PRÁCTICO 5

Principios fundamentales. Funciones trigonométricas, logaritmos y raíces n-ésimas

1. Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{sen} z = 3; \qquad \operatorname{sen} z = \cos z; \qquad \cos z = 2; \qquad \cosh z = \frac{1}{2}; \qquad \operatorname{senh} z = i.$$

2. Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz$ de dos maneras distintas. Usando la fórmula integral de Cauchy y el desarrollo en serie de $\operatorname{sen} z$.

3. Probar, usando el *Principio de identidad*, las siguientes identidades:
   (a) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$.
   (b) $e^{z+w} = e^z e^w$.
   (c) $\operatorname{sen}(\pi/2 - z) = \cos z$.
   (d) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$.
   (e) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$.

4. Derivando las series de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, probar que $\operatorname{sen}' z = \cos z$ y $\cos' z = -\operatorname{sen} z$.

5. Sea Log el logaritmo principal. Probar que:
   (a) $\operatorname{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2} i$.
   (b) $\operatorname{Log}(1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} i$.
   (c) $\operatorname{Log}[(1 + i)^2] = 2 \operatorname{Log}(1 + i)$.
   (d) $\operatorname{Log}[(-1 + i)^2] \neq 2 \operatorname{Log}(-1 + i)$.

6. Sea $G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo par de números complejos z_1, $z_2 \in G$ tales que $z_1 \cdot z_2 \in G$, se cumple la identidad

$$\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2N\pi i,$$

   con $N \in \{-1, 0, 1\}$. Probar que si z_1 y z_2 pertenecen al primer cuadrante entonces $N = 0$.

7. La función $\operatorname{Log}(z - i)$ es analítica en todas partes salvo en la semirecta $\{z = x + i \,:\, x \leq 0\}$.

8. Hallar *todos* los valores de

$$(1 + i)^i; \qquad (-1)^{1/\pi}.$$

9. Hallar el valor principal de

$$i^{-i}; \qquad [(e/2)(-1 - \sqrt{3}i)]^{3\pi i}; \qquad (1 - i)^{4i}.$$

10. Dar la rama principal de $\sqrt{1 - z}$.

11. Dar un ejemplo de una función analítica f no constante en una region Ω tal que sus ceros se acumulen en un punto fuera de Ω.

12. Sea $f(z) = \operatorname{sen} z$. Hallar el $\max\{|f(z)| : z \in K\}$, donde $k = \{x + iy : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

13. Sean f, g analíticas en Ω. Probar que si $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$ en Ω.

14. Probar que si f en entera y $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Ejercicios adicionales

15. Considere la función $f(z) = \operatorname{sen} z$, y la región del plano complejo dada por

$$B = \{z = x + iy : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ y \geq 0\}.$$

   (a) Verificar que f manda la frontera de B inyectivamente sobre el eje real $\operatorname{Im}(z) = 0$.

   (b) Calcular y graficar las imágenes por f de una semirrecta vertical $x = c$, $y \geq 0$, interior a la banda $\{x + iy : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$.

   (c) Probar que f manda B inyectivamente en la clausura del semiplano superior.

   (d) ¿Cuál es la imagen por f de una región rectangular $-\pi \leq x \leq \pi$, $a \leq y \leq b$ ubicada en el semiplano superior?

16. Sea f una función entera tal que $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Probar que $f(z) = \operatorname{sen} z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

17. Si f es una función entera tal que $f' = f$ y $f(0) = 1$, ¿qué se puede decir de f?

18. Enunciar y probar la *Regla de L'Hospital* para funciones analíticas. (Para la prueba desarrollar en serie numerador y denominador.)

19. ¿Existe una función entera, no idénticamente nula, con una cantidad no numerable de ceros?

20. Probar que si f es entera y $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ para tod $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.