

PRÁCTICO 7

Residuos e integrales reales

1. Calcular, en cada caso, el residuo en $z = 0$:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^3}; \quad \frac{\cos z}{z^6}; \quad \frac{e^{z+1}}{z^3}.$$

2. Calcular las siguientes integrales, donde $\gamma(t) = e^{i4\pi t}$ con $0 \leq t \leq 1$:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz; \quad \int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z^6} dz; \quad \int_{C(0,1)} \frac{e^{z+1}}{z^3} dz.$$

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz; \quad \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^6} dz; \quad \int_{\gamma} \frac{e^{z+1}}{z^3} dz.$$

3. Calcular, en cada caso, el residuo en $z = 0$:

$$\operatorname{cosec}^2 z; \quad \frac{\operatorname{cosec}(z^2)}{z^3}; \quad z \cos(1/z).$$

4. Calcular las siguientes integrales reales usando residuos.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx.$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4} dx, \quad a > 0.$

(e) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$

(f) $\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} \theta)^{2n} d\theta.$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(ax)}{x^4 + 4} dx, \quad a > 0.$

5. Calcular, en cada caso, el residuo en $z = 0$:

$$\operatorname{cosec}^2 z; \quad \frac{\operatorname{cosec}(z^2)}{z^3}; \quad z \cos(1/z).$$

6. Probar que $u \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{1 + x^2} dx = \pi e^{-|u|}.$$