Ejercicio 3: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar por inducción que:

(a) $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c$

(b) $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$.

Solución:

(a) Caso base: como es una afirmación que hay que probar para todos los naturales, el caso base es $n = 1$, que en este caso se satisface trivialmente, ya que vale la igualdad $A_1^c = A_1^c$. (Notemos también que el caso $n = 2$ lo sabemos gracias a la Ley de Morgan, vista en el cursillo). Paso iductivo: Supongamos que la afirmación es válida para k, es decir, que $(A_1 \cap \cdots \cap A_k)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_k^c$ (donde k es ahora un número fijo) y veamos que vale para $k+1$. Es decir, quiero ver que se satisface que $(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1})^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_{k+1}^c$.

Para ver la igualdad deseada, vamos a comenzar por el miembro izquierdo y mediante operaciones válidas llegaremos al miembro derecho.

$(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1})^c = ((A_1 \cap \cdots \cap A_k) \cap A_{k+1})^c = (A_1 \cap \ldots \cap A_k)^c \cup A_{k+1}^c$, por la Ley de Morgan (tomando $A = (A_1 \cap \ldots \cap A_k)$ y $B = A_{k+1}$). Ahora, por hipótesis inductiva, tenemos que $(A_1 \cap \ldots \cap A_k)^c \cup A_{k+1}^c = A_1^c \cup \cdots \cup A_k^c \cup A_{k+1}^c$ y por lo tanto

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1})^c = A_1^c \cup \cdots \cup A_{n+1}^c$$

Ejercicio 8: Demostrar por inducción que las siguientes igualdades se verifican para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$: c es constante.

Solución: En este ejercicio no usaremos la letra “k” como en el ejercicio anterior, ya que dicha letra es utilizada para el índice de la sumatoria. Entonces, para la resolución usaremos en su lugar la letra “m”

(a) Caso base ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1}(a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k$$

Paso inductivo: Suponemos que la afirmación es válida para un m natural (fijo) (esta es la hipótesis inductiva), queremos que valga para $m + 1$. Por definición de sumatoria se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m+1}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k) + (a_{m+1} + b_{m+1}).$$

Por hipótesis inductiva (en el primer paso de la ecuación de abajo), se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)+(a_{m+1}+b_{m+1}) &= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k + (a_{m+1}+b_{m+1}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k + b_{m+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} a_k + \sum_{k=1}^{m+1} b_k\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{m+1}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{m+1} a_k + \sum_{k=1}^{m+1} b_k,$$

que es lo que queríamos ver. Por lo tanto la afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Caso base ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1} ca_k = ca_1 = c\sum_{k=1}^{1} a_k$$

Paso inductivo: Suponemos que la afirmación es válida para un m natural (fijo) (esta es la hipótesis inductiva), queremos que valga para $m+1$. Por definición de sumatoria, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m+1} ca_k = \sum_{k=1}^{m} ca_k + ca_{m+1}.$$

Por hipótesis inductiva, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m} ca_k = c\sum_{k=1}^{m} a_k$$

Luego, combinando las dos igualdades se llega a que

$$\sum_{k=1}^{m+1} ca_k = c\sum_{k=1}^{m} a_k + ca_{m+1} = c\left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right) = c\sum_{k=1}^{m+1} a_k,$$

donde la segunda igualdad vale por el axioma de distribución y la última igualdad vale por definición de sumatoria. Mirando los extremos de la igualdad se prueba lo que queríamos ver. Por lo tanto la afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11: Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

(a) $2n-1 \leq n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(c) $n^3 \leq 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

(a) Queremos ver que $2n-1 \leq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (y lo queremos probar por inducción). Como el número más chico para el cual queremos probar la afirmación es el 1, entonces este será nuestro caso base.

Caso base: $2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \leq 1^2$. Luego, $2 \cdot 1 - 1 \leq 1^2$

Paso inductivo: Supongamos que la afirmación es válida para un k (HI) y veamos que entonces valdrá para $k+1$. Es decir, suponiendo que es cierto que $2k-1 \leq k^2$ queremos probar que $2(k+1)-1 \leq (k+1)^2$. Para esto, es muy común partir del lado izquierdo de la inecuación que queremos probar y vamos a llegar al lado derecho (usando en el medio la HI y siempre los símbolos $=$ ó $\leq$)

$$2(k+1)-1 = 2k+2-1 = (2k-1)+2 \leq k^2+2,$$

(Nota que al último estamos usando la HI). Luego, continuando tenemos que

$$k^2+2 \leq k^2+2k \leq k^2+2k+1 = (k+1)^2$$

Luego,

$$2(k+1)-1 \leq (k+1)^2$$

Por lo tanto, como hemos verificado que se cumple el caso base y que vale el paso inductivo, entonces ahora la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Queremos que $n^3 \leq 3^n$ para todo $n \geq 3$. Como el número más chico para el cual queremos probar la afirmación es el 3, entonces este será nuestro caso base.

Caso base: $3^3 \leq 3^3$ (se verifica trivialmente)

Paso inductivo: Supongamos que la afirmación vale para k y veamos que se cumple para $k+1$. Es decir, quiero ver que se cumple que $(k+1)^3 \leq 3^{k+1}$, asumiendo que vale que $k \leq 3^k$ (HI) (donde ahora el k es un número≥ 3 arbitrario fijo)

$$(\star) \qquad (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \leq 3^k + 3k^2 + 3k + 1$$

Veamos ahora lo siguiente:

(1) $3k^2 \leq 3^k$

(2) $3k+1 \leq 3^k$

Queremos probar esto porque si estas dos nuevas afirmaciones fuesen ciertas, entonces volviendo $(\star)$ tendríamos que:

$$\begin{aligned} (k+1)^3 &\leq 3^k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &\leq 3^k + 3^k + 3k + 1 \quad \text{usando (1)} \\ &\leq 3^k + 3^k + 3^k \quad \text{usando (2)} \\ &= 3 \cdot 3^k = 3^{k+1} \end{aligned}$$

Luego, mirando los extremos tenemos que

$$(k+1)^3 \leq 3^{k+1}$$

Por lo tanto, basta verificar (1) y (2). Veamos (1):

$$3k^2 \leq k \cdot k^2 = k^3 \leq 3^k,$$

donde en la primera desigualdad usamos que $3 \leq k$ y en última usamos la HI. Ahora veamos que vale (2):

$$3k + 1 \leq 3k + 3 = 3(k+1) \leq 3(k+k) = 3 \cdot 2 \cdot k \leq 3 \cdot k \cdot k = 3k^2 \leq 3^k,$$

donde en la última desigualdad usamos que vale (1). Luego, vimos lo que restaba probar y queda así resuelto el ejercicio.