PRÁCTICO 1

Números complejos

1. Considerar los siguientes números complejos:

$$z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 3i; \quad z_3 = 2 - i; \quad z_4 = -1 + 2i; \quad z_5 = -2 - i.$$

   (a) Graficar $z_1, \dots, z_5$ en el plano cartesiano.

   (b) Graficar, en el mismo gráfico del item anterior, los conjugados de $z_1, \dots, z_5$, denotándolos $w_1, \dots, w_5$ respectivamente, y las sumas $z_1 + w_1, \dots, z_5 + w_5$.

   (c) Calcular y graficar, en un nuevo gráfico:

$$z_1,\ z_2 \ \text{ y } z_1 + z_2; \qquad z_1,\ z_3 \ \text{ y } z_1 + z_3; \qquad z_1,\ z_4 \ \text{ y } z_1 + z_4; \qquad z_4,\ z_5 \ \text{ y } z_4 + z_5.$$

   (d) Calcular el módulo de $z_1, \dots, z_4$ y escribirlos en forma polar.

2. Considerar los siguientes números complejos:

$$w_1 = 2e^{i\pi/3}; \quad w_2 = e^{i\pi/6}; \quad w_3 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}; \quad w_4 = e^{-i\pi/4}.$$

   (a) Graficar $w_1, \dots, w_4$ en el plano cartesiano.

   (b) Graficar, en el mismo gráfico del item anterior, los conjugados de $w_1, \dots, w_4$, denotándolos $v_1, \dots, v_4$ respectivamente, y los productos $w_1 v_1, \dots w_4 v_4$.

   (c) Calcular y graficar, en un nuevo gráfico:

$$w_1,\ w_2 \ \text{ y } w_1 w_2; \qquad w_1,\ w_3 \ \text{ y } w_1 w_3; \qquad w_1,\ w_4 \ \text{ y } w_1 w_4; \qquad w_4,\ w_5 \ \text{ y } w_4 w_5.$$

   (d) Escribir los complejos $w_1, \dots, w_4$ en coordenadas cartesianas.

3. Sean $z = 3/2 - i$, $w = 2 + 1/3i$, $u = 2/3e^{i2\pi/3}$ y $v = 5/4e^{-i\pi/6}$.

   (a) Calcular los inversos de z y w, y los de u y v.

   (b) Calcular los cocientes z/w y w/z, y los cocientes u/v y v/u.

   (c) Calcular las potencias $z^2, \dots, z^5$ y $w^2, \dots, w^5$, y las potencias $u^2, \dots, u^5$ y $v^2, \dots, v^5$.

4. Graficar las raíuces n-ésimas de la unidad para $n = 2, 3, \dots, 8$ y calcular gráficamente, para cada n, la suma de todas ellas. [Si el resultado le llama la atención, busque, en internet por ejemplo, qué se sabe sobre esto.]

5. Consideremos los círculos del plano C_1 de centro $(1, 0)$ y radio 2, C_2 de centro $(3, -2)$ y radio $3/2$ y C_3 de centro $(-1, -1)$ y radio 1.

   (a) Describir estos conjuntos como subconjuntos de números complejos usando el módulo y la suma de complejos.

   (b) Describirlos como transformados del círculo centrado en el origen y de radio 1.

   (c) Describir la *mitad superior* de cada uno de ellos.

   (d) Describir el *primer cuarto* de cada uno de ellos.

Ejercicios adicionales

6. Considerar los siguientes números complejos:

$$z_1 = 1 - i; \quad z_2 = -2 + 3i; \quad z_3 = 1/3 + 3/2i.$$

   (a) Hallar un número complejo $w = a + bi$ tal que $z_1 + w$ sea real. ¿Puede encontrar más de uno?
   (b) Hallar un número complejo $w = a+bi$ tal que $z_2 w$ esté en el cuarto cuadrante. ¿Puede encontrar más de uno?
   (c) Hallar un número complejo $w = a+bi$ tal que $z_3 w$ esté en el tercer cuadrante y tenga módulo 1. ¿Puede encontrar más de uno?

7. Calcular

$$(1 + 2i)^2 + \frac{2 - i}{1 - i} - \frac{3}{2}(1 + i)(2 + 1/3i).$$

8. Considerar la región R del plano delimitada por las semirectas de origen $(2, 2)$ y pendientes 0 y 1 respectivamente.

   (a) Describir esta región como subconjunto de los complejos.
   (b) Determinar y graficar las regiones $R + (-1 + 2i)$, iR y $1/2e^{i\pi/4}R$.
   (c) Determinar y graficar las regiones:
      i. $R^{-1} = \{z^{-1} : z \in R\}$.
      ii. $\overline{R} = \{\overline{z} : z \in R\}$.

9. Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

   (a) $p(x) = 1 + 3x - 2x^2$.
   (b) $q(x) = (1 + i) - 2x + ix^2$.