Topología

Práctico N°1: Espacios topológicos. Espacios métricos. Subespacios.

1. Hallar todas las topologías en $\{a, b\}$ y en $\{a, b, c\}$.

2. Probar que las siguientes son topologías en el conjunto X.

(a) $\tau = \{A \subseteq X : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.
(b) $\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$, con $x_0 \in X$.
(c) $\tau_{-x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{X\}$, con $x_0 \in X$.

3. (a) Probar que las siguientes son topologías en $\mathbb{R}$.

- $\tau_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{ para cada } x \in A \; \exists b \in \mathbb{R} \text{ con } [x, b) \subseteq A\}$.
- $\tau_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{ para cada } x \in A \; \exists b \in \mathbb{R} \text{ con } (b, x] \subseteq A\}$.
- $\tau_3 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- $\tau_4 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(b) Si en τ_3 y en τ_4 cambiamos la condición “$a \in \mathbb{R}$” por “$a \in \mathbb{Q}$”, ¿siguen siendo τ_3 y τ_4 topologías en $\mathbb{R}$?

(c) Verificar que $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base de τ_1. Mostrar que los elementos de esta base son abiertos y cerrados.

4. Para cada una de las topologías de los dos ejercicios anteriores, decidir si son T_1 o T_2.

5. Sea $E_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ y sea $\tau = \{E_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.

(a) Probar que τ es una topología en $\mathbb{N}$.
(b) Para $A = \{3, 4, 19\}$ dar A° y $\overline{A}$.
(c) Determinar los conjuntos cerrados en $(\mathbb{N}, \tau)$.
(d) Determinar los conjuntos densos en $(\mathbb{N}, \tau)$.

6. Considerar en $\mathbb{R}^n$ la métrica euclideana. Probar que

(a) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^3$.
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}^c$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \; 0 < y < 1, \; x \neq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

7. Sea $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que

$$d_1(f, g) = \text{máx}\{|f(t) - g(t)| : t \in [0, 1]\} \qquad \text{y} \qquad d_2(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt$$

son métricas en $C[a, b]$. ¿Vale la misma afirmación sobre d_2 si continuidad se reemplaza por integrabilidad? ¿Son comparables estas dos métricas?

8. (a) Sea (E, d) un espacio métrico y sea $\emptyset \neq A \subseteq E$. Probar que $(A, d|_{A \times A})$ es un espacio métrico.

(b) Sea d la métrica euclídea en $\mathbb{R}$. Probar que $[0,1)$ es abierto en $[0,2]$ con la métrica restringida. Estudiar los abiertos de $(\mathbb{Z}, d|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$.

9. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual y sean

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = \frac{1}{2^n} \text{ con } n \in \mathbb{N}, y \in [0,1]\}, \qquad B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}.$$

Decidir si A abierto o cerrado. Dar $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\mathrm{Fr}(A)$ y $\mathrm{Fr}(B)$.

10. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología τ_2 del Ejercicio 3.

(a) Probar que $\{(a,b] :\ a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base se τ_2.

(b) Sean $A = [1,2]$, $B = \{0\}$, $C = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ y $D = [0,\infty)$. Dar A°, $\overline{B}$, $\mathrm{Fr}(A \cup B)$, D°, $\mathrm{Fr}(D)$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ y C°.

11. Sean A, B, A_i, $i \in I$ (I un conjunto arbitrario) subconjuntos de un espacio topológico X. Decidir si las siguientes igualdades son válidas. En caso que no lo sean, decidir si alguna de las inclusiones $\subseteq$ o $\supseteq$ vale.

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}, \qquad \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} A_i}, \qquad \overline{A} - \overline{B} = \overline{A - B}.$$

12. Dado un espacio métrico (X,d) y $A \subseteq X$ no vacío, el *diámetro* de A es

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{a,b\in A} d(a,b).$$

Si $B \subseteq X$, también no vacío, definimos la distancia entre A y B como:

$$d(A,B) = \inf_{a\in A,\, b\in B} d(a,b).$$

Así, si $x \in X$ y tomamos $B = \{x\}$ se tiene $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$. Probar que:

(a) $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x,A) = 0$.

(b) La desigualdad $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ puede no valer (dar un ejemplo). Sin embargo, probar que

$$d(A,B) \leq d(A,C) + \mathrm{diam}(C) + d(C,B).$$

(c) Existen A, B tales que $d(A,B) = 0$ y $A \cap B = \varnothing$.

(d) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ para todo par $x,y \in X$ y todo $A \subset X$.

13. Sea $X = \mathbb{R}$ y τ_1 como en el Ejercicio 3. Probar que

(a) Los miembros de la base son simultáneamente abiertos y cerrados.

(b) El espacio (X,τ_1) es separable y N_1 pero no es N_2.

(c) Todo subespacio de (X,τ) es separable.

14. Sea $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea τ la topología generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, con $A = [a,b)$, $B = [c,d)$. Probar que

(a) (X,τ) es separable.

(b) (X, τ) contiene un subespacio cerrado que no es separable.

15. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Consideramos la familia $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ dada por:

- bolas abiertas contenidas en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$,
- $V_{x_0,r} := \{(x_0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, r)\| < r\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Esto es, bolas abiertas tangentes al eje x de radio arbitrario, a las cuales se les agrega el punto de tangencia.

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $\mathcal{U}$ es una base para una topología en X.

(b) $(X,\mathcal{U})$ es separable y T_2 pero no es N_2.

16. Topología del orden. Sea X un conjunto ordenado por una relación $<$ irreflexiva. La *topología del orden* tiene como sub-base a los conjuntos de la forma $\{x : x < a\}$ ó $\{x : a < x\}$ para algún $a \in X$.

(a) Probar que la topología del orden es la mínima topología en la cual el orden es "abierto". Esto es: si $a, b \in X$ con $a < b$, entonces existen entornos U de a y V de b tales que si $x \in U$, $y \in V$ se tiene que $x < y$.

(b) ¿Cuál es la topología del orden de $\mathbb{R}$?

(c) Sea X un conjunto ordenado e Y un subconjunto de X (hereda el mismo orden). Probar que la topología del orden de Y puede no ser la topología relativa de X.

17. Definimos en $\mathbb{R}^2$ el *orden lexicográfico*: $(a, b) < (c, d)$ si $a < c$, ó $a = c$ y $b < d$. Sea τ la topología del orden en $\mathbb{R}^2$. Analizar cuáles son los abiertos de esta topología y decidir si es T_2.