Topología

Práctico N°0: Operaciones entre conjuntos. Funciones: imágenes y preimágenes. Relaciones

1. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(b) $A \subseteq B \cap C \iff A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.
(c) $A \subseteq B \iff B^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}}$.
(d) $A \smallsetminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$.
(e) $(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$, $(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$ (Leyes de De Morgan)

2. Sea $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
(e) $f^{-1}(C^{\mathsf{c}}) = [f^{-1}(C)]^{\mathsf{c}}$.
(f) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).
(g) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es sobreyectiva).

En todos los items donde probó alguna inclusión, busque ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.

3. Sea $f : X \to Y$, con $X \neq \emptyset$. Probar que:

(a) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. ($\mathrm{id}_X : X \to X$ es la función identidad de X, esto es, $\mathrm{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$).
(b) f es suryectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Deducir que f es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

4. Sea $f : A \to B$ suryectiva.

(a) Probar que $R := \{\langle x, y\rangle : f(x) = f(y)\}$ es una relación de equivalencia.
(b) Sea $g : A/R \to B$ dada por $g([a]) := f(a)$. Probar que g está bien definida y que es biyectiva.

5. Sea R un preorden sobre A.

(a) Probar que la relación $x \sim y$ definida como $x \; R \; y \wedge y \; R \; x$ es de equivalencia sobre A.
(b) Sea $\bar{R}$ la relación sobre $A/{\sim}$ dada por

$$[a] \; \bar{R} \; [b] \Leftrightarrow a \; R \; b,$$

para $a, b \in A$. Probar que $\bar{R}$ está bien definida y que es un orden parcial sobre $A/{\sim}$.

Ejercicios Extra

6. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

(b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \smallsetminus A)$ y $A \cap (B \smallsetminus A) = \emptyset$.

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(e) $A \cup B \subseteq C \Longleftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

7. Sea $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:

(a) Si f es inyectiva entonces $f(A^{\mathsf{c}}) \subseteq [f(A)]^{\mathsf{c}}$.

(b) Si f es sobreyectiva entonces $[f(A)]^{\mathsf{c}} \subseteq f(A^{\mathsf{c}})$.

8. Probar que para todo conjunto no vacío Y, $\subseteq$ es un orden parcial laxo sobre $\mathcal{P}(Y)$.

9. Encontrar un ejemplo natural de orden dirigido hacia arriba que no sea dirigido hacia abajo.