PRÁCTICO 4

Integrales de línea y desarrollos en serie

1. Calcular las siguientes integrales:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt \; ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2ti}\, dt$$

2. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$

   (b) Calcular $\displaystyle\int_C z^m z^{-n} dz$, donde C es el círculo $|z| = 1$ recorrido en sentido antihorario.

3. Evaluar la integral $\displaystyle\int_{[-i, 1+2i]} \operatorname{Im} z\, dz$.

4. Evaluar la integral $\displaystyle\int_{[z_1, z_2, z_3]} f(z)\, dz$, donde $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_3 = 5i$ y $f(x + iy) = x^2 + iy$.

5. Sea $f(z) = y - x - 3x^2 i$. Calcular $\displaystyle\int_C f(z) dz$, donde:

   (a) C es el segmento de recta que une $z_1 = 0$ con $z_2 = 1 + i$.

   (b) $C = [0, i] \cup [i, 1 + i]$.

6. Calcular $\displaystyle\int_C \frac{z + 2}{z}\, dz$, donde C es:

   (a) la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

   (b) la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

   (c) la circunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Sea $f(z) = e^z$. Calcular $\int_C f(z) dz$, donde C es el arco que va de $z_1 = \pi i$ a $z_2 = 1$ por:

   (a) el segmento de recta que une esos puntos.

   (b) la porción de los ejes coordenados que unen esos puntos.

8. Hallar el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del circulo $|z - i| = 2$ recorrido en sentido horario en los casos:

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 4}; \qquad g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}.$$

9. Calcular:

   (a) $\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z}$, donde $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\quad \gamma_n(t) = e^{int}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\int_\gamma z^n dz$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\quad \gamma(t) = e^{it}$.

(c) $\int_\sigma \frac{dz}{z}$, donde σ es la poligonal $[1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$.

Notar que las integrales de la función $\frac{1}{z}$ de los puntos (a), (b) y (c) resultan iguales.

10. Calcular $\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz$ para:

    (a) $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (b) $\gamma(t) = 2e^{it}$ para $-\pi \leq t \leq \pi$.

11. Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, probar que:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}$,

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS$ para cualquier número complejo c.

12. Hallar la región de convergencia de las siguientes series de potencias:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n$.

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$.

13. Probar que si la serie $\sum_n a_n z^n$ tiene radioo de convergencia igual a r, entonces la serie derivada $\sum_n n a_n z^{n-1}$ también tiene radio de convergencia igual a r.

14. Demostrar que $e^z = e \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

15. Hallar el desarrollo en serie, centrado en 0, de la siguiente función e indicar su dominio de convergencia:
$$f(z) = \frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9}\left(\frac{1}{1+(z^4/9)}\right).$$

16. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \quad a \in \mathbb{C}$;

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \quad a \in \mathbb{C}$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$;

    (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$;

    (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

Ejercicios adicionales

17. Probar que $\int_\gamma f(z)\,dz$ es independiente de la parametrización de γ^* en el siguiente sentido. Si $h : [c,d] \mapsto [a,b]$ es biyectiva y continuamente derivable, con $h(c) = a$ y $h(d) = b$ y $\gamma_1 = \gamma \circ h$, entonces $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$.

18. Evaluar la integral $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,dz$, donde γ recorre la parábola $y = x^2$ desde $(1,1)$ hasta $(2,4)$.

19. Calcular las siguientes integrales, donde el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración.
$$\int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z}\,dz; \qquad \int_1^3 (z-2)^3\,dz.$$

20. Sea C la circunferencia $|z| = 3$, recorrida en sentido antihorario. Probar que si
$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}\,dz, \qquad |w| \neq 3,$$
entonces $g(2) = 8\pi i$. ¿Cuánto vale $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

21. Sea la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

    (a) Probar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale:
    $$\int_C \frac{e^{az}}{z}\,dz = 2\pi i.$$

    (b) Escribir la integral anterior en términos de θ para deducir la fórmula de integración
    $$\int_0^\pi e^{a\cos\theta}\cos(a\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \pi.$$

22. Considerar la serie $\sum_{n=1}^\infty z^n$.

    (a) Probar que si $|z| < 1$, la serie converge a $\frac{z}{1-z}$.

    (b) Escribiendo $z = re^{i\theta}$, deducir las siguientes igualdades para $0 < r < 1$:
    $$\sum_{n=1}^\infty r^n\cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\ ; \qquad \sum_{n=1}^\infty r^n\operatorname{sen}(n\theta) = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\ .$$

23. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos.

    (a) Si $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \alpha$, ¿qué se puede decir sobre el radio de convergencia la serie de potencias $\sum_n a_n z^n$?

    (b) Y si $|a_{n+1}/a_n|$ tiende a α, ¿qué se puede decir?

24. Sean γ y σ las curvas poligonales $[1, i]$ y $[1, 1+i, i]$. Expresar a γ y σ como caminos y calcular $\int_\gamma f$ y $\int_\sigma f$ donde $f(z) = |z|^2$. ¿Porqué no la vale la independencia de caminos?

25. Evaluar las siguientes integrales.

    (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz$, con $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$, con $\gamma(t) = e^{it}$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

26. Sea $I(r) = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz$ con $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 1$. Probar que $\lim_{r\to\infty} I(r) = 0$.

27. Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ y discutir la convergencia en $z = 1, -1, i$.

28. Si $\sum a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, ¿cuáles son los radios de convergencia de $\sum a_n z^{2n}$ y de $\sum a_n^2 z^n$?

29. ¿Para qué z es $\sum \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ convergente?