PRÁCTICO 6

Singularidades y desarrollos de Laurent

1. Sea z_0 una singularidad aislada de f. Probar que:
   (a) z_0 es una singularidad removible si y sólo si f es acotada en algún disco pinchado $D'(z_0, \delta)$.
   (b) z_0 es un polo si y sólo si $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to z_0$.

2. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones, incluyendo el punto en el ∞:
   (a) $z/\operatorname{sen} z$;
   (b) $\exp(1/z)$;
   (c) $z \cos(1/z)$;
   (d) $\dfrac{1}{z(e^z - 1)}$.

3. Dar tres desarrollos de Laurent diferentes, alrededor de $z = -1$, de
$$f(z) = \frac{7z - 2}{z(z+1)(z-2)}.$$

4. Dar todos los desarrollos de Laurent alrededor de $z = 0$ de
$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2},$$
y decir donde valen cada uno de ellos.

5. Probar las siguientes afirmaciones:
   (a) Si f es analítica en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces f es constante.
   (b) Si f es entera y existen $M > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $|f(z)| \le M|z|^k$, para $|z|$ suficientemente grande, entonces f es un polinomio de grado a lo sumo k.
   (c) Si f es entera y tiene en ∞ una singularidad no esencial, entonces f es un polinomio.
   (d) Si f es *meromorfa* en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces es una función racional.

6. Probar que si f es entera y su imagen no es densa, entonces f es constante.

7. Supongamos que f tiene un polo de orden m en z_0. Probar que si P es un polinomio de grado n, entonces $P \circ f$ tiene un polo de orden mn en z_0.

Ejercicios adicionales

8. Encontrar algunos de los primeros términos del desarrollo de Laurent de $\dfrac{1}{z^2(e^z - e^{-z})}$ válido en $0 < |z| < \pi$.

9. Hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \operatorname{sen}(nz)$ e indicar donde converge. [Ayuda: considerar $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{inz}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{-inz}$.]

10. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones, incluyendo el punto en ∞.

    (a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z^4}$;

    (b) $\dfrac{1}{z^2(z+1)} + \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$;

    (c) $\exp(\tan\dfrac{1}{z})$;

    (d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} z)}$.

11. Supongamos que a y b son números complejos distintos. Mostrar que $\dfrac{z-a}{z-b}$ tiene un logaritmo analítico g en $\mathbb{C} - [a, b]$. ¿Cuáles son los posibles desarrollos de Laurent de g alrededor de $z = 0$?