1. Magnitudes

1. (Repaso)
(a) Recordar la definición de *supremo* e *ínfimo* de un subconjunto de $\mathbb{R}$. Enunciar el *Axioma del supremo* y la correspondiente versión para el ínfimo.
(b) Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$, determinar $\sup A$.

2. (Repaso) Sean A y B subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$, y x un número real.
(a) Calcular $A + B$ y xA en los siguientes casos:

(i) $A = [-1, 1),\ B = [-2, 2],\ x = \frac{1}{2}$,
(ii) $A = [-1, 1],\ B = [-2, 2],\ x = -\frac{1}{2}$,
(iii) $A = [-2, 2],\ B = \{-1, 1\},\ x = 0$
(iv) $A = \{-1, 3, 7\},\ B = \{-2, 0, 2, 5\}$.

(b) Si A y B son no vacíos y acotados superiormente, demostrar que
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$
¿Existe alguna relación entre $\sup(xA)$ y $x \sup(A)$?
(c) Sea A no vacío y acotado superiormente y considere el conjunto B de todas las cotas superiores de A. Probar que
$$\sup(A) = \inf(B).$$

3. (a) Probar que $m\,(n\,\overline{ab}) = (mn)\,\overline{ab} = n\,(m\,\overline{ab})$, para $m, n \in \mathbb{N}$.
(b) Enunciar la definición de *producto* entre un racional positivo y un segmento, y responder las siguientes preguntas:
(i) ¿Por qué $\frac{1}{n}\,(n\,\overline{ab}) = \overline{ab}$ y $n\,(\frac{1}{n}\,\overline{ab}) = \overline{ab}$? $(n \in \mathbb{N})$
(ii) ¿Por qué $m\,(\frac{1}{n}\,\overline{ab}) = \frac{1}{n}\,(m\,\overline{ab})$? $(m, n \in \mathbb{N})$

4. Sean $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ dos segmentos y $x \in \mathbb{Q}$ tales que $x\,\overline{ab} = x\,\overline{cd}$. ¿Qué relación existe entre los dos segmentos; son iguales o congruentes?

5. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones:
(a) Si $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$ y $x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ entonces $x\,\overline{ab} = x\,\overline{cd}$; es decir, la definición de la multiplicación $x\,\overline{ab}$ no depende del segmento sino de su clase de congruencia.
(b) Si $x = \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ entonces $\frac{p}{q}\,\overline{ab} = \frac{r}{s}\,\overline{ab}$, de modo que la definición sólo depende de x y no de la forma de escribirlo como cociente de números naturales.

6. Demostrar que $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ y para A y B segmentos, se cumplen las siguientes propiedades del producto:

(a) $(x + y)\,A = x\,A + y\,A$,
(b) $x\,(A + B) = x\,A + x\,B$,
(c) $(xy)\,A = x\,(y\,A)$,
(d) $x\,A = B \iff A = \frac{1}{x}\,B$,
(e) $A \leq B \iff x\,A \leq x\,B$,
(f) $x \leq y \iff x\,A \leq y\,A$,
(g) $|x\,A| = x\,|A|$, $\forall x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

7. Demostrar que si U es el segmento unidad en π entonces $|U| = 1$.

8. Demostrar que $K_{T(\overline{ab})} = K_{\overline{ab}}$, donde los conjuntos K son los definidos en el teórico.

9. Probar que si un segmento $\overline{ab}$ es menor que otro $\overline{pq}$, entonces $|\overline{ab}| < |\overline{pq}|$. Recíprocamente, si la longitud de un segmento $\overline{ab}$ es menor que la de otro $\overline{pq}$, entonces $\overline{ab} < \overline{pq}$.

10. Recordemos que la distancia entre dos puntos del plano se define como la longitud del segmento que une dichos puntos. Demostrar las siguientes tres propiedades que caracterizan a la función distancia. Para todo $p, q, r \in \pi$:
(a) $d(p, q) \geq 0$ y $d(p, q) = 0 \iff p = q$;
(b) $d(p, q) = d(q, p)$;
(c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

11. Demostrar que en todo triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y mayor que su diferencia. Más precisamente: si $\triangle abc$ es un triángulo, entonces $|\overline{ac}| + |\overline{cb}| \geq |\overline{ab}| \geq \big|\, |\overline{ac}| - |\overline{cb}| \,\big|$.

2. Thales - Pitágoras - Ceva

12. Demostrar que toda paralela a un lado del triángulo determina sobre los otros dos, o sus prolongaciones, segmentos proporcionales.
Recíprocamente, probar que si una recta corta a dos lados de un triángulo, o a sus prolongaciones, determinando segmentos proporcionales a ellos, es paralela al tercer lado.

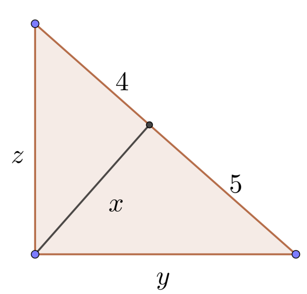
13. Dados un segmento de longitud x y un segmento de longitud y, construir con regla y compás un segmento de longitud xy y otro segmento de longitud x/y.

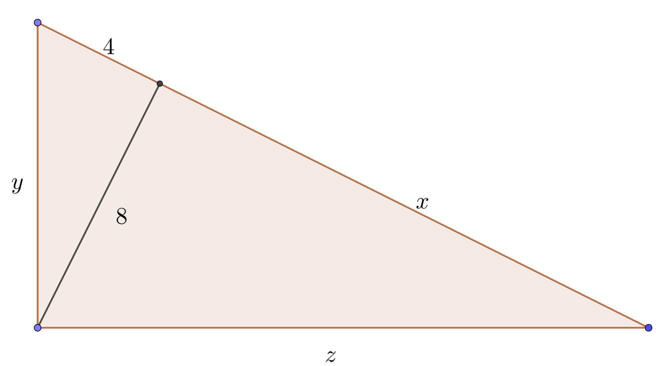
14. Sea $abcd$ un trapecio con $\overline{ad} \parallel \overline{bc}$. Demostrar que las diagonales se dividen mutuamente en partes proporcionales a las bases: esto es, si o es la intersección de las diagonales, probar que

$$\frac{|\overline{co}|}{|\overline{oa}|} = \frac{|\overline{bc}|}{|\overline{ad}|} = \frac{|\overline{bo}|}{|\overline{od}|}.$$

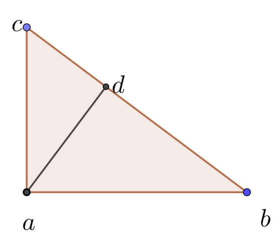
15. Calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1.

16. Dados los siguientes triángulos rectángulos, donde se ha marcado la altura correspondiente a la hipotenusa y las longitudes de algunos segmentos, determinar las longitudes no conocidas.





17. El triángulo $\triangle abc$ es rectángulo, con $\hat{a}$ recto. Si $|\overline{ab}| = x$, $|\overline{ac}| = y$ y d es el pie de la altura correspondiente a la hipotenusa, determinar $|\overline{ad}|$.



18. Demostrar el *Teorema de Ceva*:
En un triángulo $\triangle abc$, las cevianas $\overline{ad}$, $\overline{be}$ y $\overline{cf}$ son concurrentes (i.e., se intersecan en un punto) si y solamente si

$$\frac{|\overline{af}|}{|\overline{fb}|} \cdot \frac{|\overline{bd}|}{|\overline{dc}|} \cdot \frac{|\overline{ce}|}{|\overline{ea}|} = 1.$$

[Sugerencia: usar el teorema de Menelao.]

19. Probar el *Teorema de la bisectriz*: Cada bisectriz de un ángulo interior a un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.
Recíprocamente, si en un triángulo $\triangle abc$ una ceviana $\overline{ax}$, $x \in \overline{bc}$, divide al lado $\overline{bc}$ en segmentos proporcionales a los lados adyacentes, entonces $\overrightarrow{ax}$ es la bisectriz del ángulo $\angle bac$.

20. Probar usando el Teorema de Ceva que
(a) las medianas de un triángulo son concurrentes;
(b) las bisectrices también; [Sugerencia: usar el ejercicio anterior.]
(c) las alturas también.

21. Probar el *Teorema de Gergonne*: Si d, e, f son los puntos donde la circunferencia inscripta al triángulo $\triangle abc$ toca a los lados, entonces las rectas $\overleftrightarrow{ad}$, $\overleftrightarrow{be}$ y $\overleftrightarrow{cf}$ son concurrentes. Este punto de intersección es conocido como el *punto de Gergonne*.

22. Probar la siguiente versión del Teorema de Menelao y compararla con el Teorema de Ceva.
Sean tres puntos f, d y e respectivamente en las rectas que contienen a los lados $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, y $\overline{ac}$ del triángulo $\triangle abc$, de manera que $f \in \overline{ab}$, $d \in \overline{bc}$ y $e \notin \overline{ac}$. Entonces, los tres puntos f, d y e son colineales si y solamente si

$$\frac{|\overline{af}|}{|\overline{bf}|} \cdot \frac{|\overline{bd}|}{|\overline{cd}|} \cdot \frac{|\overline{ce}|}{|\overline{ae}|} = 1.$$

23. Sea A una recta y $p \in \Pi$. En el teórico se definió la distancia de p a A como $d(p, A) = d(p, x)$, donde x es el pie de la perpendicular a A por p.
(a) Demostrar que: $d(p, A) = \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$.
(b) Dado $d \geq 0$, describir el lugar geométrico de los puntos p tales que $d(p, A) = d$.

24. Dado un ángulo A, determinar $\operatorname{sen}(2A)$, $\cos(2A)$, $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}A)$ y $\cos(\frac{1}{2}A)$, en términos de $\operatorname{sen}(A)$ y $\cos(A)$.

25. Probar la recíproca del Teorema de Pitágoras: Si en el triángulo $\triangle abc$ vale que $|\overline{ab}|^2 = |\overline{ac}|^2 + |\overline{bc}|^2$, entonces el ángulo $\hat{c}$ es recto. [Sugerencia: usar el teorema del coseno.]

26. Sea $abcd$ un cuadrilátero convexo. Probar que las diagonales $\overline{ac}$ y $\overline{bd}$ son perpendiculares si y sólo si $|\overline{ab}|^2 + |\overline{cd}|^2 = |\overline{ad}|^2 + |\overline{bc}|^2$. [Sugerencia: usar el teorema del coseno.]

27. *Transformaciones rígidas en coordenadas en $\mathbb{R}^2$:*
Consideramos como plano euclídeo $\pi = \mathbb{R}^2$. Dados un punto $p = (x_0, y_0)$, otro punto $o = (o_1, o_2)$, una recta A de la forma $ax + by = c$ y un vector $\overrightarrow{v} = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big)$, hallar

(a) $L_{\overrightarrow{v}}(p)$
(b) $S_o(p)$
(c) $S_A(p)$.
(d) $R_{o,\alpha}(p)$.