Elementos de Funciones Complejas 22 de octubre de 2019

Nombre y Apellido:

Segundo Parcial

Ejercicio 1 (ptos). Calcular $\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz$ para:

(a) $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\gamma(t) = 2e^{it}$ para $-\pi \leq t \leq \pi$.

Ejercicio 2 (ptos). Usando la Fórmula integral de Cauchy para una función analítica y sus derivadas, evaluar las siguientes integrales:

$$\int_{C(i,2)} \frac{e^{z-1}+1}{z-1}\, dz; \qquad \int_{C(i,2)} \frac{e^{z-1}+1}{(z-1)^2}\, dz; \qquad \int_{C(i,2)} \frac{e^{z-1}+1}{(z-1)^3}\, dz.$$

Ejercicio 3 (ptos). En cada caso escribir el desarrollo en serie de la función $f(z)$ alrededor de z_0, e indicar la región de validez de ese desarrollo:

(a) $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$.

(b) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1$.

(c) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = 0$.

(d) $f(z) = z^2 - z + 2$, $z_0 = i$.

Ejercicio 4 (24 ptos). Verdadero o falso.

(a) Si f es analítica en Ω, entonces $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo camino γ en Ω.

(b) Si f es analítica en un semiplano, entonces $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo camino γ en ese semiplano.

(c) El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n$ es infinito.

(d) El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$ es 1.

Ejercicio 5 (20 ptos). Enunciar de manera precisa y completa los siguientes Teoremas, explicando todos los objetos que aparecen en el enunciado que crea necesario.

(a) El Teorema de Cauchy para triángulos.

(b) El Teorema de Morera.