Ejemplo 5: Hallar todos los enteros n tales que $2^n > n^2$.

En este caso, $p(n)$: $2^n > n^2$. Empecemos probando los primeros valores.

n	2^n	n^2	$p(n)$
1	2	1	V
2	4	4	F
3	8	9	F
4	16	16	F
5	32	25	V
6	64	36	V
⋮	⋮	⋮	⋮

Vemos que no es cierto si $n \in \{2,3,4\}$, y podríamos seguir un poco más para intuir que $2^n > n^2$ si $n=1$ o $n \geq 5$. Más aún, podríamos ensayar un

Paso inductivo: Si $n \geq 5$ y $p(n)$ es verdadera entonces $p(n+1)$ también lo es.

Dem Paso inductivo: $(n+1)^2 = n^2+2n+1$, y usando Hipótesis inductiva $(n+1)^2 = n^2+2n+1 < 2^n+2n+1$. (Sumamos $2n+1$ a ambos lados de la desigualdad $n^2<2^n$)

Como $n > 1$, se tiene que $2n+1 < 2n+n = 3n$, y como $n \geq 5 > 3$ se tiene $3n < n \cdot n = n^2$ (notar que $n>0$, con lo cual multiplicar por n en ambos lados de la desigualdad $3<n$ "preserva" el signo de la desigualdad). Así, tenemos la cadena de desigualdades $2n+1 < 3n < n^2 < 2^n$, y sumando 2^n en ambos lados: $2^n+2n+1 < 2^n+2^n = 2^{n+1}$. Luego, $(n+1)^2 < 2^n+2n+1 < 2^{n+1}$.

¿Podemos concluir que $2^n > n^2$, $\forall n \geq 5$? Sí, a partir del siguiente resultado.

Teorema (Principio de inducción corrida): Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$, y sea $p(n)$ una afirmación sobre n, para $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$. Si p satisface que:

(Caso base) $p(n_0)$ es verdadera,

(Paso inductivo) $\forall h \geq n_0$, si $p(h)$ es verdadera, entonces $p(h+1)$ también lo es,

entonces $p(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$.

Dem: Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : p(n-1+n_0) \text{ es verdadera}\}$. Luego, H es un conjunto inductivo, ya que:

*) $1 \in H$: $p(1-1+n_0) = p(n_0)$ es verdadera por hipótesis.

*) Sea $k \in H$: es decir, $p(k-1+n_0)$ es verdadera. Notar que $k-1+n_0 \geq 1-1+n_0$, ya que $k \in \mathbb{N}$. Por el paso inductivo, $p(k-1+n_0+1)$ es verdadera, y $k-1+n_0+1 = (k+1)-1+n_0$, con lo cual $k+1 \in H$.

Luego, $H = \mathbb{N}$, con lo cual $p(n-1+n_0)$ es verdadera, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde $p(h)$ es verdadera $\forall h$ de la forma $h = n-1+n_0$, $n \in \mathbb{N}$ $\Longleftrightarrow$ $h \geq n_0$, $h \in \mathbb{Z}$. ∎

Ejemplo 6: Probar que $n^2+n \geq 42$ $\forall n \geq 6$.

Como ejercicio inicial, verificar que $n^2+n < n^2$ si $n \in \{1,2,3,4,5\}$.

Utilizaremos el principio de inducción corrido para $P(n)$: $n^2+n \geq 42$

Caso base: Si $n=6$, $6^2+6 = 42 \geq 42 \Longrightarrow p(6)$ es verdadera.

Paso inductivo: Asumimos que $p(h)$ es cierta: $h^2+h \geq 42$, siendo $h \geq 6$. Probemos que $p(h+1)$ también es cierta:

$$(h+1)^2+(h+1) = h^2+2h+1+h+1 = h^2+h+2h+2 = h^2+h+2(h+1).$$

Como $h \in \mathbb{N}$, se tiene que $h+1 \geq 2$, y así $2(h+1) \geq 2 \cdot 2 = 4 \geq 0$.

Luego, $h^2+h+2(h+1) \geq h^2+h+0 = h^2+h \geq 42$

Hipótesis inductiva

sumando h^2+h a ambos lados de

Así, se obtiene que

$$(h+1)^2+(h+1) = h^2+h+2(h+1) \geq 42,$$

es decir probamos $p(h+1)$ a partir de asumir que $p(h)$ es verdadera.

Por el principio de inducción corrido, $n^2+n \geq 42$ $\forall n \geq 6$.

Definiciones recursivas. Sumatorias y productorias

Dada una sucesión de números reales $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ la sucesión se define de modo recursivo si u_n se define a partir de los elementos anteriores. Por ejemplo:

a) $u_1 = 1$, $u_n = 2u_{n-1}$ si $n > 1$. Podemos ver que

$u_2 = 2$, $u_3 = 2 \cdot u_2 = 4$, $u_4 = 2 \cdot u_3 = 8$, $u_5 = 2 \cdot u_4 = 16, \ldots$

Se puede intuir que $u_n = 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo cual se verifica por inducción (Ejercicio!)

b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} - (n+1))^2$, si $n \in \mathbb{N}$. Calculamos:

- $a_2 = (\sqrt{1} - 2)^2 = (-1)^2 = 1$
- $a_3 = (\sqrt{a_2} - 3)^2 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4$
- $a_4 = (\sqrt{a_3} - 4)^2 = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$
- $a_5 = (\sqrt{a_4} - 5)^2 = (2-5)^2 = (-3)^2 = 9$
- $a_6 = (\sqrt{a_5} - 6)^2 = (3-6)^2 = (-3)^2 = 9.$

Así, podemos intuir que va dando cuadrados, repitiendo dos veces cada valor.

Afirmación: $a_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Dem: Por inducción en n. Para el caso base, $a_1 = 1$, es verdadero.

Paso inductivo. Asumimos que a_n tiene la forma anterior y queremos probar que a_{n+1} también. Consideramos dos casos:

* n par: $a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2$, y $n+1$ es impar. En este caso:

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} - (n+1)\right)^2 = \left(\frac{n}{2} - (n+1)\right)^2 = \left(\frac{n - 2(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{-n-2}{2}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)+1}{2}\right)^2,$$

y así, a_{n+1} tiene la forma buscada.

* n impar: $a_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ y $n+1$ es par. Calculamos:

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} - (n+1)\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2} - (n+1)\right)^2 = \left(\frac{(n+1) - 2(n+1)}{2}\right)^2$$
$$= \left(-\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Luego, si vale la fórmula para n, entonces vale para $n+1$, y por el principio de inducción, la fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Def. Dados números reales $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ se definen la sumatoria y la productoria del siguiente modo recursivo:

(a) $\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1$, $\quad \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + x_{k+1}$.

(b) $\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1$, $\quad \prod_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot x_{k+1}$.

Ejemplo 7: Sean $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, etc.: es decir, $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) $\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2$, $\sum_{i=1}^{3} i = (1+2) + 3 = 1+2+3$,

y en general $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ver clase anterior).

(b) $\prod_{i=1}^{1} i = 1$, $\prod_{i=1}^{2} i = 1.2 = 2$, $\prod_{i=1}^{3} i = 1.2.3 = 3$, y en general

$\prod_{i=1}^{n} i = \boxed{1.2. \dots .n}$ → se define como el n-ésimo factorial y se denota:

$$n! = 1.2.3. \dots .n.$$

Por ejemplo, $5! = 1.2.3.4.5 = 120$.

__Ejemplo 8__: Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

__Dem__: Aquí, $p(n)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, y probaremos por inducción que $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Comencemos con $p(1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow p(1) \text{ es verdadera.}$$

Asumimos ahora que $p(n)$ es cierta. Probaremos que vale $p(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definición de sumatoria}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando hipótesis inductiva}}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denominador común}}}{=} \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}.$$

Luego, $p(n+1)$ es verdadera.

Principio de Buena ordenación y Principio de Inducción Fuerte

__Def__: *) Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ posee __primer elemento__ si existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$.

*) Un subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ se dice __bien ordenado__ si todo subconjunto no vacío de B posee primer elemento.

__Ejemplos__: *) $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ no tiene primer elemento: para cada $a > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $a\frac{1}{n} < a$, y así a no puede ser el primer elemento.

*) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tiene primer elemento: $a = 0$ lo satisface. Pero no es bien ordenado

ya que $\mathbb{R}_{>0}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

<u>Principio de buena ordenación</u>: $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado. Es decir, todo subconjunto B de $\mathbb{N}$, $B \neq \emptyset$, tiene primer elemento.

<u>Dem</u>: Sea $B \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto que <u>no</u> tiene primer elemento: probaremos que $B = \emptyset$, lo cual prueba que $\mathbb{N}$ es bien ordenado.
Sea $B' = \mathbb{N} - B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin B\}$: ver que $B = \emptyset$ equivale a probar que $B' = \mathbb{N}$.
Sea $K = \{n \in \mathbb{N} : \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq B'\}$. Afirmamos que K es inductivo.

* $1 \in K$: si $1 \in B$, entonces 1 es el primer elemento de B, ya que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Luego, $1 \notin B$; es decir, $1 \in B' \Rightarrow \{1\} \subseteq B'$. Así, $1 \in K$.
* Sea k un elemento de K, probemos que $k+1 \in K$. Por definición, $k \in K$ nos dice que $\{1, 2, \dots, k\} \subseteq B'$. Luego, si suponemos que $k+1 \notin B'$, se tiene que $k+1 \in B$, y como $1, 2, \dots, k \notin B$, $k+1$ es el primer elemento de B: si $b \in B$, entonces $b \geq k+1$. Obtenemos así una contradicción, con lo cual $k+1 \in B' \Rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\} \subseteq B'$; o sea, $k+1 \in K$.

Como K es inductivo, $K \subseteq \mathbb{N}$, se tiene que $K = \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{1, 2, \dots, n\} \subseteq B' \Rightarrow n \notin B$. Luego, $B = \emptyset$. ∎

<u>Teorema (Principio de inducción completa)</u>: Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación tal que:

a) $p(1)$ es verdadera,
b) Si $p(k)$ es verdadera para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces $p(n+1)$ también es verdadera.

Entonces la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Dem</u>: Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : p(n)$ es verdadera$\}$. Veamos que vale el siguiente resultado.

~~*) Por a) $1 \in H$.~~
~~*) Sea $k \in H$, probemos que $k+1 \in H$~~

Teorema: Sea $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que $1 \in H$, y si $\{1, \dots, k\} \subseteq H$, entonces $k+1 \in H$. Entonces, $H = \mathbb{N}$

Dem: Supongamos que $H \neq \mathbb{N}$. Luego, $H' = \mathbb{N} - H$ es no vacío. Por el Principio de Buena Ordenación, H' tiene un primer elemento k. Como $1 \in H$, se tiene que $k > 1$, y más aún, $1, 2, 3, \dots, k-1 \notin H'$: es decir, $1, 2, 3, \dots, k-1 \in H$, y por hipótesis, $k \in H$. Obtenemos así una contradicción que viene de suponer que $H \neq \mathbb{N}$. Luego, $H = \mathbb{N}$. ∎

Usando el Teorema se deduce que $H = \mathbb{N}$. ∎

Ejemplo 9: Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $r + \frac{1}{r} \in \mathbb{Z}$. Probar que $r^n + \frac{1}{r^n} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Dem. Utilizaremos el Principio de inducción completa.
Para el caso base, $r^1 + \frac{1}{r^1} = r + \frac{1}{r}$, que por hipótesis pertenece a $\mathbb{Z}$.

Sea $k \geq 1$, asumimos que $r^t + \frac{1}{r^t} \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in \{1, 2, \dots, k\}$:

$$r^{t+1} + \frac{1}{r^{t+1}} = r^t \cdot r + \frac{1}{r^t \cdot r} \underset{\uparrow}{=} r^t \cdot r + r \cdot \frac{1}{r^t} - r \cdot \frac{1}{r^t} - r^t \cdot \frac{1}{r} + r^t \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r^t \cdot r}$$

sumamos y restamos un mismo elemento

$$\underset{\uparrow}{=} \left(r^t + \frac{1}{r^t}\right) \cdot r - \frac{1}{r^{t-1}} - r^{t-1} + \frac{1}{r}\left(r^t + \frac{1}{r^t}\right)$$

sacamos factor común

$$\underset{\uparrow}{=} \left(r^t + \frac{1}{r^t}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \left(r^{t-1} + \frac{1}{r^{t-1}}\right).$$

factor común de nuevo

Si $t = 1$ la expresión anterior es $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2$, que es entero ($r^{t-1} = \frac{1}{r^{t-1}} = 1$) con lo cual se anula el último término.

Si $t>1$, entonces $r^t+\frac{1}{r^t}$, $r+\frac{1}{r}$ y $r^{t-1}+\frac{1}{r^{t-1}}$ son enteros por hipótesis inductiva (valen $p(t)$, $p(t-1)$ y $p(1)$). Así,

$$r^{t+1}-\frac{1}{r^{t+1}}=\left(r^t+\frac{1}{r^t}\right)\left(r+\frac{1}{r}\right)-\left(r^{t-1}+\frac{1}{r^{t-1}}\right)\in\mathbb{Z}.$$

Usando el Principio de Inducción Completa, la afirmación es verdadera para todo $n\in\mathbb{N}$.