PRÁCTICO 3

Funciones analíticas

1. Describir el dominio de las funciones descriptas por las siguientes fórmulas y escribirlas en la forma $u(x,y)+iv(x,y)$ con u,v funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.
   (a) $f(z)=z^2-2z+1$.
   (b) $g(z)=\frac{1}{1+z^2}$.
   (c) $h(z)=z+\frac{1}{z}$.
   (d) $k(z)=\frac{z}{1-|z|^2}$.
2. Mostrar que $f(z)=|z|^2$ es derivable sólo en el origen y que $g(z)=\overline{z}$ no es derivable en ningún punto.
3. Probar que las funciones racionales (cocientes de polinomios) son analíticas en el complemento del conjunto de ceros del denominador.
4. Probar que la función $u(x,y)=x^2-y^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. Encontrar una armónica conjugada, i.e. $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica en $\mathbb{C}$. ¿Es única?
5. Supongamos que $f:G\to\mathbb{C}$ es analítica con G un abierto conexo. Mostrar que si $f(z)$ es real para todo $z\in G$, entonces f es constante.
6. Sean $r>0$ y $f(z)=e^{1/z}$. Determinar la imagen de $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<r\}$ por f.
7. Determinar y graficar la imagen por la exponencial de los siguientes conjuntos:
   (a) La franja vertical $A=\{z=x+iy:\ x\in[1/2,2]\}$.
   (b) La franja horizontal $B=\{z=x+iy:\ y\in[0,\pi/2]\}$.
   (c) El rectángulo $D=\{z=x+iy:\ x\in[1/2,2],\ y\in[0,\pi/2]\}$. (Notar que $D=A\cap B$)
   (d) La semirecta $R=\{z=x+iy:\ x\geq 0,\ y=2x\}$.
8. Mostrar que las siguientes funciones son infinitamente derivables y calcular todas sus derivadas cuando sea posible:
$$f(z)=ze^z;\qquad g(z)=\overline{e^{\overline{z}}};\qquad h(z)=e^{z^2}.$$
9. Mostrar que las siguientes funciones son ármonicas y encontrar su conjugada armónica:
   (a) $u(x,y)=2x(1-y)$.
   (b) $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$.
   (c) $u(x,y)=\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$.
   (d) $u(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$.
   (e) $u(x,y)=e^y\cos(x)$.
10. Sea $f(z)=z+\frac{1}{z}$.

(a) Determinar y graficar la imagen por f de la circunferencia $C_0(r)$.
(b) Determinar y graficar la imagen por f del anillo A centrado en 0 y de radios 1 y 2.
(c) Determinar y graficar la imagen por f del semiplano superior.

11. Demostrar las siguientes identidades.

(a) $\exp(2-3\pi i) = -e^2$.
(b) $\exp(\frac{2+i\pi}{4}) = \sqrt{e/2}(1+i)$.
(c) $\exp(z+\pi i) = -\exp(z)$.

12. Resolver las siguientes ecuaciones, hallando todas sus soluciones.

$$e^z = -2; \qquad e^{2z-1} = 1; \qquad e^z = 1+\sqrt{3}i; \qquad |e^{-2z}| < 1.$$

Ejercicios adicionales

13. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$.

(a) Probar que si $\{f_n\}$ converge uniformemente a una f en Ω, entonces f es continua.
(b) Probar que si cada f_n es uniformemente continua y $\{f_n\}$ converge uniformemente a una f en Ω, entonces f es uniformemente continua.
(c) Mostrar que no se pueden debilitar las hipótesis.

14. Sea G abierto conexo en $\mathbb{C}$. Pensando a las funciones $f : G \to \mathbb{C}$ como funciones de dos variables reales a valores complejos y a partir de $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ y $y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$, podemos considerar $f(x,y)$ como una función de z y $\overline{z}$. Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Probar:

(a) $f : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
(b) Si $u : G \to \mathbb{C}$ es una función armónica, entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

15. Sea f definida en Ω, una región simétrica respecto al eje real y sea g definida en Ω por: $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Probar que g es analítica en Ω si y sólo si f es analítica en Ω.

16. Probar que si f es analítica y $|f|$ es constante, entonces f es constante.

17. En cada caso dar varias regiones D del plano, mínimas, tales que la imagen de todas ellas por la exponencial sea igual a:

(a) El primer cuadrante abierto.
(b) El anillo cerrado de centro 0 y radios 2 y 5.
(c) El complemento del círculo de radio 1.
(d) Todo el plano, sin el origen.

18. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ y sea $T(z) = az + b$.

(a) Mostrar que T lleva el círculo $C_{z_0}(r)$ en el círculo $C_{z_0+b}(|a|r)$.
(b) ¿Para qué elecciones de a y b, T lleva el círculo $C_0(1)$ en el círculo $C_{1+i}(2)$?
(c) En el item anterior, ¿es posible elegir a y b de manera tal que además $T(1) = -1+3i$?