Vamos a llamar $A \times A$ al producto cartesiano de A por A, es decir al conjunto

$$A \times A := \{(x, y) : x \in A, y \in A\}.$$

Una **relación** $\mathcal{R}$ es un subconjunto de $A \times A$, es decir una relación de A es un conjunto donde sus elementos son pares ordenados de $A \times A$. La relación $\mathcal{R}$ se dice:

- Reflexiva: si para todo elemento x de A, vale que el par ordenado (x, x) está en $\mathcal{R}$ (o sea $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in A$).

- Simétrica: si para cada par ordenado (x, y) en $\mathcal{R}$, vale que (y, x) también está en $\mathcal{R}$ (o sea $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$).

- Antisimétrica: si para cada par ordenado (x, y) en $\mathcal{R}$ tal que $x \neq y$, vale que (y, x) no está en $\mathcal{R}$ (o sea $(x, y) \in \mathcal{R}$ tales que $x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin \mathcal{R}$). Equivalentemente, $\mathcal{R}$ se dice antisimétrica si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x \neq y$

- Transitiva: si cada vez que $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$ (o sea $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$).

- de equivalencia: si es reflexiva, simétrica y transitiva.

- de orden: si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejercicios resueltos de relaciones

20. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada una de las siguientes relaciones representadas gráficamente determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

    En este ejercicio, la relación $\mathcal{R}$ está dada por las flechas, es decir si en el dibujo hay una flecha $x \to y$, significa que el par ordenado (x, y) está en $\mathcal{R}$.

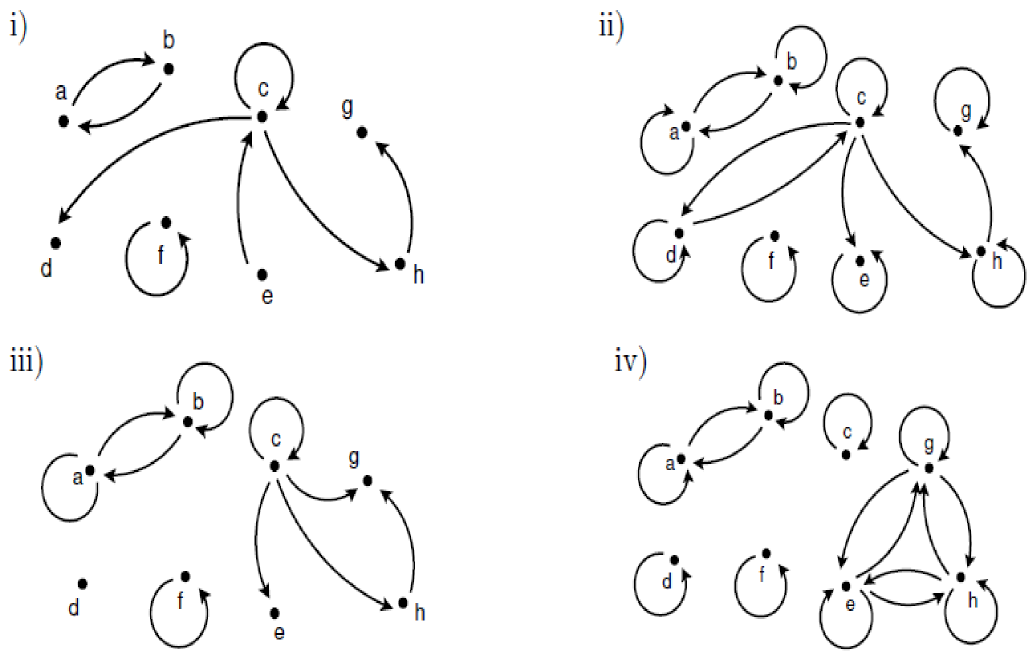
20.i) En este ejercicio la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ es el siguiente subconjunto de $A \times A$:

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (c, h), (h, g), (e, c), (f, f)\} \subset A \times A,$$

notemos que $\mathcal{R}$ tiene 8 elementos pues en el gráfico hay 8 flechas.

- **¿$\mathcal{R}$ es reflexiva?:** Si lo fuera, debería pasar que para todo elemento x en A, (x, x) también esté en $\mathcal{R}$. Para probar que **no** es reflexiva, alcanza con dar un ejemplo de un elemento de A que no cumpla eso. Por ejemplo, como $a \in A$ y $(a, a) \notin \mathcal{R}$, entonces podemos asegurar que $\mathcal{R}$ no es reflexiva.

- **¿$\mathcal{R}$ es simétrica?:** Si lo fuera, deberíamos ver que para cada par $(x, y) \in \mathcal{R}$, pase que (y, x) también esté en $\mathcal{R}$. Para probar que **no** es simétrica, alcanza con dar un ejemplo de un par ordenado tal que $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \notin \mathcal{R}$. En este caso, $\mathcal{R}$ no es simétrica, pues $(h, g) \in \mathcal{R}$ y $(g, h) \notin \mathcal{R}$.



- **¿$\mathcal{R}$ es antisimétrica?:** Si lo fuera, deberíamos ver que para cada par $(x,y) \in \mathcal{R}$, tal que $x \neq y$ pase que (y,x) no esté en $\mathcal{R}$. Para probar que **no** es antisimétrica, alcanza con dar un ejemplo de un par ordenado tal que $(x,y) \in \mathcal{R}$ y $(y,x) \in \mathcal{R}$. En este caso, $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, pues $(h,g) \in \mathcal{R}$ y $(g,h) \notin \mathcal{R}$.

- **¿$\mathcal{R}$ es transitiva?:** Si lo fuera, deberíamos ver que si $(x,y) \in \mathcal{R}$ y $(y,z) \in \mathcal{R}$, entonces $(x,z) \in \mathcal{R}$. Para probar que **no** es transitiva, alcanza con dar un ejemplo de $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}$ y $(x,z) \notin \mathcal{R}$. En este caso, $\mathcal{R}$ no es simétrica, pues $(e,c),(c,h) \in \mathcal{R}$ y $(e,h) \notin \mathcal{R}$.

23. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

23.f) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$.

Recordemos que el conjunto A es partes de $\mathbb{R}$, es decir, A está formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. La relación $\mathcal{R}$ está dada por

$$\mathcal{R} = \{(X,Y) \in A \times A : X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}\}.$$

- $\mathcal{R}$ es **reflexiva** pues para todo $X \in A$ (es decir $X \subseteq \mathbb{R}$), se cumple que

$$X \cap \{1,2,3\} = X \cap \{1,2,3\},$$

en particular vale que

$$X \cap \{1,2,3\} \subseteq X \cap \{1,2,3\},$$

por lo que el par $(X,X) \in \mathcal{R}$, para todo $X \in A$.

- $\mathcal{R}$ no es **simétrica** pues si tomamos por ejemplo $X := \{1\}, Y := \{1,2\} \in A$, tenemos que

$$X \cap \{1,2,3\} = \{1\} \subseteq \{1,2\} = Y \cap \{1,2,3\},$$

esto implica que el par $(X,Y) \in \mathcal{R}$, es decir $(\{1\},\{1,2\}) \in \mathcal{R}$. Pero como además pasa que

$$Y \cap \{1,2,3\} = \{1,2\} \nsubseteq \{1\} = X \cap \{1,2,3\},$$

entonces el par ordenado $(Y,X) \notin \mathcal{R}$, es decir $(\{1,2\},\{1\}) \notin \mathcal{R}$. Por lo tanto la relación no es simétrica.

- $\mathcal{R}$ no es **antisimétrica** pues si tomamos por ejemplo $X := \{1,5\}, Y := \{1,6\} \in A$, tenemos que

$$X \cap \{1,2,3\} = \{1\} \subseteq \{1\} = Y \cap \{1,2,3\}, \qquad Y \cap \{1,2,3\} = \{1\} \subseteq \{1\} = X \cap \{1,2,3\},$$

esto implica que los pares $(X,Y),(Y,X) \in \mathcal{R}$, es decir $(\{1,5\},\{1,6\}),(\{1,6\},\{1,5\}) \in \mathcal{R}$, donde $\{1,5\} \neq \{1,6\}$, luego no puede ser antisimétrica.

- $\mathcal{R}$ es **transitiva**, pues si tenemos $(X,Y),(Y,Z) \in \mathcal{R}$, por definición de la relación se debe cumplir que

$$X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}, \qquad Y \cap \{1,2,3\} \subseteq Z \cap \{1,2,3\},$$

pero por transitividad de la contención de subconjuntos de $\mathbb{R}$, vale que

$$X \cap \{1,2,3\} \subseteq Z \cap \{1,2,3\},$$

es decir $(X,Z) \in \mathcal{R}$

- La relación $\mathcal{R}$ no es **de equivalencia** (pues no es simétrica) y no es **de orden** pues no es (antisimétrica).

25. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$

hallar la clase $\bar{a}$ de a, la clase $\bar{b}$ de b, la clase $\bar{c}$ de c, la clase $\bar{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A, definimos a la clase $\bar{a}$ de a como

$$\bar{a} := \{x \in A : (a,x) \in \mathcal{R}\}.$$

En este caso, en $\mathcal{R}$ están los elementos $(a,a),(a,b),(a,f)$. Es decir

$$\bar{a} = \{a,b,f\}.$$

Notar que como la relación es de equivalencia, es simétrica. Por lo tanto es lo mismo ver si $(a,x) \in \mathcal{R}$ que $(x,a) \in \mathcal{R}$.

Del mismo modo, obtenemos que

$$\bar{b} = \{a,b,f\}, \ \ \bar{c} = \{c,e\}, \ \ \bar{d} = \{d\}, \ \ \bar{e} = \{c,e\}, \ \ \bar{f} = \{a,b,f\}.$$

O sea, $\bar{a} = \bar{b} = \bar{f}$ y $\bar{c} = \bar{e}$. Luego, la partición asociada a $\mathcal{R}$ es $\{\bar{a},\bar{c},\bar{d}\}$.

30. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los siguientes casos:

Para que una relación sea una función, debe pasar que cada vez que $(x,y),(x,z) \in \mathcal{R}$, entonces $y = z$. Es decir, un x no puede ir a dos números distintos.

30.a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$

En este caso, $\mathcal{R}$ no es función pues $(3,a) \in \mathcal{R}$ y $(3,d) \in \mathcal{R}$, pero $a \neq d$.