- Ejercicio 10: Lo primero a tener en cuenta al resolver este ejercicio, es lograr identificar de manera clara, en cada caso, cuales son mis hipótesis y que es lo que se debe probar.

  ($\Rightarrow$) Asumamos que $P(A) \subseteq P(B)$, en este caso uno debe probar que $A \subseteq B$.

  Para lograr esto, primero veamos que significa la proposición

  $$"P(A) \subseteq P(B)"$$

  Notar que por definición de "$\subseteq$" esto signfica que

  $$X \in P(A) \Rightarrow X \in P(B). \tag{1}$$

  Por otro lado, teniendo en cuenta que el conjunto de partes $P(A)$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A. Entonces (1) es equivalente a

  $$X \subseteq A \Rightarrow X \subseteq B. \tag{2}$$

  Es decir que todo subconjunto de A es un subconjunto de B. Claramente $A \subseteq A$, entonces $A \subseteq B$ por (2), como queríamos demostrar.

  ($\Leftarrow$) Ahora asumamos que $A \subseteq B$, en este caso uno debe probar que $P(A) \subseteq P(B)$. El argumento anterior, nos dice que, basta probar que todo subconjunto de A es un subconjunto de B.

  Sea $X \subseteq A$, por hipótesis $A \subseteq B$. Dada que la relación "$\subseteq$" es transitiva, tenemos que $X \subseteq B$. Por lo tanto $P(A) \subseteq P(B)$.

- Ejercicio 12: Vamos a probar que las dos primeras afirmaciones implican la tercera.

  Notar que la afirmación: "**No todos los estudiantes de matemática de la facultad son argentinos**" es equivalente a "**Hay estudiantes de matemática de la facultad que no son argentinos**".

  Así como también la afirmación "**No todos los estudiantes de matemática de la facultad toman mate**" es equivalente a "**Hay estudiantes de matemática de la facultad que no toman mate**".

  La primer afirmació nos asegura que hay al menos un estudiante, llamesmole "Adan" de matemática de la facultad que no es argentino.

  Notar que tenemos dos casos:

  (a) Adan no toma mate.
  (b) Adan toma mate.

  Si Adan no toma mate, entonces logramos probar la tercer afirmación ya que Adan es estudiante de matemática de la facultad.

  Veamos que la sentencia "**Adan toma mate**" no se puede dar. Asumamos que si se da y lleguemos a la contradicción. Si Adan tomará mate, ya que no es argentino la segunda afirmación implica que Adan no es estudiante de matemática llegando a una contradicción ya que Adan si es estudiante de matemática. Por lo tanto Adan no toma mate, como queríamos probar.

- Ejercicio 14: En esta clase de ejercicios uno esta tentado a usar elementos para probar las inclusiones. Sin embargo, este no es el caso ya que tomar elementos suele facilitar la prueba de propiedades más simples como por ejemplo: la propiedad conmutativa, asociativa, distributivas y leyes de Morgan de "$\cup$" y "$\cap$". En este ejercicio, para evitar equivocaciones y sobrecarga de notación, es mejor usar las propiedades de conjuntos anteriormente nombradas.

(a) Hay que tener en cuenta que $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$ y que además $A - B = A \cap B^c$. Luego, obtenemos que

$$A - (A \triangle B) = A \cap \Big((A-B) \cup (B-A)\Big)^c$$

Por "Ley de morgan" y debido a que $(X^c)^c = X$, obtenemos que

$$\begin{aligned} A \cap \Big((A-B) \cup (B-A)\Big)^c &= A \cap \Big((A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c\Big) \\ &= A \cap \Big((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)\Big) \end{aligned}$$

Como la propiedad "$\cap$" es asociativa y conmutativa, entonces

$$A \cap \Big((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)\Big) = \Big(A \cap (B^c \cup A)\Big) \cap (A^c \cup B),$$

Notar que en general $X \subseteq X \cup Y$ y por otro lado, si $X \subseteq Y$, entonces $X \cap Y = X$. En conjunto, esto nos dice que $X \cap (X \cup Y) = X$. Luego, tenemos que $A \cap (B^c \cup A) = A$ y entonces

$$\Big(A \cap (B^c \cup A)\Big) \cap (A^c \cup B) = A \cap (A^c \cup B)$$

Por la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $\emptyset \cup X = X$ para todo conjunto X, obtenemos que

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

como queríamos demostrar.

(b) Supongamos que $A \subseteq B$, debemos probar que $A \triangle B = B \cap A^c$. En este caso, en vez de usar la definición de "$\triangle$" que usamos en el item anterior, vamos a usar su equivalente

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B),$$

notar además que la hipótesis $A \subseteq B$ implica que $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$. Teniendo en cuenta $B - A = B \cap A^c$ obtenemos que

$$(A \cup B) - (A \cap B) = B - A = B \cap A^c$$

como queríamos probar.

(c) A diferencia del ejercicio anterior en los cuales uno partía de un lado de la igualdad de conjuntos y llegaba al otro a traves de manipulaciones conjuntistas al otro lado de la igualdad, en este ejercicio se recomienda desarrollar ambos lados de la igualdad y encontrar un punto intermedio donde ambos lados coincidan.

Con esto en cuenta, primero consideremos "$A \cap (B \triangle C)$", luego

$$A \cap (B \triangle C) = A \cap ((B - C) \cup (C - B)) = A \cap \Big((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)\Big)$$

Por propiedad distributiva y asociativa obtenemos $A \cap \Big((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)\Big) = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c)$. Por lo tanto

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c). \tag{3}$$

Por otro lado, si partimos de "$(A \cap B) \triangle (A \cap C)$" obtenemos

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \Big((A \cap B) - (A \cap C)\Big) \cup \Big((A \cap C) - (A \cap B)\Big). \tag{4}$$

Consideremos "$(A \cap B) - (A \cap C)$", usando ley de Morgan, propiedad de "$-$", distributividad y asociatividad obtenemos

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c = (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) = (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c),$$

ahora bien teniendo en cuenta que $A \cap A^c = \emptyset$, $\emptyset \cap X = \emptyset$ y $\emptyset \cup X = X$ obtenemos que

$$(A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) = (B \cap \emptyset) \cup (A \cap B \cap C^c) = \emptyset \cup (A \cap B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c$$

Es decir, $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap B \cap C^c$, de la misma manera se puede probar que

$$(A \cap C) - (A \cap B) = A \cap C \cap B^c.$$

Por lo tanto, por (4) obtenemos que

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \Big((A \cap B) - (A \cap C)\Big) \cup \Big((A \cap C) - (A \cap B)\Big) = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c)$$

Claramente, esta última expresión coincide con la expresión de la derecha de (3). Como la igualdad es una relación transitiva obtenemos que

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

como queríamos probar.

(d) Basta usar distributividad y propiedad de la operación "$-$". Procediendo del lado izquierdo de manera similar a los items anteriores se puede llegar sin mucha dificultad al lado derecho.

(e) Basta usar la propiedad del "$-$" así como también las propiedades conmutativa y asociativa de "$\cap$".

(f) Asumamos que $A \subseteq B$, debemos probar que $B^c \subseteq A^c$. A diferencia de los ejercicios anteriores, para este ejecicio vamos a proceder a la logica, de dos maneras distintas . Por definición del complemento y "$\subseteq$" hay que probar que

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A$$

Llamemos p a la proposición $x \in A$ y sea q la sentencia $x \in B$. Notar que la hipótesis $A \subseteq B$ en términos lógicos no dice que $p \Rightarrow q$, ahora bien teniendo en cuenta que las tablas de verdad de las proposiciones "$p \Rightarrow q$" y "$\sim q \Rightarrow \sim p$" coinciden (ver ejercicio 11). Entonces, ambas afirmaciones son equivalentes, en este caso obtenemos que $A \subseteq B$ y $B^c \subseteq A^c$ son afirmaciones equivalentes, es decir no sólo vale la implicación, hemos probado por tanto que

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c.$$

Como queríamos probar.

Ahora bien este ejercicio también podría ser resuelto usando otra herramienta logica muy útil llamada "reducción al absurdo", esta nos dice que si quiero probar una implicación del tipo $P \Rightarrow Q$, lo que puedo hacer es asumir la falsedad de esta proposición y llegar, a una contradicción ó a un absurdo (recordar que $\sim (P \Rightarrow Q) = P \wedge (\sim Q)$), los absurdos más usuales hasta este punto van a ser que "$0 = 1$" ó que hay elementos en el vacío por ejemplo. Por lo tanto veamos, como aplicarlo en nuestro caso entonces asumamos que $A \subseteq B$ recordar que queríamos probar que $B^c \subseteq A^c$ y que esto es equivalente a

$$x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$$

asumamos que esta implicación es falsa por lo tanto existe $x \in B$ y $x \notin A^c$, por definición del complemento, $x \notin A^c$ es lo mismo que $x \in (A^c)^c$, teniendo en cuenta que $(A^c)^c = A$ obtenemos $x \in A$. Por hipótesis $A \subseteq B$, entonces $x \in B$, por lo tanto

$$(x \in B^c) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in (B^c \cap B) \Rightarrow x \in \emptyset$$

lo cual es absurdo, ya que el conjunto vacío no tiene elementos.

(g) La hipótesis $C \subseteq A$, nos permite usar el item (b) para obtener $A \triangle C = A \cap C^c$. Usando distributividad del lado derecho de la igualdad junto con lo anterior dicho se puede llegar rapido al lado izquierdo de la igualdad.

(h) El item (c) nos da una expresion de $A \cap (B \triangle C)$. Usando la hipótesis $A \cap C = \emptyset$ es vacío en algunos pasos se llega desde el lado izquierdo al lado derecho de la igualdad.

- Ejercicio 17: A diferencia que en el ejercicio 14 donde en la mayoría de los items probamos las igualdad de conjuntos via manipulaciones conjuntistas, en este ejercicio conviene ir usando la definición de la contención y la lógica debido a que las propiedades a probar en este ejercicio son más "primitivas". Recordemos que

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

(a) "$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$", partiendo del lado izquierdo

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in (A \cup B) \wedge\ y \in C \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge\ y \in C.$$

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva de $\wedge$ respecto de $\vee$, obtenemos

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \iff (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C).$$

Por definición de "$\times$" obtenemos

$$(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \iff \Big((x, y) \in A \times C\Big) \vee \Big((x, y) \in B \times C\Big).$$

Usando la definición de la unión

$$\Big((x, y) \in A \times C\Big) \vee \Big((x, y) \in B \times C\Big) \iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C).$$

Por lo tanto

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C),$$

es decir $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ como queríamos probar.

(b) Proceder de igual manera que en (a).

(c) En este ejercicio hay que proceder igual que en los anteriores, teniendo en cuenta que para que $(x, y) \notin X \times Y$ entonces o bien $x \notin X$ ó $y \notin Y$ (ley de morgan).

(d) Se pueden usar los items anteriores para resolver este caso.