PRÁCTICO 8

Transformaciones de Möbius

1. Consideremos la trasformación de Möbius $T(z) = (1+z)/(1-z)$.
   (a) Escribir la inversa de T.
   (b) Mostrar que T lleva la región dada por $|z| < 1$ sobre la región $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| = 1$ sobre $\{z : \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\infty\}$ y $|z| > 1$ sobre $\operatorname{Re} z < 0$.
2. Probar que la inversa de una transformación de Möbius y la composición de dos transformaciones de Möbius, son transformaciones de Möbius.
3. Encontrar trasformaciones de Möbius que lleven:
   (a) $1, i, -1$ en $1, 0, -1$ respectivamente.
   (b) $1, i, -1$ en $-1, i, 1$ respectivamente.
4. Sean z_1, z_2, z_3 tres números complejos distintos.
   (a) Probar que hay una única transformación de Möbius T tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$.
   (b) Probar que el enunciado anterior sigue valiendo si alguno de los puntos z_1, z_2 o z_3 es igual a ∞.
   (c) Probar que dadas dos 3-uplas de puntos distintos del plano extendido $\hat{\mathbb{C}}$, (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3), existe una única tranformación de Möbius T con $T(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$.
5. Sean T y S las transformaciones de Möbius dadas por $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ y $S(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$.
   (a) Probar que $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ si y sólo si podemos elegir a, b, c, d reales.
   (b) Dar condiciones necesarias y suficientes para que $T(S^1) = S^1$.
   (c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que $T(D) = D$.
   (d) Probar que $T = S$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo tal que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
   (e) Si z_1, z_2 son puntos fijos de T, probar que $S^{-1}TS$ tiene puntos fijos $S^{-1}z_1, S^{-1}z_2$.
6. Sea T una transformación de Möbius. Probar que:
   (a) T tiene a 0 y a ∞ como sus único puntos fijos si y sólo si T es una dilatación distinta de la identidad.
   (b) T tiene a ∞ como su único punto fijo si y sólo si es una traslación distinta de la identidad.
   (c) T satisface $T(0) = \infty$ y $T(\infty) = 0$ si y sólo si $T(z) = az^{-1}$ para algún $a \in \mathbb{C}^\times$.