PRÁCTICO 2

Funciones diferenciables de $\mathbb{R}^2$

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = (x^2y, 1-xy); \quad g(x,y) = (\cos(x)+y, x-y); \quad h(x,y) = (ye^x, e^{x-y}).$$
2. Probar que las derivadas parciales del punto anterior, son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.
3. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0), & \text{si } x \neq y \\ (x,0), & \text{si } x = y \end{cases}.$$
   (a) Calcular las derivadas parciales de f en todo punto en que se pueda.
   (b) ¿En cuáles de esos puntos, es f diferenciable?
   (c) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.
   (d) Observar que en $(0,0)$ existen las derivadas parciales, sin embargo f no es diferenciable en $(0,0)$.
4. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por:
$$f(x) = e^x; \qquad g(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \geq 0 \\ x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$
   (a) Probar que ambas funciones son infinitamente derivables en 0.
   (b) Escribir los desarrollos de Taylor de ambas centrados en 0.
   (c) ¿Qué se puede concluir?

Ejercicios adicionales

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$
   Probar que f es derivable, pero no es dos veces derivable.
6. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Probar que g es derivable en todo $\mathbb{R}$.
   (b) Probar que g' no es continua en 0.
7. Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = e^{-x^2}$. (Su gráfico se conoce como la *Campana de Gauss*.)
   (a) Probar que h es infinitamente derivable en todo su dominio.
   (b) Calcular su desarrollo de Taylor centrado en 0.
   (c) Mostrar que éste, no converge a h en ningún punto, salvo en 0.