Liouville

$$(xy')' + (\lambda^2x - \nu^2/x)y = 0.$$

- La ED de Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0 \ , \quad -1 \le x \le 1$$

es equivalente al problema de Strum-Liouville

$$[(1-x^2)y']' + \nu(\nu+1)y = 0 \ , \quad -1 \le x \le 1 \ .$$

◀

3.1.5. Soluciones en series

Recordemos que una función f a valores reales definida en un entorno de $x_o \in \mathbb{R}$ se dice **analítica** en x_o, si admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_o)^n$$

alrededor de x_o con un radio de convergencia no nulo.
Consideremos una *ED* lineal en forma normal

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_o(x)y \ .$$

Si es cierto que en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, todas las funciones a_k, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, son analíticas entonces no sorprende a nadie que las soluciones también son analíticas en ese intervalo. Para demostrar esto basta usar el hecho de que dos series de potencias convergentes en el mismo intervalo pueden sumarse y multiplicarse (producto de Cauchy), y que el desarrollo en una serie de potencias es único (si existe). Se propone entonces una serie de potencias

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$$

para la solución y suponiendo que esta serie es convergente, se determinan los coeficientes a partir de la *ED* Se verifica a posteriori que la serie así determinada es convergente.

Teorema 3.11 *Si en la ED lineal homogenea de orden n*

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}(x)y^{(n-j)} = 0 \ ,$$

las funciones $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ son analíticas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$; y si $x_o \in I$ y los desarrollos en serie de potencias de $(x - x_o)$ de estas funciones son convergentes en $\{x \in I : |x - x_o| < R\}$ para algún $R > 0$, entonces toda solución de la ED es analítica en x_o y su desarrollo en serie de potencias de $(x - x_o)$ es convergente en $\{x \in I : |x - x_o| < R\}$.

Retornando a las *ED* lineales homogeneas de segundo orden,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_o(x)y = 0 \ , \quad x \in I \ ,$$

hemos estado estudiando el caso en el cual a_2 no tiene ceros en I. Si x_o es un cero de a_2 entonces es de esperar que el comportamiento cualitativo de las soluciones en x_o y sus inmediaciones sea distinto al de los casos que hemos ya estudiado. Decimos que x_o es un punto **singular** de la *ED*. Suponemos que a_o, a_1 y a_2 son analíticas en x_o y que $a_2(x_o) = 0$. En tal caso, sabemos que $a_2(x) = (x - x_o)^m \alpha(x)$ en un entorno de x_o donde α es analítica en x_o pero no se anula allí . Podemos dividir por α para obtener

$$(x - x_o)^m y'' + a_1(x)y' + a_o(x)y = 0 \ ,$$

donde a_1 y a_o son funciones analíticas en x_o. Veremos que el comportamiento cualitativo de la solución depende crucialmente del orden m del cero (punto singular) de a_2.

Ejemplo 3.8: Considere $x^3y'' + y = 0$, donde $x = 0$ es un punto singular. Supongamos que una solución y de esta ec. admite un desarrollo

$$y(x) = x^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \ ,$$

que es convergente en un entorno de 0 pero no necesariamente en $x = 0$ ($\nu < 0$). Entonces

$$x^3y'' + y = x^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+1} + a_n x^n\right) \ ;$$

si igualamos esto a 0 obtenemos

$$a_0 = 0 \ , \quad a_n + (n+\nu-1)(n+\nu-2)a_{n-1} = 0 \ , \ \ n \geq 1 \ .$$

Pero entonces para $n \geq 1$,

$$a_n = -(n+\nu-1)(n+\nu-2)a_{n-1}$$

y ya que $a_0 = 0$, deducimos que independientemente del valor de ν, tendremos $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, cualquier solución no nula de la *ED* no admite un desarrollo como el planteado. ◀

Ejemplo 3.9: Ecuación de Euler: $x^2y'' + axy' + by = 0$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Aquí, $x = 0$ es un punto singular de la *ED*. Se observa que cualquiera sean las dimensiones de y y x, si a, b son adimensionales, entonces cada sumando tiene la misma dimensión. Esto sugiere intentar una solución de la forma

$$y(x) = x^\nu \ ,$$

para, por ejemplo $x > 0$. En tal caso, obtenemos

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = \nu(\nu-1)x^\nu + a\nu x^\nu + bx^\nu \ ,$$

y esto se anula si y sólo si

$$\nu(\nu-1) + a\nu + b = 0 \ .$$

Las soluciones de esta ec. cuadrática para ν son

$$\nu_\pm = \frac{1-a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-1)^2 - 4b} \ .$$

Distinguimos los tres casos dados por el signo de la discriminante.

- $(1-a)^2 > 4b$. $\nu_+ > \nu_-$ ambos reales y

  $$y_1(x) = x^{\nu_+} \ , \ \ y_2(x) = x^{\nu_-} \ , \ \ x > 0 \ ,$$

  son soluciones linealmente independientes en $(0, \infty)$. Es inmediato ver que

  $$y_1(x) = |x|^{\nu_+} \ , \ \ y_2(x) = |x|^{\nu_-} \ , \ \ x \neq 0 \ ,$$

  son soluciones en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; estas pueden extenderse a soluciones en $\mathbb{R}$ si las potencias $\nu_\pm$ lo permiten.

- $(1-a)^2 < 4b$. En este caso $\nu_\pm$ tienen parte imaginaria no nula y son complejos conjugados entre si.

$$y_1(x) = x^{(1-a)/2}\cos(\sqrt{4b-(1-a)^2}\ln(x))\ ,\ \ y_2(x) = x^{(1-a)/2}\sin(\sqrt{4b-(1-a)^2}\ln(x))\ ,$$

  son soluciones linealmente independientes en $(0,\infty)$. Reemplazando aquí a x por $-x$ se obtienen soluciones para $(-\infty,0)$.

- $|1-a| = 2|b|$. Entonces $\nu_+ = \nu_-$ y

$$y_1(x) = |x|^{(1-a)/2}\ ,\ \ x \neq 0\ ,$$

  es solución. Otra solución se obtiene aplicando el método de d'Alembert que produce

$$y_2(x) = |x|^{(1-a)/2}\ln(|x|)\ .$$

Lo hecho puede repetirse para la ec. de Euler general: $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_o y = 0$, $a_o, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. ◀

El punto x_o es un punto **singular regular** de una *ED* lineal de segundo orden si esta ec. puede escribirse como

$$(x-x_o)^2 y'' + (x-x_o)q(x)y' + r(x)y = 0\ , \tag{27}$$

donde tanto q como r son analíticas en x_o. En el primer ejemplo $x=0$ es un punto singular pero no regular; en la *ED* de Euler, $x=0$ es un punto singular regular y vimos explicitamente que singularidades en $x=0$ tienen las soluciones. Todas ellas pueden desarrollarse en series de potencias si permitimos potencias negativas.

Ejemplo 3.10: El punto $x=1$ es singular para la ED $\ln(x)y'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$. Reescribiendo

$$(x-1)^2 y'' + \frac{(x-1)^2}{2\ln(x)}\,y' + \frac{(x-1)^2}{\ln(x)}\,y = 0\ ,$$

tenemos $q(x) = (x-1)/(2\ln(x))$ y, con la regla de l'Hôspital, $\lim_{x\to 1} q(x) = 1/2$. También, $r(x) = (x-1)^2/\ln(x)$ con $\lim_{x\to 1} r(x) = 0$ por la misma regla. El punto $x=1$ es entonces singular regular. ◀

Veamos como se construyen las soluciones en el caso de un punto singular regular (27). Primeramente, haciendo el cambio de variables $x \to x - x_o$, podemos suponer que el punto singular regular es $x_o = 0$; o sea

$$x^2 y'' + xq(x)y' + r(x)y = 0\ .$$

Tenemos

$$q(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n x^n\ ,\ \ r(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n x^n$$

en un intervalo I que contiene a 0. Hacemos el Ansatz

$$y(x) = x^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n\ ,$$

donde debemos determinar la potencia $\nu \in \mathbb{R}$ y los coeficientes $a_n \in \mathbb{R}$ de tal modo que la serie converja para x en algún subintervalo J de I. Si $\nu < 0$ el Ansatz no tiene sentido (no está definido) en $x=0$. Por ello nos restringimos a priori a $x > 0$. Una vez elaborada la solución veremos si esta se puede extender a

$x < 0$ o incluso a $\mathbb{R}$. Es útil observar que podemos suponer a priori que $a_o \neq 0$; pues, si p es el índice del primer coeficiente a_n distinto de cero, entonces

$$y(x) = x^\nu \sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n = x^{\nu+p} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{p+n} x^n$$

y rebautizando los coeficientes $a_n = a_{n+p}$ tenemos $a_o \neq 0$.

Suponiendo la convergencia de la serie planteada en el Ansatz, lo que nos permite derivar término a término, sumar y multiplicar las series involucradas, obtenemos la condición

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^n + q(x)\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(n+\nu)x^n + r(x)\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(k+\nu)q_{n-k}\right)x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k r_{n-k}\right)x^n \ .$$

O sea,

$$(n+\nu)(n+\nu-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}((k+\nu)q_{n-k} + r_{n-k})a_k = 0 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{28}$$

Para $n = 0$ obtenemos

$$(\nu(\nu-1) + \nu q_0 + r_0)\, a_0 = 0 \ .$$

Ya que $q(0) = q_0$ y $r(0) = r_0$ podemos reescribir esto como $I(\nu)a_0 = 0$, donde

$$I(z) := z(z-1) + zq(0) + r(0) \ , \quad z \in \mathbb{C} \ .$$

Ya que $a_o \neq 0$ obtenemos la condición

$$I(\nu) = 0 \ ,$$

llamada **ecuación indicial**, entonces obtenemos uno o dos valores de ν que llamamos ν_1 y ν_2 enumerando de manera que $Re(\nu_1) \geq Re(\nu_2)$. Tomamos la solución ν_1 de la ec. indicial y, de (28), obtenemos para $n = 1$,

$$0 = (1+\nu_1)\nu_1 a_1 + [(1+\nu_1)q_0 + r_0]a_1 + [\nu_1 q_1 + r_1]a_0 = I(1+\nu_1)a_1 + (\nu_1 q_1 + r_1)a_0 \ .$$

Claramente $1 + \nu_1 \neq \nu_1$ y, por la numeración convenida, $1 + \nu_1 \neq \nu_2$ ya que si $1 + \nu_1 = \nu_2$ entonces $Re(\nu_2) = 1 + Re(\nu_1) \geq 1 + Re(\nu_2) > Re(\nu_2)$, podemos afirmar que $I(1+\nu_1) \neq 0$ y entonces

$$a_1 = -\frac{\nu_1 q_1 + r_1}{I(1+\nu_1)} a_o$$

garantiza (28) para $n = 1$. Conviene reescribir (28) como

$$I(n+\nu)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}((k+\nu)q_{n-k} + r_{n-k})a_k = 0 \ , \quad 1 \leq n \in \mathbb{N} \ . \tag{29}$$

Un argumento idéntico al desarrollado recién para $n = 1$, muestra que $I(n + \nu_1) \neq 0$; por lo tanto el coeficiente a_n depende de todos los anteriores, o sea recursivamente de a_o

$$a_n = \frac{-1}{I(n+\nu_1)} \sum_{k=0}^{n-1}((k+\nu)q_{n-k} + r_{n-k})a_k \ .$$

Con esto hemos verificado que el Ansatz original con $\nu = \nu_1$

$$y_1(x) = x^{\nu_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

es una solución de la *ED* para $x \in (0, R)$ si la serie es convergente en $(0, R)$ para algún $R > 0$. En tal caso, la serie es automaticamente convergente en $(-R, R)$ y es inmediato verificar que

$$y_1(x) = |x|^{\nu_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \ , \quad 0 < |x| < R$$

es solución. El problema es entonces demostrar que la serie es convergente en algún intervalo que contiene a 0. Usando la convergencia de los desarrollos en series de potencias de q y r en sendos intervalos J_q y J_r simétricos alrededor de 0, es posible deducir[8] de la relación de recurrencia que la serie converge en el menor de los intervalos J_q, J_r. Por lo tanto, y_1 es efectivamente solución de la *ED* en el menor de estos intervalos.

Podemos ahora repetir lo hecho con la solución ν_1 de la ec. indicial para la solución ν_2. Si $\nu_2 = \nu_1$ entonces no obtenemos nada nuevo sino la misma solución y_1 ya construida. Suponemos entonces que $\nu_1 \neq \nu_2$. En tal caso la condición (29) para $n = 0$ se cumple pues $I(\nu_2) = 0$. Poniendo $n = 1$ en (29) obtenemos

$$I(1 + \nu_2)a_1 + (\nu_2 q_1 + r_1)a_0 = 0 \ .$$

Pero ahora no podemos descartar que $I(1 + \nu_2) = 0$ ya que es posible que $1 + \nu_2 = \nu_1$. En tal caso, si $\nu_2 q_1 + r_1 \neq 0$ debemos poner $a_0 = 0$ contradiciendo nuestra hipótesis original $a_o \neq 0$. En general, si $n + \nu_2 = \nu_1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces la condición (29) para ese n no determina necesariamente a a_n en términos de los a_k con $k < n$.
Suponemos entonces que $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$ (volveremos más adelante a analizar cuando se cumple esta condición). Entonces no hay obstrucción alguna pues $I(n + \nu_2) \neq 0$ ya que $n + \nu_2 \neq \nu_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, nuevamente hay una fórmula recursiva para los coeficientes a_n en términos de a_0. Obtenemos así la solución

$$y_2(x) = |x|^{\nu_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n \ ,$$

donde los b_n se determinan recursivamente a partir de b_0 via (29). Nuevamente se puede demostrar que la serie converge en el menor de los dos intervalos de convergencia de las series para q y r. Está también bastante claro que y_2 y y_1 son linealmente independientes.
Nos quedan los casos excluidos: $\nu_2 + n = \nu_1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Considere la discriminante

$$D := (q(0) - 1)^2 - 4r(o)$$

de la función cuadrática I. Si $D < 0$ entonces $\nu_2 = \overline{\nu_1}$ con parte imaginaria no nula y $\nu_1 - \nu_2$ es un número imaginario no nulo. Si $D \geq 0$ entonces las raices ν_1 y ν_2 son reales y $\nu_1 - \nu_2 = \sqrt{D}$. Por lo tanto $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$ es equivalente a que $D = k^2$ para algún $k \in \mathbb{N}$. ¿Que hacer en este caso para encontrar otra solución? La ecuación diferencial de Euler tratada como Ejemplo 3.7 sirve de guía. Se obtiene entonces el siguiente resultado

Teorema 3.12 *La ED lineal (27) donde x_o es un punto singular regular y tanto q como r son analíticas en x_o admite dos soluciones y_1 y y_2 linealmente independientes en $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < R\}$ donde R es el menor de los radios de convergencia de los desarrollos de q y de r en series de potencias de $(x - x_o)$. Estas soluciones están dadas de acuerdo a las raices ν_1, ν_2 de la ecuación indicial*

$$\nu(\nu - 1) + \nu q(x_o) + r(x_o) = 0$$

enumeradas de modo que $Re(\nu_1) \geq Re(\nu_2)$ y siendo $D := (q(x_o) - 1)^2 - 4r(x_o)$, como sigue:

[8] E. Coddington: *Introduction to Ordinary Differential Equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

- *Si $D > 0$ y $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$, lo que sucede si y sólo si D no es el cuadrado de un número natural,*

$$y_1(x) = |x - x_o|^{\nu_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x - x_o)^n \ , \ \ y_2(x) = |x - x_o|^{\nu_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (x - x_o)^n \ ,$$

  donde los coeficientes a_n y b_n se determinan recursivamente a partir de $a_0 \neq 0 \neq b_0$ a partir de (29) con el valor de ν que corresponda: ν_1 para a_n y ν_2 para b_n.

- *Si $D < 0$, $\xi := (1 - q(x_o))/2$, $\eta := \sqrt{-D}\,/2$*

$$y_1(x) = |x - x_o|^{\xi} \cos(\eta \ln(|x - x_o|)) \sum_{n \in \mathbb{N}} Re(a_n) x^n \ , \ \ y_2(x) = |x - x_o|^{\xi} \sin(\eta \ln(|x - x_o|)) \sum_{n \in \mathbb{N}} Im(a_n) x^n \ ,$$

  donde los coeficientes $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ se determinan recursivamente a partir de $a_o \neq 0$ con (29) para $\nu = \nu_1$ (o[9] $\nu = \nu_2$).

- *Si $\nu_1 = \nu_2 + k$ con $k \in \mathbb{N}$,*

$$y_1(x) = |x - x_o|^{\nu_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x - x_o)^n \ ,$$

$$y_2(x) = |x - x_o|^{\nu_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (x - x_o)^n + \gamma y_1(x) \ln(|x|) \ ,$$

  donde los coeficientes a_n se determinan recursivamente de $a_0 \neq 0$ a partir (29) con $\nu = \nu_1$, y la constante γ y los coeficientes b_n se determinan a partir de $b_0 \neq 0$ via

$$I(n + \nu_2) b_n = - \sum_{j=0}^{n-1} ((j + \nu_2) q_{n-j} + r_{n-j}) b_j \ , \ \ 1 \leq n < k \ ;$$

$$I(n+\nu_2) b_n + \sum_{j=0}^{n-1} ((j+\nu_2) q_{n-j} + r_{n-j}) b_j + \gamma 2(n+\nu_2-1/2) a_{n-k} + \gamma \sum_{j=0}^{n-k} q_{n-k-j} a_j = 0 \ , \ \ \text{máx}\{k, 1\} \leq n \ .$$

En los tres casos las series infinitas son convergentes en $(-R, R)$.

Ejemplo 3.11: Consideramos $xy'' + (2 - x)y' - 2y = 0$, para $x > 0$. $x = 0$ es un punto regular singular ya que $x^2 y'' + x(2 - x)y' - 2xy = 0$ o sea que $q(x) = 2 - x$ y $r(x) = -2x$ ambas manifiestamente analíticas. La ec. indicial correspondiente es

$$0 = I(\nu) = \nu(\nu - 1) + q(0)\nu + r(0) = \nu(\nu - 1) + 2\nu = \nu(\nu + 1) \ ,$$

cuyas raices son $\nu_1 = 0$ y $\nu_2 = -1$. Consideramos la solución asociada a la raíz de parte real mayor, i.e., $\nu_1 = 0$. Con (29), $q_0 = 2$, $q_1 = -1$, $r_0 = 0$, $r_1 = -2$ y $q_k = r_k = 0$ para $k \geq 2$, tendremos

$$I(n) a_n - (n + 1) a_{n-1} = 0 \implies a_n = a_{n-1}/n \implies a_n = a_0/n! \ .$$

En otras palabras, y eligiendo $a_o = 1$, $y_1(x) = e^x$
Ya que $\nu_1 = \nu_2 + 1$, estamos en el tercer caso del teorema y la otra solución es de la forma

$$y_2(x) = \gamma y_1(x) \ln(x) + x^{-1} \sum_{n \geq 0} b_n x^n \ .$$

Las constante γ y los coeficientes b_n se determinan a partir de

$$I(n - 1) b_n + \sum_{j=0}^{n-1} ((j - 1) q_{n-j} + r_{n-j}) b_j + \gamma 2(n - 3/2) a_{n-1} + \gamma \sum_{j=0}^{n-1} q_{n-1-j} a_j = 0 \ , \ \ 1 \leq n \ .$$

[9] Observe que tomando el complejo conjugado de (29) obtenemos la misma relación con ν y los a_n reemplazados por sus complejos conjugados.

Así,

$$0 = (-q_1 + r_1)b_o - \gamma + \gamma q_0 = -b_o + \gamma \; ;$$

Eligiendo $b_o = 1$, tenemos $\gamma = 1$. Continuando, obtenemos

$$b_2 = b_1 + 1 \; , \quad etc.$$

◀

3.1.6. Primeros pasos en la teoría de la *ED* de Bessel

La *ED* de Bessel es

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \zeta^2)y = 0$$

que es de segundo orden, que depende de un parámetro real $\zeta \geq 0$ y para la cual $x = 0$ es un punto singular regular. La ec. indicial correspondiente es:

$$I(\nu) := \nu(\nu - 1) + \nu - \zeta^2 = \nu^2 - \zeta^2 = 0 \; ,$$

con raices ζ y $-\zeta$. El teorema indica que esta *ED* admite una solución en $\mathbb{R}$ con

$$y_1(x) = x^\zeta \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \; ;$$

esta solución es finita para $x \downarrow 0$. Con (29), tenemos $I(1 + \zeta)a_1 = 0$ con lo cual $a_1 = 0$ y

$$I(n + \zeta)a_n + a_{n-2} = 0 \; , \quad n \geq 2 \; .$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2\zeta + n)} \; , \quad n \geq 2 \; ,$$

y

$$a_{2n+1} = 0 \; , \quad a_{2n} = -\frac{a_{2(n-1)}}{4n(\zeta + n)} \; , \quad n \geq 1 \; .$$

Determinando a_{2n} recursivamente a partir de a_o, obtenemos

$$y_1(x) = a_o \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (\zeta + 1)(\zeta + 2) \cdots (\zeta + k)} \, x^{2k+\zeta} \; .$$

Prosiguiendo la teoría de la ecuación de Bessel es conveniente y convencional tomar

$$a_0 = \frac{1}{2^\zeta \Gamma(\zeta + 1)} \; ,$$

donde la función Gamma, Γ, esta definida por la integral impropia

(30) $$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \; ,$$

que es finita para $s > 0$ y satisface las relaciones

$$\Gamma(1) = 1 \; , \quad \Gamma(s + 1) = s\Gamma(s) \; , \quad s > 0 \; .$$

De esto se deduce que $\Gamma(n + 1) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$. La segunda relación permite extender a la función Gamma a valores negativos no enteros ($s < 0$; $s \notin \mathbb{Z}$) donde la integral (30) no existe debido a la singularidad en $t = 0$. En efecto,

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s + 1)}{s} \; , \quad -1 < s < 0 \; ,$$

está perfectamente definido pues $s+1 \in (0,1)$. Repitiendo este procedimineto, viz.

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1}\ , \quad -2 < s < -1\ ,$$

etc., se obtiene la función Gamma para cualquier valor de s salvo para los enteros no positivos $(0, -1, -2, -3, \cdots)$.

Con esta elección del coeficiente libre a_0, obtenemos la llamada **función de Bessel de orden ζ de primera especie**

$$J_\zeta(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\zeta+j+1)} (x/2)^{2j+\zeta}\ . \tag{31}$$

Notese que si $\zeta \in \mathbb{N}$, se tendrá $\Gamma(\zeta+j+1) = (\zeta+j)!$.

Si 2ζ no es un entero positivo, entonces el primer caso del teorema general produce la solución $J_{-\zeta}$ que es linealmente independiente de J_ζ.

$$J_{-\zeta}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(-\zeta+j+1)} (x/2)^{2j-\zeta}\ , \tag{32}$$

diverge como $x^{-\zeta}$ cuando $x \downarrow 0$. Analizando las series dadas por (31) y (32), lo que importa para su convergencia es que $\Gamma(\pm\zeta+j+1)$ este definida para todo $j \in \mathbb{N}$; y para esto basta que $\pm\zeta+j+1$ no sea un entero no positivo. Es inmediato que $\zeta = m+1/2$ cumple con esta condición cualquiera sea $m \in \mathbb{Z}$. Podemos entonces resumir diciendo que (31) y (32) son soluciones linealmente independientes de la ED de Bessel si $\zeta \notin \mathbb{N}$.

Consideramos ahora el caso $\zeta = 0$ donde nos falta una segunda solución linealmente independiente de J_0. Procediendo como en el segundo caso del teorema general se obtiene la solución

$$K_0(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(j!)^2} H_j (x/2)^{2j}\ ,$$

donde H_j es la suma de los primeros j terminos de la serie armónica:

$$H_k := \sum_{j=1}^{k} j^{-1}\ .$$

Por supuesto podemos ahora tomar combinaciones lineales arbitrarias de J_0 y K_0; una particularmente conveniente es la llamada **función de Bessel de orden cero de segunda especie** dada por

$$Y_0(x) = \frac{-2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} H_j (x/2)^{2j} + \frac{2}{\pi} J_0(x)\left(\ln(x/2)+\gamma\right)\ , \tag{33}$$

donde γ es la llamada constante de Euler[10].

Cuando $0 \neq \zeta \in \mathbb{N}$ siguiendo el procedimiento del segundo caso del teorema general y por convención se obtiene la segunda solución de la *ED* de Bessel; la llamada **función de Bessel de orden n de segunda especie**:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln(x/2)+\gamma\right) - \frac{H_n}{\pi n!}(x/2)^n - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{j!}(x/2)^{2j-n}$$

[10] $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$.

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(H_j+H_{j+n})}{j!(n+j)!}(x/2)^{2j+n} \ .$$

La teoría de las funciones de Bessel ha sido desarrollada en muchísimo detalle dada la importancia de estas funciones. Entre las muchas propiedades citamos solamente la siguientes que serán utilizadas en la discusión de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, más precisamente en el desarrollo de funciones dadas en términos de funciones de Bessel.

Teorema 3.13 *La función* $0 < x \mapsto J_\zeta(x)$ *tiene denumerablemente infinitos ceros cualquiera sea el valor de* $\zeta \geq 0$.

Dados reales k y ℓ distintos y escribiendo las ecuaciones diferenciales para las funciones $J_m(kx)$ y $J_m(\ell x)$ se obtiene via integración sobre un intervalo $[a,b]$, la relación

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(\ell x)x\,dx = \frac{1}{k^2-\ell^2}(\ell x J_m(kx)J_m'(\ell x) - kxJ_m(\ell x)J_m'(kx))\bigg|_a^b \ .$$

Si el miembro derecho de esta identidad se anula, por ejemplo cuando ka, ℓa, kb y ℓb son ceros de J_m o de J_m' (o en condiciones más generales como: dos son ceros de J_m y los otros dos ceros de J_m', etc.), entonces se obtiene una relación de “ortogonalidad”. Uno de los usos más frecuentes se obtiene en el desarrollo de funciones en series de funciones de Bessel. Considere una función f definida en $[0,a]$ tal que $f(a) = 0$. Ya que cualquiera sea $0 \neq m \in \mathbb{N}$, J_m tiene infinitos ceros en $(0,\infty)$, hay $\{k_n : n = 1,2,\cdots\}$ tales que $J_m(k_n a) = 0$ para $n = 1,2,\cdots$. Intentamos entonces el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m(k_n x) \ .$$

Mutiplicando esto por $xJ_m(k_\ell x)$ e integrando sobre $[0,a]$, la relación de ortogonalidad nos dá

$$c_\ell = \frac{\int_0^a f(x)xJ_m(k_\ell x)\,dx}{\int_0^a xJ_m(k_\ell x)^2\,dx} \ .$$

La integral del denominador se puede hacer, y cuando $J_m(pa) = J_m(pb) = 0$ da:

$$\int_a^b xJ_m(px)^2\,dx = (b^2/2)J_{m+1}(pb)^2 - (a^2/2)J_{m+1}(pa)^2 \ , \quad m = 1,2,\cdots \ .$$

4. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Un sistema de *ED* de primer orden son $n \geq 1$ ecuaciones diferenciales de primer orden para funciones $y_1, y_2, \cdots, y_n$ de una variable independiente x que están acopladas entre si:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \ , \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \ , \\ &\cdots \\ y_k' &= f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \ , \\ &\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \ , \end{aligned}$$

En particular estamos suponiendo la forma normal donde el coeficiente de la derivada de máximo orden (1 en este caso) es 1. Una solución del sistema en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de n funciones $\phi_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, diferenciables tales que

$$\phi_j'(x) = f_j(x, \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)) \text{ para todo } x \in I, \text{ y } j = 1, 2, \cdots, n \; .$$

El problema de Cauchy para este sistema es encontrar una solución $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ tal que $\phi_j(x_o) = y_j$ para $j = 1, 2, \cdots, n$ donde y_j está especificado.

La siguiente observación es trivial pero muy útil desde el punto de vista teórico. Considere cualquier *ED* de orden $n \geq 1$ en su forma normal

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \; .$$

Defina n funciones u_j por

$$u_j = y^{(j-1)} \; , \;\; j = 1, 2, \cdots, n \; .$$

Entonces la *ED* de orden n especificada por f es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$u_1' = u_2 =: f_1(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) \; , \;\; u_2' = u_3 =: f_2(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) \; ,$$

$$\cdots \; , \;\; u_{n-1}' = u_n =: f_{n-1}(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) \; , \;\; u_n' = f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) \; .$$

O más sucintamente,

$$u_j' = f_j(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) \; , \;\; j = 1, 2, \cdots, n \; ,$$

donde

$$f_j(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) := \begin{cases} u_{j+1} & , \quad \text{para } j = 1, 2, \cdots, n-1 \\ f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) & , \quad \text{para } j = n \end{cases} \; .$$

Esto nos permitirá aplicar resultados genéricos sobre sistemas de *ED*s[11] de primer orden a *ED*s de orden arbitrario.

Será conveniente desarrollar una notación vectorial para la discusión de sistemas de *ED*s de primer orden. Escribimos $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ para un vector en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Consistentemente, $\mathbf{y}(x)$ será un vector en $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son funciones de una variable x, $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))$. Con los miembros derechos de un sistema de *ED*s de primer orden podemos armar un vector

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)) \; ,$$

vale decir la j-ésima componente de $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ es $f_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = f_j(x, \mathbf{y})$. Esto nos deja escribir al sistema como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \; . \tag{34}$$

Donde el vector $\mathbf{y}'$ es aquel vector cuyas componentes son las correspondientes componentes del vector $\mathbf{y}$ derivadas respecto de la variable independiente x. Diremos que el sistema (34) es **lineal y homogeneo** si $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ es lineal para todo x; vale decir que para todo x hay un operador lineal $A(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A(x)\mathbf{y}$. Si el operador lineal $A(x)$ no depende de x entonces el sistema (34) es **lineal, homogeneo y de coeficientes constantes (o autónomo)**.

Ejemplo 4.1: Considere un sistema lineal, homogeneo y de coeficientes constantes

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \; ,$$

[11] Usamos *ED*s para abreviar “ecuaciones diferenciales (ordinarias)”.

donde A es un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en si mismo (una matriz real $n \times n$). Sea

$$\exp(Az) := \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} A^n z^n \ , \quad z \in \mathbb{C} \ ;$$

donde el miembro derecho ha de entenderse como aquella matriz $n \times n$ cuyos elementos son los números

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (A^n)_{j,k} \ , \quad j, k \in \{1, 2, \cdots, n\} \ .$$

Usando la convergencia de la serie para todo $z \in \mathbb{C}$, se ve que la solución al problema de Cauchy $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ es

$$\mathbf{y}(x) = \exp(A(x - x_o))\mathbf{y}_o \ .$$

Observe que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible, entonces

$$T^{-1} A^k T = (T^{-1} A T)^k \ , \quad T^{-1} \exp(Az) T = \exp(T^{-1} A T z) \ .$$

Si hay alguna transformación T invertible para la cual $T^{-1}AT =: \Lambda$ toma una forma simple (por ejemplo: $T^{-1}AT$ es triangular superior, o tiene forma canónica de Jordan, o es diagonal) entonces convendrá discutir las soluciones del sistema original en términos de las nuevas funciones $\xi := T^{-1}\mathbf{y}$ ya que entonces

$$\xi(x) = T^{-1}\mathbf{y}(x) = T^{-1} \exp(A(x - x_o))\mathbf{y_o} = \exp(\Lambda(x - x_o))\xi_o \ , \quad \xi_\mathbf{o} = T^{-1}\mathbf{y}_o \ .$$

◀

Analizamos ahora los resultados de existencia y unicidad de la solución de un problema de Cauchy para un sistema (34). Esto procede en completa analogía al caso $n = 1$. El primer paso consiste en observar que el problema de Cauchy $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ asociado al sistema (34), es equivalente a la ecuación integral

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt$$

$$:= \mathbf{y}_o + \left(\int_{x_o}^{x} f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) dt, \cdots, \int_{x_o}^{x} f_n(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t) \right) dt \ .$$

Aquí la integral de un vector es el vector formado por la integral de sus componentes.

El segundo paso consiste en definir una distancia en $\mathbb{R}^n$ que nos permita luego definir distancias entre funciones que toman valores en $\mathbb{R}^n$; no usamos la distancia euclidea usual sino que definimos la norma

$$\|\mathbf{y}\| := \sum_{j=1}^{n} |y_j| \ , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Es inmediato verificar que esto define una norma: $\|\mathbf{y} + \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\|$; y $\|\mathbf{y}\| \geq 0$ con igualdad si y sólo si $\mathbf{y} = \mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$. Es también inmediato verificar que

Lema 10

$$\| \int_a^b \mathbf{y}(x) dx \| \leq \int_a^b \|\mathbf{y}(x)\| \, dx \ .$$

Consideremos un intervalo finito $I \subset \mathbb{R}$, y n funciones $y_1, y_2, \cdots, y_n$ definidas en I con valores reales. Definimos la norma del vector $\mathbf{y}$, visto como función sobre I, por

$$\|\mathbf{y}\|_o := \max_{x \in I} \|\mathbf{y}(x)\| \ .$$

Considere un abierto arbitrario $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; vale decir un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que para todo punto $\mathbf{y} \in \Omega$, existe $\epsilon > 0$ tal que si $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ satisface $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| < \epsilon$, entonces $\mathbf{z} \in \Omega$. Suponga que $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ está definida en $I \times \Omega$ y es continua y acotada con $\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\| \leq K$. El operador integral

$$(T\mathbf{g})(x) := \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}(t))dt \,, \tag{35}$$

está definido para n funciones $g_1, g_2, \cdots, g_n$ definidas y continuas sobre I con valores $\mathbf{g}(x) \in \Omega$. Para poder aplicar los teoremas sobre puntos fijos de contracciones en espacios métricos, necesitamos definir al operador integral T sobre un espacio métrico completo. Suponemos que $x_o \in I$ y consideramos solamente funciones $g_1, g_2, \cdots, g_n$ definidas sobre I a valores en Ω tales que

$$\{(x, \mathbf{g}(x)) : \; x \in I\} \subset \{(x, \mathbf{z}) \in I \times \Omega : \; \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_o\| \leq K|x - x_o|\} \,,$$

donde $K \geq 0$ es la cota de $\mathbf{f}$. Entonces se puede demostrar que

Teorema 4.1 *Las funciones $g_1, g_2, \cdots, g_n$ que satisfacen esta condición provistas con la norma $\| \cdot \|_o$ forman un espacio vectorial real completo.*

Es inmediato ver que la función $\mathbf{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisface una condición de Lipschitz

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \,, \;\; \alpha \geq 0 \,, \tag{36}$$

respecto de la (segunda) variable vectorial si y sólo si cada una de sus componentes lo hace:

$$|f_j(x, \mathbf{y}) - f_j(x, \mathbf{z})| \leq \alpha_j \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \,, \;\; \alpha_j \geq 0 \,.$$

Observese también que esta condición se cumple si las derivadas parciales $(\partial f_j / \partial y_k)$ son acotadas.

Ahora podemos imitar casi sin cambios los pasos tomados en el caso $n = 1$ y demostrar los siguientes resultados. Para ello, resulta crucial la estimación análoga al del caso $n = 1$

$$\|T^m(\mathbf{g})(x) - T^m(\mathbf{h})(x)\| \leq \frac{\alpha^m |x - x_o|^m}{m!} \|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|_o \,, \;\; m = 1, 2, \cdots ;$$

que garantiza que alguna potencia del operador T es una contracción.

Teorema 4.2 *Sea I un intervalo cerrado y finito en $\mathbb{R}$. Si $\mathbf{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua, acotada y satisface una condición de Lipschitz (36); y si $(x_o, \mathbf{y}_o) \in I \times \Omega$, entonces hay un subintervalo $J \subset I$ que contiene a x_o tal que el problema de Cauchy para (34) con $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ admite una única solución.*

Teorema 4.3 *Sea $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y suponga que $\mathbf{f}$ satisface una condición de Lipschitz (36) en $J \times \mathbb{R}^n$ para todo subintervalo cerrado y finito J de I, entonces el problema de Cauchy $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ para (34) con $x_o \in I$ admite una única solución.*

Consideramos una aplicación de este último resultado a un sistema de *ED* de primer orden lineales inhomogeneas. O sea que $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ está determinado por

$$f_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = a_{j,1}(x)y_1 + a_{j,2}y_2 + \cdots + a_{j,n}y_n + g_j(x) \,, \;\; j = 1, 2, \cdots, n \,.$$

Suponemos que tanto las n^2 funciones $a_{j,k}$, $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, como las n funciones g_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, son continuas sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dado un subintervalo finito y cerrado arbitrario $[a, b] \subset I$, podemos elegir $\alpha > 0$, que dependerá del intervalo $[a, b]$, tal que

$$|a_{j,k}(x)| \leq \alpha$$

pues cada una de las funciones $a_{j,k}$ es de módulo acotado en $[a,b]$ y hay un número finito de estas funciones. Entonces,

$$|f_j(x,\mathbf{y}) - f_j(x,\mathbf{z})| = |\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(x)(y_k - z_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{j,k}(x)|\ |y_k - z_k| \leq \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \ ,$$

y por lo observado anteriormente, la función $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ satisface una condición de Lipschitz (36) para todo $x \in [a,b]$. Se satisfacen entonces las hipótesis del último teorema;

Teorema 4.4 *Todo sistema de EDs de primer orden lineal e inhomogeneo*

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}\ , \quad A(x) = (a_{j,k}(x))\ , \quad j,k \in \{1,2,\cdots,n\}\ ,$$

donde tanto $I \ni x \mapsto a_{j,k}(x)$ como $I \ni x \mapsto g_j(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ admite una única solución al problema de Cauchy $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ para todo $x_o \in I$, cualquiera sea $\mathbf{y}_o \in \mathbb{R}^n$.

Y, como cada *ED* lineal de orden n es equivalente a un sistema de primer orden, obtenemos

Teorema 4.5 *Toda ED lineal de orden n*

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} + g(x)$$

donde las n funciones a_j y la función g son continuas en un intervalo I, admite una única solución al problema de Cauchy $y(x_o) = u_o$, $y'(x_o) = u_1$, $\cdots$,$y^{(n-1)}(x_o) = u_{n-1}$ para todo $x_o \in I$, cualquiera sea $(u_o, u_1, \cdots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

4.1. Continuidad estructural y respecto de las condiciones iniciales

Considere el problema de Cauchy para un sistema de *ED*s de primer orden

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})\ , \quad \mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o\ .$$

Suponiendo que el sistema admite una única solución para x en algún intervalo (que contiene a x_o) ¿Como depende esta solución de $\mathbf{f}$, de x_o y de $\mathbf{y}_o$? Para analizar esta pregunta, conviene escribir $\mathbf{y}(x;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o)$ para la solución indicando explicitamente la dependencia de $\mathbf{f}$, x_o y $\mathbf{y}_o$.

Teorema 4.6 *Sea $\mathbf{y}(x;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o)$ la solución del problema de Cauchy $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(x_o;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o) = \mathbf{y}_o$, para $x \in [a,b]$, donde $\mathbf{f}$ es continua, acotada y satisface una condición de Lipschitz. Entonces, dado $\epsilon > 0$, se tiene:*

1. *hay $\delta > 0$ tal que para todo $z \in I$ con $|z - x_o| < \delta$, $\|\mathbf{y}(\cdot;\mathbf{f},z,\mathbf{y}_o) - \mathbf{y}(\cdot;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o)\|_o < \epsilon$;*
2. *hay $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_o\| < \delta$, $\|\mathbf{y}(\cdot;\mathbf{f},x_o,\mathbf{z}) - \mathbf{y}(\cdot;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o)\|_o < \epsilon$;*
3. *hay $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{g}-\mathbf{f}\|_o < \delta$, $\|\mathbf{y}(\cdot;\mathbf{g},x_o,\mathbf{y}_o) - \mathbf{y}(\,\cdot\,;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o)\|_o < \epsilon$.*

La demostración procede, a grandes rasgos, como sigue. En la situación del punto 3., escribimos abreviando $\mathbf{w}(x) := \mathbf{y}(\,\cdot\,;\mathbf{f},x_o,\mathbf{y}_o)$ y $\mathbf{v}(x) := \mathbf{y}(\cdot;\mathbf{g},x_o,\mathbf{y}_o)$. Considere $\{T^m(\mathbf{w}) : \ m = 1,2,\cdots\}$ que converge a $\mathbf{w}$. Como en el caso de $n = 1$ obtenemos

$$\|\mathbf{w} - T^m(\mathbf{v})\|_o \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_o \frac{e^{\alpha|x-x_o|} - 1}{\alpha}\ .$$

Esto nos permite demostrar 3.
Para ver 2., considere $\mathbf{g}(x,\mathbf{h}) := \mathbf{f}(x,\mathbf{h} + \mathbf{z} - \mathbf{y}_o)$. Si, abreviando, $\mathbf{u}(x) := \mathbf{y}(x;\mathbf{f},x_o,\mathbf{z})$, tenemos

$$\mathbf{u}(x) - (\mathbf{z} - \mathbf{y}_o) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \mathbf{f}(t,\mathbf{u}(t))\,dt = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \mathbf{g}(t,\mathbf{u}(t) - (\mathbf{z} - \mathbf{y}_o))\,dt\ .$$

Por lo que acabamos de ver:

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|_o \leq \|\mathbf{w}-(\mathbf{u}-(\mathbf{z}-\mathbf{y}_o))\|_o + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}_o\| \leq \|\mathbf{z}-\mathbf{y}_o\| + \|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o \frac{e^{\alpha|x-x_o|}-1}{\alpha} .$$

Pero

$$\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o \leq \alpha\|\mathbf{y}_o-\mathbf{z}\| ,$$

con lo cual

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|_o \leq \|\mathbf{y}_o-\mathbf{z}\| \, e^{\alpha|x-x_o|} ;$$

y esto nos permite ver 2.
Finalmente en la situación de 1., sea $\mathbf{r}(x) := \mathbf{y}(x; \mathbf{f}, z, \mathbf{y}_o)$. Entonces

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{y}_o - \int_{x_o}^{z} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t))\, dt + \int_{x_o}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t))\, dt .$$

Poniendo $\mathbf{z} := \mathbf{y}_o - \int_{x_o}^{z} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t))\, dt$ y refierendose al caso 2., tendremos

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{r}\|_o \leq \|\mathbf{y}_o-\mathbf{z}\| \, e^{\alpha|x-x_o|} = \| \int_{x_o}^{z} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t))\, dt\| \, e^{\alpha|x-x_o|} \leq e^{\alpha|x-x_o|} K \int_{x_o}^{z} |dt| = K\,|z-x_o|\, e^{\alpha|x-x_o|} ;$$

que nos dará 1. inmediatamente.

4.2. Estabilidad de sistemas de primer orden autónomos

Un sistema de euaciones diferenciales de primer orden $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ se dice **autónomo** si las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ no dependen de la variable independiente x, o sea $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Consideramos sistemas autónomos y pensamos en la variable independiente como "tiempo" por lo cual la anotamos con t. La nomenclatura se adapta a esta visión del sistema autónomo como sistema dinámico. $\mathbf{x}$ se llama **punto de equilibrio** o **punto crítico** del sistema autónomo especificado por $\mathbf{f}$ si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En tal caso $\mathbf{y}(t) := \mathbf{x}$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución del sistema ya que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Lo que nos interesa ahora es analizar que características tienen las soluciones (trayectorias) que pasan "cerca" de un punto crítico $\mathbf{x}$. Suponemos que el problema de Cauchy $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(t_o) = \mathbf{y}_o$ admite una única solución para todo $t_o \geq 0$ y todo $\mathbf{y}_o$ en algún abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ donde está definida $\mathbf{f}$.
Las definiciones básicas son: El punto crítico $\mathbf{x}$ del sistema autónomo definido por $\mathbf{f}$ se dice **estable** si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier solución $\mathbf{y}(t)$ de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, si $\|\mathbf{y}(t_o) - \mathbf{x}\| \leq \delta$ para algún $t_o \geq 0$ entonces $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_o$. En otras palabras, toda trayectoria que en algún momento pasa cerca del punto crítico permanece cerca de este punto para siempre después.
Un punto crítico $\mathbf{x}$ del sistema autónomo definido por $\mathbf{f}$ se dice **asintóticamente estable** si es estable y existe $\delta > 0$ tal que que para cualquier solución $\mathbf{y}(t)$ de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, si $\|\mathbf{y}(t_o) - \mathbf{x}\| \leq \delta$ para algún $t_o \geq 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}\| = 0$.

Ejemplo 4.2: Consideramos tres ejemplos simples bi-dimensionales.
El primero es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} .$$

$\mathbf{z}(t) = (ae^{-t}, be^{-t})$, $a, b, t \in \mathbb{R}$, es la solución general. $\mathbf{0}$ es el único punto crítico. Se tiene

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{0}\| = (|a| + |b|)e^{-t} ;$$

Ya que $t \mapsto e^{-t}$ es estrictamente decreciente con $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ es inmediato verificar que $\mathbf{0}$ es asintóticamente estable. De hecho $\mathbf{0}$ es mucho más que asintóticamente estable: Para toda trayectoria $\mathbf{z}(t)$ se tiene $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$.

El segundo es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Ya que los autovalores de la matriz son ± 1, concluimos que la solución es combinación lineal de e^t y de e^{-t}. En efecto $\mathbf{z}(t) = (ae^t + b^{-t}, ae^t - be^{-t})$ es la solución general. $\mathbf{0}$ es el único punto crítico, y se tiene

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{0}\| = |ae^t + be^{-t}| + |ae^t - be^{-t}| .$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ arbitrario. Considere la trayectoria que se obtiene eligiendo $b = 0$ y $0 < a < \delta/2$; entonces

$$\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{0}\| = 2|a| = 2a \leq \delta .$$

Sin embargo

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{0}\| = 2ae^t$$

es mayor que ϵ para todo $t > \ln(\epsilon/(2a))$. El punto $\mathbf{0}$ no es estable.

El tercer ejemplo es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Ya que los autovalores de la matriz son $\pm i$, concluimos que la solución es combinación lineal de $\cos(t)$ y de $\sin(t)$. En efecto $\mathbf{z}(t) = (a\cos(t) + b\sin(t), b\cos(t) - a\sin(t))$ es la solución general. Ya que $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2 + b^2$, las trayectorias son circunferencias en $\mathbb{R}^2$ de radio $\sqrt{a^2+b^2}$ centradas en el punto $\mathbf{0}$, que es el único punto crítico; y se tiene

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{0}\| = |a\cos(t) + b\sin(t)| + |b\cos(t) - a\sin(t)| .$$

A una dada trayectoria $\mathbf{z}(t)$ ($a^2 + b^2 =$ constante), nos interesa hallar el máximo valor y el mínimo valor de $\|\mathbf{z}(t)\|$. Por razones de simetría, podemos restringirnos a $\mathbf{z}(t)$ en el cuadrante positivo. Allí tendremos $\|\mathbf{z}(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ donde α que depende de t es el ángulo polar en $[0, \pi/2]$ de $\mathbf{z}(t)$. Un análisis inmediato muestra que el valor máximo buscado es $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (asumido en $\alpha = \pi/4$); mientras que el mínimo valor de $\|\mathbf{z}(t)\|$ es $\sqrt{a^2+b^2}$ (asumido en $\alpha = 0,\ \pi/2$). Luego, dado $\epsilon > 0$, ponga $\delta = \epsilon/\sqrt{2}$. Toda trayectoria $\mathbf{z}(t)$ para la cual se tiene $\|\mathbf{z}(t_o)\| < \delta$ para algún $t_o \in \mathbb{R}$, cumple con $\sqrt{a^2+b^2} \leq \|\mathbf{z}(t_o)\| < \delta$ y por lo tanto $\|\mathbf{z}(t)\| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} < \sqrt{2}\delta = \epsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto demuestra que el punto crítico $\mathbf{0}$ es estable. Sin embargo, las trayectorias siendo circunferencias alrededor del punto crítico, está claro que no hay estabilidad asintótica. ◀

4.2.1. Sistemas autónomos lineales

En estos sistemas, tendremos

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} ,$$

donde A es una matriz real $n \times n$. $\mathbf{0}$ es un punto crítico, y será el único cuando A es invertible; en caso contrario, habrá otro(s) punto(s) crítico(s) $\mathbf{x} \neq 0$ ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Poniendo $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{x}$, el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ se transforma en $\mathbf{z}' = A(\mathbf{z} + \mathbf{x}) = A\mathbf{z}$. No hay entonces perdida de generalidad al suponer que $\mathbf{0}$ es el punto crítico, lo que haremos en lo que sigue. Viendo a A como matriz compleja, existe una transformación invertible compleja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que

$$T^{-1}AT$$

tiene forma canónica de Jordan, vale decir es suma directa de bloques de Jordan $J_d(\lambda)$ donde λ recorre los autovalores de A y los d son las dimensiones de los bloques. Se tiene que $J_d(\lambda)$ es una matriz triangular superior $d \times d$ cuyos elementos diagonales son todos λ y cuya primera diagonal superior consiste de 1; todos los demás elementos son nulos.

$$J_d(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda \end{bmatrix} .$$

Lema 11 *Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, y $d \in \{1, 2, \cdots\}$, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\mathbf{z}' = J_d(\lambda)\mathbf{z} ,$$

para d funciones diferenciables $z_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es

$$z_j(t) = \exp(\lambda t) \sum_{k=0}^{d-j} \frac{a_{j+k}}{k!} t^k , \quad j = 1, 2, \cdots, d ,$$

donde a_j, $j = 1, 2, \cdots, d$ son complejos arbitrarios.

Demostración: El sistema es

$$z_j' = \lambda z_j + z_{j+1} , \quad j = 1, 2, \cdots, d-1 , \quad z_d' = \lambda z_d .$$

Podemos entonces resolver la *ED* para z_d: $z_d(t) = a_d e^{\lambda t}$, donde $a_d \in \mathbb{C}$ es arbitrario. Para z_{d-1} tenemos entonces

$$z_{d-1}' = \lambda z_{d-1} + a_d e^{\lambda t} ,$$

cuya solución general es

$$z_{d-1}(t) = a_{d-1} e^{\lambda t} + a_d t e^{\lambda t} , \quad a_{d-1} \in \mathbb{C} .$$

Podemos proceder a continuación con z_{d-2}, etc.
Así obtenemos la fórmula indicada. Verificamos que es correcta; para $j = 1, 2, \cdots, d-1$, tenemos

$$z_j'(t) = \lambda \exp(\lambda t) \sum_{k=0}^{d-j} \frac{a_{j+k}}{k!} t^k + \exp(\lambda t) \sum_{k=1}^{d-j} \frac{a_{j+k}}{(k-1)!} t^{k-1}$$

$$= \lambda z_j(t) + e^{\lambda t} \sum_{m=0}^{d-(j+1)} \frac{a_{j+1+m}}{m!} t^m = \lambda z_j(t) + z_{j+1}(t) ;$$

y para z_d efectivamente $z_d' = \lambda z_d$. ■

Anotamos $\sigma(A)$ para el espectro de A. Sea entonces $\mathbf{z} := T^{-1}\mathbf{y}$; entonces

$$\mathbf{z}' = T^{-1}\mathbf{y}' = T^{-1}A\mathbf{y} = T^{-1}AT\mathbf{z} ,$$

y el lema nos da la solución general $\mathbf{z}(t)$ en terminos de la suma directa de las soluciones correspondientes a cada bloque de Jordan. Por lo tanto,

$$\mathbf{y}(t) = T\mathbf{z}(t) ,$$

y cada $y_j(t)$ es combinación lineal de las siguientes funciones:

- Si $\lambda \in \sigma(A)$ es real y el bloque $J_d(\lambda)$ aparece en la forma canónica de Jordan: $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $\cdots$, $t^{d-1}e^{\lambda t}$

- Si $\alpha+i\beta=\lambda\in\sigma(A)$, $\beta\neq 0$ y $J_d(\lambda)$ aparece en la forma canónica de Jordan entonces $\alpha-i\beta\in\sigma(A)$ y $J_d(\overline{\lambda})$ aparece en la forma canónica de Jordan y las funciones intervinientes son: $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $e^{\alpha t}t\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}t\sin(\beta t)$, $\cdots$, $e^{\alpha t}t^{d-1}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}t^{d-1}\sin(\beta t)$.

Podemos entonces distinguir tres casos:

1. $Re(\lambda)<0$ para todo $\lambda\in\sigma(A)$. En este caso, ya que e^{at} para $a>0$ tiende a ∞ más rapidamente que cualquier potencia t^k, tendremos que toda trayectoria $\mathbf{y}(t)$ satisface $\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$. El punto crítico 0 es a fortiori asintóticamente estable.

2. Si $Re(\lambda)\leq 0$ para todo $\lambda\in\sigma(A)$; si para todo $\lambda\in\sigma(A)$ con $Re(\lambda)=0$ la multiplicidad algebraica de λ es 1; y si hay a lo menos un autovalor λ con $Re(\lambda)=0$; entonces el punto crítico 0 es estable pero no asintóticamente estable.

3. Excluidos los dos casos anteriores, o sea en todos los otros casos, $\mathbf{0}$ no es estable. En concreto: si hay algún autovalor λ con $Re(\lambda)>0$ o algún autovalor λ con $Re(\lambda)=0$ y multiplicidad algebraica mayor que 1.

4.2.2. Sistemas no lineales

Consideramos un sistema autónomo $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ no lineal. Suponiendo que las derivadas parciales de cada f_j, $j=1,2,\cdots,n$, respecto de cada una de las variables y_k, $k=1,2,\cdots,n$, existen; el **jacobiano** de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{y}$ es la matriz $n\times n$ $J(\mathbf{y})$ dada por

$$J(\mathbf{y})_{j,k}=\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k}\right)(\mathbf{y})\ ,\quad j,k\in\{1,2,\cdots,n\}\ .$$

Aplicando la fórmula de Taylor obtenemos

$$f_j(\mathbf{y})=f_j(\mathbf{y}^{(o)})+\sum_{k=1}^{n}J(\mathbf{y}^{(o)})_{j,k}(y_k-y_k^{(o)})+R_j\ ,$$

donde el resto R_j depende de $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}^{(o)}$ etc. O sea que

$$\mathbf{f}(\mathbf{y})=\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(o)})+J(\mathbf{y}^{(o)})(\mathbf{y}-\mathbf{y}^{(o)})+\mathbf{R}\ ;$$

y si $\mathbf{y}^{(o)}$ es un punto crítico de $\mathbf{f}$ tendremos:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y})=J(\mathbf{y}^{(o)})(\mathbf{y}-\mathbf{y}^{(o)})+\mathbf{R}\ .$$

Ya que la estabilidad y la estabilidad asintótica de un punto crítico es un fenomeno local (trayectorias cercanas se quedan cerca para siempre o convergen al punto), se puede quizas esperar que la estabilidad del sistema no lineal en el punto crítico $\mathbf{y}^{(o)}$ se pueda reducir a la del sistema linearizado

$$\mathbf{x}'=J(\mathbf{y}^{(o)})(\mathbf{x}-\mathbf{y}^{(o)})\ .$$

Siguiendo esta idea, se obtiene el siguiente resultado (debido a Lyapunov[12]):

Teorema 4.7 *Suponga que $\mathbf{y}^{(o)}$ es un punto crítico del sistema autónomo $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ y sea $J(\mathbf{y}^{(o)})$ el jacobiano de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{y}^{(o)}$. Si todos los autovalores de $J(\mathbf{y}^{(o)})$ tienen parte real negativa entonces $\mathbf{y}^{(o)}$ es asintóticamente estable. Si $J(\mathbf{y}^{(o)})$ tiene un autovalor de parte real positiva entonces $\mathbf{y}^{(o)}$ no es estable.*

Si el jacobiano tiene autovalores de parte real nula, el sistema linealizado no determina la estabilidad del punto crítico del sistema no-lineal.

[12] La demostración procede usando la teoría de funciones de Lyapunov para un sist. de ED, ver el tratamiento del libro de Arnold', citado enla bibliografía.

4.3. Sistemas lineales no autónomos (la exponencial ordenada)

En un sistema lineal no autónomo

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \tag{37}$$

el operador lineal $A(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ depende de la variable independiente t. En el caso unidimensional la ED es separable y la solución es $y(t) = \exp(B(t, t_o))y(t_o)$ donde

$$B(t, t_o) = \int_{t_o}^{t} A(s)ds \; .$$

Cuando $n \geq 2$, el operador lineal $B(t, t_o)$ está perfectamente definido via la integración de los elementos de la matriz $A(t)$ en alguna base, y se tiene

$$\frac{dB(t, t_o)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_o}^{t} A(s)ds = A(t) \; .$$

Pero para $k \geq 2$,

$$\frac{dB(t, t_o)^k}{dt} = A(t)B(t, t_o)^{k-1} + B(t, t_o)A(t)B(t, t_o)^{k-2} + B(t, t_o)^2 A(t)B(t, t_o)^{k-3} + \cdots + B(t, t_o)^{k-1}A(t)$$

y cuando $A(t)$ no conmuta con $A(s)$ para $t \neq s$, esta suma no es $A(t)B(t, t_o)^{k-1}$ y, a fortiori, tenemos

$$\frac{d}{dt} \exp(B(t, t_o)) \neq A(t) \exp(B(t, t_o)) \; .$$

Pero en el caso commutativo donde $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ lo que acabamos de esbozar constituye una demostración del siguiente

Proposición 4.1 *Si la familia $\{A(t) : \; t \in I\}$ de operadores lineales $A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ para todo par $(t, s) \in I \times I$, entonces la solución del problema de Cauchy $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(t_o) = \mathbf{y}_o$ con $t_o \in I$ es*

$$\mathbf{y}(t) = \exp\left\{ \int_{t_o}^{t} A(s) \; ds \right\} \mathbf{y}_o \; , \quad t \in I \; .$$

El caso no commutativo y en especial su generalización a dimensión infinita es particularmente relevante en mecánica cuántica donde $iA(t)$ es el operador Hamiltoniano asociado con la energía del sistema y (37) es la ecuación de Schrödinger para una sistema sujeto a fuerzas que dependen del tiempo (e.g., controladas por el experimentador como en un experimento espectroscópico).

Considerese una familia $\{A(t) : \; t \in I\}$ de operadores lineales acotados sobre un espacio vectorial normado $\mathcal{V}$, $A(t) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$; definidos para t en un intervalo real I. Dado un $t_o \in I$ fijo, la **exponencial ordenada** de la familia en $t \in I$ es el operador lineal definido por la serie

$$\mathbf{Exp}(A)(t, t_o) = E + \int_{t_o}^{t} A(s)ds + \int_{t_o}^{t} dt_1 A(t_1) \int_{t_o}^{t_1} dt_2 A(t_2) + \int_{t_o}^{t} dt_1 A(t_1) \int_{t_o}^{t_1} dt_2 A(t_2) \int_{t_o}^{t_2} dt_3 A(t_3) + \cdots$$

cuyo k-ésimo sumando es

$$\int_{t_o}^{t} dt_1 \int_{t_o}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_o}^{t_{k-2}} dt_{k-1} A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_{k-1}) \; .$$

Observese que los argumentos de la familia $\{A(t)\}$ que se integra están ordenados de izquierda a derecha: de mayor a menor $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_{k-1} \geq t_o$ cuando $t \geq t_o$ y de menor a mayor $t \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{k-1} \leq t_o$

en el otro caso. Es de aquí de donde surge el nombre. Y es exactamente esta propiedad la que nos permite derivando $\mathbf{Exp}(A)$ término a término obtener formalmente

$$\frac{d\mathbf{Exp}(A)}{dt}(t) = A(t)\mathbf{Exp}(A)(t) \ .$$

La solución de (37) es entonces

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Exp}(A)(t, t_o)\mathbf{y}(t_o) \ . \tag{38}$$

La suposición de que la familia es acotada es la que nos permite fundamentar todas las operaciones ya que la serie es convergente en la norma de operadores acotados sobre $\mathcal{V}$ y lo es uniformemente para todo t en cualquier subconjunto acotado de I.

El lector atento habrá descubierto que le serie utilizada en la definición de la exponencial ordenada surge naturalmente si resolvemos el problema de Cauchy asociado a (37) de manera iterativa : ¡la buena idea de C.E. Picard! En efecto, con $\mathbf{y}^{(o)}(t) = \mathbf{y}(t_o) = \mathbf{y}_o$, y

$$\mathbf{y}^{(k)}(t) = \mathbf{y}_o + \int_{t_o}^{t} A(s)\mathbf{y}^{(k-1)}(s)\, ds \ , \quad k \geq 1 \ ;$$

recuperamos la serie que define a $\mathbf{Exp}(A)$.

Teorema 4.8 *La solución del problema de Cauchy de (37) en un espacio vectorial normado $\mathcal{V}$ con $\{A(t) : \ t \in I\}$ una familia de operadores lineales acotados sobre $\mathcal{V}$ que es continua en I y con condición inicial $\mathbf{y}(t_o) = \mathbf{y}_o \in \mathcal{V}$ para $t_o \in I$ es (38).*

El lector será tan amable de recuperar el teorema anterior en el caso commutativo.

5. Bibliografía

M.L. Boas: Mathematical Methods in the Physical Sciences. Second edition, John Wiley & Sons, New York 1983.
Aunque no es un libro específico sobre ecuaciones diferenciales, provee una muy buena introducción a ellas.

W.E. Boyce, and R.C. DiPrima: Elementary Differential Equations. Second edition, John Wiley & Sons, New York 1969.
Excelente tratamiento del cual hemos tomado mucho en estas notas.

D.L. Kreider, R.G. Kuller, and D.R. Ostberg: Elementary Differential Equations. Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1968.
Idem, libro anterior.

G.F. Carrier, and G.E. Pearson: Ordinary Differential Equations. SIAM, Philadelphia 1991.
Un libro algo ecléctico pero clásico. A mi no me gusta.

D. Zwillinger: Handbook of Differential Equations. Third Edition, Academic Press, San Diego, 1998.
Este es el "manual" de las ecuaciones diferenciales. Compila los métodos mas importantes y mas usados para resolver (y también para aproximar soluciones) ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales.

E. Coddington: Introduction to Ordinary Differential Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Libro clásico sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

V.I. Arnold: Ordinary Differential Equations. MIT Press, Cambridge (Mass.), 1973.
Un libro muy hermoso con fuerte énfasis en aspectos geométricos y cualitativos. Algo restringido en los temas que trata.

G. Teschl: Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Graduate Studies in Mathematics, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2011.
Un agregado reciente valioso a la bibliografía de orientación matemática. Introductorio pero avanzado y impecable.

Índice alfabético

$W_{f,g}$, 21
ED, 2
  normal, 14
  de Bernoulli, 15
  de Bessel, 39
  de Clairaut, 11
  de Euler, 34
  de Ricatti, 15
  normal, 19
  regular, 14, 19

analiticidad, 33
asintóticamente estable, 46
autónomo, sistema de *EDs*, 46
autoespacio, 31
autofunción, 31
autovalor, 31
autovalor simple, 32

Bernoulli, *ED* de, 15
Bessel, *ED* de, 39

Cauchy, problema de, 5
Clairaut, *ED* de, 11
coeficientes constantes
  sistema lineal, 42
condición
  de Lipschitz, 16
contracción, 17

ecuación indicial, 36
estable
  asintóticamente, 46
estable, punto, 46
estacionaria
  solución, 26
Euler, *ED* de, 34
exacta, *ED*, 13
exponencial ordenada, 50

factor integrante, 14
función
  de Green, 28

homogenea, *ED*, 12

Jacobiano, 49

lineal
  homogenea, *ED*, 14
  inhomogenea, *ED*, 14
  normal, *ED*, 14
  regular, *ED*, 14
lineal homogeneo
  sistema, 42
  sistema de coeficientes constantes, 42
lineal, *ED*, 14
Lipschitz, condición de, 16

método
  de variación de las constantes, 24
  de d'Alembert, 22
multiplicidad geométrica, 31

orden, 2

Problema
  de Cauchy, 5
  de Sturm-Liouville, 31
punto
  crítico, 46
    estable, 46
  de equilibrio, 46
  fijo, 16
  singular, 34
    regular, 35

regular, punto singular, 35
Ricatti, *ED* de, 15

separable, *ED*, 6
singular, punto, 34
sistema
  lineal
    homogeneo, 42
solución
  estacionaria, 26
  transitoria, 26

transitoria
  solución, 26

Wronskiano, 21