

# Notas de Topología

Ariel Pacetti



## Índice general

Capítulo 1. Espacios Topológicos	5
1. Espacios métricos	7
2. Bases y sub-bases	9
3. Otras construcciones de espacios topológicos	10
4. Algunas propiedades de espacios topológicos	15
Capítulo 2. Funciones Continuas	19
1. Sucesiones y redes	23
2. Redes	25



## Espacios Topológicos

El objetivo de la topología es poder generalizar nociones que tenemos sobre el conjunto de números reales a conjuntos abstractos. El objetivo “ideal” sería el de poder clasificar espacios topológicos, esto es decir si dados dos de estos objetos, poder saber si son “iguales” o no lo son. Comencemos por recordar algunas de las propiedades que tienen los números reales. Al hablar de los números reales, no solamente tenemos en mente el conjunto, sino que también la noción de poder decir si dos cosas están cerca o no, esto viene dado por la función valor absoluto. Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , en general definimos su distancia como

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Además, en análisis vimos que dentro de el conjunto de los números reales existen varios subconjuntos que juegan un rol preponderante, a saber los intervalos. Recordemos que el intervalo  $(a, b)$  se define como  $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ . A partir de estos conjuntos, pudimos definir la noción de un subconjunto *abierto* en  $\mathbb{R}$ .

**DEFINICIÓN.** Un conjunto  $U \subset \mathbb{R}$  se dice abierto si para todo  $x \in U$  posee un intervalo que contiene a  $x$  y está contenido en  $U$ , o sea, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$ .

Los abiertos de  $\mathbb{R}$  satisfacen dos propiedades muy importantes (que dejamos al lector que verifique), a saber:

- La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.
- La intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.
- El conjunto vacío  $\emptyset$  es abierto, y  $\mathbb{R}$  también lo es.

En general no es cierto que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos también lo sea.

**EJEMPLO 1.** Si  $U_n = (-1/n, 1/n)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , es fácil ver que estos conjuntos son abiertos, pero su intersección  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$ , que no es abierto.

A partir de la noción de intervalos en  $\mathbb{R}$  (o conjuntos abiertos), podemos estudiar muchas propiedades importantes, como definir funciones continuas, límites de sucesiones, clausuras, etc. El objetivo es poder generalizar esto a conjuntos arbitrarios.

**DEFINICIÓN.** Sea  $X$  un conjunto cualquiera. Una *topología* en  $X$  es una colección de subconjuntos  $\mathcal{T}$  de  $X$  (o sea es un subconjunto del conjunto  $\mathcal{P}(X)$  de partes de  $X$ ) que satisface las siguientes propiedades:

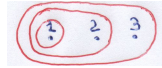
1.  $\emptyset \in \mathcal{T}$ .
2.  $X \in \mathcal{T}$ .
3. Unión arbitraria de elementos de  $\mathcal{T}$  vuelve a estar en  $\mathcal{T}$  (o sea si  $U_i \in \mathcal{T}$  para  $i \in I$  entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ ).

4. Intersección finita de elementos de  $\mathcal{T}$  vuelve a estar en  $\mathcal{T}$  (o sea si  $U_i \in \mathcal{T}$  para  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ ).

DEFINICIÓN. Un *espacio topológico* es un par  $(X, \mathcal{T})$  donde  $X$  es un conjunto cualquiera, y  $\mathcal{T}$  es una topología en  $X$ .

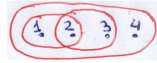
Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, a los elementos de  $\mathcal{T}$  se los llaman *abiertos*. A la vez, decimos que un subconjunto  $V \subset X$  es *cerrado* si su complemento  $X \setminus V$  es abierto.

- EJEMPLOS.
1. Si tomamos  $X = \mathbb{R}$  y  $\mathcal{T}$  como los abiertos de  $\mathbb{R}$  (definidos anteriormente), el par  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es un espacio topológico. Generalmente se denota simplemente como  $\mathbb{R}$  a este espacio topológico.
  2. Si tomamos  $X = \mathbb{R}^2$ , y  $\mathcal{T}$  como el conjunto de  $U \subset X$  que cumplen que para todo  $(x_0, y_0) \in U$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\} \subset U$  (comparar con la noción de abierto de Análisis II). Esto da un espacio topológico (que se suele simplemente denotar  $\mathbb{R}^2$ ).
  3. Tomemos  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , y definimos  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$ . Veamos que esto es un espacio topológico.



Claramente el conjunto vacío y todo son abiertos. Notar que  $\mathcal{T}$  tiene la particularidad de que si tomamos dos elementos de él, entonces uno de ellos siempre está contenido en el otro. Luego la unión y la intersección de dos elementos de  $\mathcal{T}$  siempre vuelve a estar en  $\mathcal{T}$ .

4. Tomemos  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  como antes, y  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ .



Notar que  $\mathcal{T}$  no es una topología, dado que  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathcal{T}$ .

5. Supongamos que tomamos  $X$  un conjunto cualquiera, y  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ . Claramente el par  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico. A esta topología  $\mathcal{T}$  se la llama la topología *trivial*.
6. Por otro lado, si  $X$  es un conjunto cualquiera, y tomamos  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ , nuevamente esto da una topología en  $X$ , que se llama la topología *discreta*. Notar que para esta topología todo subconjunto de  $X$  es abierto.

Notar que si fijamos un conjunto  $X$  y consideramos a el conjunto  $T$  de todas las posibles topologías que podemos poner en  $X$  (o sea  $T = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X) \text{ topología}\}$ ), entonces el conjunto  $T$  tiene un orden (parcial) natural dado por la inclusión. Así decimos que una topología  $\mathcal{T}_1$  es *mas fina* que una topología  $\mathcal{T}_2$  si  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$  (o sea  $\mathcal{T}_1$  contiene todos los abiertos de  $\mathcal{T}_2$  y a priori alguno mas). Luego con este orden parcial, existe un elemento que es el mas chico de todos, a saber la topología trivial, y uno que es el mas grande de todos, a saber la topología discreta.

EJEMPLO 2. No es cierto que el orden anterior sea un orden total, o sea no siempre se pueden comparar dos elementos. Por ejemplo, si  $X = \{1, 2, 3\}$  y tomamos  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1, 2\}\}$ , y  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{2, 3\}\}$ , es fácil ver que ambas son topologías en  $X$ , pero ninguna es mas fina que la otra.

EJERCICIO 1. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, y  $\#X = 1$ , entonces  $\mathcal{T}$  tiene que ser la topología discreta, que también es la topología trivial.

EJERCICIO 2. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico que cumple que los puntos son abiertos, entonces  $\mathcal{T}$  es la topología discreta.

### 1. Espacios métricos

Hay una gran fuente de espacios topológicos obtenidos a partir de una “distancia”.

DEFINICIÓN. Si  $X$  es un conjunto, una *distancia* en  $X$  es una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

que satisface las siguientes propiedades:

1.  $d(x, x) = 0$  para todo  $x \in X$ .
2.  $d(x, y) \neq 0$  si  $x \neq y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para toda terna de elementos  $(x, y, z)$  de  $X$  (usualmente llamada la **desigualdad triangular**).

EJEMPLOS. 1. Si tomamos  $X = \mathbb{R}$  y definimos  $d(x, y) = |x - y|$ , esto da la distancia usual de  $\mathbb{R}$ . Notar que  $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}$ .

2. Si  $X = \mathbb{R}^2$ , definimos  $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$ . Esto da una distancia en  $\mathbb{R}^2$  (queda como ejercicio verificar la desigualdad triangular si nunca lo hicieron). Esta distancia es bastante mas particular, dado que proviene de una *norma*. A pesar de que esto no lo veremos mucho en este curso, cabe relacionarlo con cosas vistas anteriormente. Recordar que  $\mathbb{R}^2$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. El mismo tiene un producto interno dado por  $\langle (x_0, y_0), (x_1, y_1) \rangle = x_0x_1 + y_0y_1$  (reparar las notas de Algebra II). Un espacio  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno tiene luego una forma natural de medir vectores (o sea definir distancias), y es la dada anteriormente. Luego en este caso particular, la demostración de la desigualdad triangular ya fue dada en Algebra II.

3. En  $\mathbb{R}^2$  podemos definir otra distancia, dada por

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = |x_0 - x_1| + |y_0 - y_1|.$$

Dejamos como ejercicio verificar que esta función cumple las propiedades para ser distancia.

4. Podemos extender las últimas dos definiciones a  $\mathbb{R}^n$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  de manera natural, y es fácil ver que ambas definen distancias.
5. Sea  $X$  un conjunto cualquiera, y definamos

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Verificar que esto es una distancia.

6. Tomemos  $X = \mathbb{Q}$ , y  $p$  un número primo. Si  $a \in \mathbb{Z}$  es no nulo, entonces por el Teorema Fundamental de la Aritmética, sabemos que  $a$  se factoriza como producto de primos a potencias. En particular, podemos definir  $v_p(a)$  como el exponente que aparece en  $p$  al factorizar el número  $a$ . Equivalentemente,

$$v_p(a) = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p^{-n}a \in \mathbb{Z}\}.$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- a)  $v_p(a) \geq 0$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$  no nulo.
- b)  $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$  para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$  ambos no nulos.
- c) Si  $a, b \in \mathbb{Z}$  son no nulos, y  $a + b$  es no nulo, entonces  $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ .

Podemos extender dicha función a los números racionales no nulos, definiendo  $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$  (convencerse de que esto está bien definido, o sea de que si dos fracciones son equivalentes, la valuación de ambas es igual). A partir de la *valuación*  $v_p$  podemos definir un *valor absoluto* por:

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{a}{b} = 0, \\ p^{-v_p(\frac{a}{b})} & \text{si } \frac{a}{b} \neq 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio al lector verificar que si  $x, y \in \mathbb{Q}$ , entonces  $d_p(x, y) = |x - y|_p$  es una distancia (la llamada “distancia  $p$ -ádica”). Notar que con esta distancia, la sucesión  $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiende a cero.<sup>1</sup>

La razón de estudiar distancias, es que a partir de una distancia en un conjunto  $X$ , podemos construir una topología asociada.

**DEFINICIÓN.** Un espacio métrico es un par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una distancia.

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y dados  $x \in X$  y  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , podemos definir la bola centrada en  $x$  de radio  $r$  por

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

**DEFINICIÓN.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, y  $A \subset X$ , decimos que  $A$  es *abierto* en  $X$  si vale que para todo  $x \in A$  existe un  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $B(x, r) \subset A$ .

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $\mathcal{T}_d = \{A \subset X : A \text{ es abierto}\}$ .

**EJERCICIO 3.** En las hipótesis anteriores, probar que dado  $x \in X$ ,  $r > 0$ , la bola  $B(x, r) \in \mathcal{T}_d$ .

**PROPOSICIÓN 1.1.** *El conjunto  $\mathcal{T}_d$  es una topología en  $X$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Claramente  $\emptyset$  y  $X$  son elementos de  $\mathcal{T}_d$ . Supongamos que  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una colección de abiertos, y veamos que su unión también lo es. Si  $x \in \cup_{i \in I} U_i$ , entonces existe  $i_0$  tal que  $x \in U_{i_0}$  (por definición de unión de conjuntos). Luego como  $U_{i_0}$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U_{i_0}$ , pero como  $U_{i_0} \subset \cup_{i \in I} U_i$  deducimos que  $B(x, r) \subset \cup_{i \in I} U_i$ .

Resta verificar que intersección finita de abiertos es abierto. Sean  $U_1, \dots, U_n$  conjuntos abiertos, y sea  $x \in \cap_{i=1}^n U_i$ . Como cada  $U_i$  es abierto, existe  $r_i > 0$  tal que  $B(x, r_i) \subset U_i$ . Sea  $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ , con lo cual  $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Luego  $B(x, r) \subset \cap_{i=1}^n U_i$ . □

En particular, si  $(X, d)$  es un espacio métrico, tenemos asociada naturalmente un espacio topológico a él, a saber  $(X, \mathcal{T}_d)$ . Una pregunta natural es si toda topología proviene de una medida. La respuesta es negativa.

<sup>1</sup>Es muy interesante ver como el análisis con la distancia  $p$ -ádica difiere mucho del clásico, por ejemplo, una serie converge con la distancia  $p$ -ádica si y sólo si el término general tiende a cero.

EJEMPLO 3. Sea  $X = \{1, 2\}$ , y  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  (la topología trivial). Afirmando que esta topología no puede provenir de una distancia. Supongamos que existe  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  una distancia cualquiera. En particular, sea  $n = d(1, 2)$ . Por definición de distancia, sabemos que  $n \in \mathbb{R}$  es positivo y no nulo. Luego  $B(1, n/2) = \{1\}$ , pues claramente  $d(1, 1) = 0 < n/2$ , y  $d(1, 2) = n > n/2$ . En particular,  $\{1\}$  debería ser abierto, pero  $\{1\}$  no es un elemento de  $\mathcal{T}$ .

EJERCICIO 4. Probar que si  $X$  es un conjunto cualquiera con al menos dos elementos distintos, entonces no existe ninguna métrica  $d$  en  $X$  para la cual  $\mathcal{T}_d$  sea la topología trivial.

EJERCICIO 5. Probar que si  $X$  es un conjunto finito, y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una distancia, entonces  $\mathcal{T}_d$  es la topología discreta.

DEFINICIÓN. Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice *metrizable* si existe una distancia  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ .

El Ejercicio 3 muestra que no todo espacio topológico es metrizable (veremos más adelante algunas propiedades que tienen los espacios métricos que no valen en general, como ser Hausdorff). Notar que una topología puede provenir de más de una distancia.

EJERCICIO 6. Sea  $X = \mathbb{R}^2$ , y miremos las siguientes distancias:

- $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ,
- $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ .

Probar que ambas son realmente distancias (uno ya lo hicimos antes), y que las topologías  $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ . Si no sale en una primera leída, mirar el Ejemplo 4 y volver a intentarlo.

## 2. Bases y sub-bases

DEFINICIÓN. Si  $X$  es un conjunto cualquiera, y  $\mathcal{B}$  es una colección de subconjuntos de  $X$  (o sea  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ), decimos que  $\mathcal{B}$  es una *base para una topología* si satisface las siguientes propiedades:

1. Si  $x \in X$ , existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U$ .
2. Si  $U, V \in \mathcal{B}$  y si  $x \in U \cap V$ , entonces existe  $W \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W \subset U \cap V$ .

Veamos algunos ejemplos de bases de topologías:

- EJEMPLOS.
1. Si  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  es una base para una topología.
  2. Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, el conjunto  $\mathcal{B} = \{B(x, 1/n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$  es una base para una topología.
  3. Si  $X$  es un conjunto cualquiera,  $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$  es una base para una topología.

Si  $X$  es un conjunto, y  $\mathcal{B}$  es una base para una topología, podemos asociarle a  $\mathcal{B}$  una topología de  $X$  que es la más chica que contiene a  $\mathcal{B}$ , a saber,  $\mathcal{T}$  está formada por uniones de elementos de  $\mathcal{B}$ . Dicho de otra manera (como hicimos con espacios métricos),  $U \in \mathcal{T}$  si vale que para todo  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subset U$ .

LEMA 1.2. *El conjunto  $\mathcal{T}$  definido es una topología en  $X$ .*

DEMOSTRACIÓN. ■ Claramente  $\emptyset \in \mathcal{T}$  (todo elemento de  $\emptyset$  satisface todo) y  $X \in \mathcal{T}$  por la primera propiedad de una base de una topología.

- Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  son elementos en  $\mathcal{T}$ , entonces su unión también lo está. Si  $x \in \cup_{i \in I} U_i$  entonces existe  $i_0$  tal que  $x \in U_{i_0}$ . Luego existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subset U_{i_0} \subset \cup_{i \in I} U_i$ .
- Si  $U_i \in \mathcal{T}$  para  $1 \leq i \leq n$ , veamos que  $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ . Para esto hacemos inducción en  $n$ . Si  $n = 1$  entonces la afirmación es clara. Supongamos que vale para  $n$  y veamos que vale para  $n + 1$  conjuntos. Sea  $V = \cap_{i=1}^n U_i$ , entonces  $\cap_{i=1}^{n+1} U_i = V \cap U_{n+1}$ . Luego basta probar el caso de dos conjuntos. Si  $x \in V \cap U_{n+1}$ , entonces como  $V$  es abierto, existe  $W_1 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W_1 \subset V$ . De igual forma, existe  $W_2 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W_2 \subset U_{n+1}$ . Ahora la segunda propiedad de una base para una topología nos asegura que existe un conjunto  $\tilde{W} \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in \tilde{W} \subset W_1 \cap W_2 \subset V \cap U_{n+1}$ . Luego  $V \cap U_{n+1}$  es abierto, como queríamos ver.  $\square$

Volviendo a los ejemplos anteriores, la topología asociada a las bases  $\mathcal{B}$  corresponden a la topología usual de  $\mathbb{R}$  en el primer ejemplo, a la topología asociada a la distancia  $d$  en el segundo, y a la topología discreta en el tercer ejemplo.

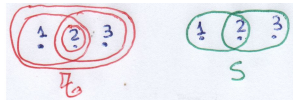
Haciendo un poco de abuso, si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, decimos que  $\mathcal{B}$  es una base de la topología  $\mathcal{T}$  si  $\mathcal{B}$  es una base para una topología, y dicha topología coincide con  $\mathcal{T}$ .

**DEFINICIÓN.** Si  $X$  es un conjunto, una sub-base para una topología es una colección  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $X$  tales que  $X = \cup_{U \in \mathcal{S}} U$ .

A partir de una sub-base de una topología, podemos obtener una topología  $\mathcal{T}$  en  $X$  declarando que un conjunto  $U \in \mathcal{T}$  si  $U$  es una unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ .

La ventaja de trabajar con bases y sub-bases es que en algunos ejemplos para probar ciertas propiedades de una topología  $\mathcal{T}$  (o funciones en el espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ ), nos bastará chequear propiedades en bases/sub-bases.

- EJEMPLOS.** 1. Si  $X = \{1, 2, 3\}$ , el conjunto  $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$  es una sub-base para la topología  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$ .



2. Si  $X = \mathbb{R}$ , entonces el conjunto  $\mathcal{S} = \{B(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$  es una sub-base para la topología usual de  $\mathbb{R}$  (queda como ejercicio completar los detalles)

### 3. Otras construcciones de espacios topológicos

Una pregunta natural a la hora de estudiar espacios topológicos es como poder construir espacios topológicos a partir de otros. En esta sección vamos a estudiar dos construcciones elementales, y mas adelante daremos algunas mas.

#### 3.1. Subespacios topológicos.

**DEFINICIÓN.** Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, y  $Y \subset X$  es un subconjunto cualquiera, podemos dotar al conjunto de  $Y$  de la llamada *topología subespacio*, o *topología relativa*; esto es que  $Y$  hereda abiertos a partir de abiertos de  $X$ . Para ello, definimos el conjunto  $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ .

LEMA 1.3. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, entonces  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que  $\mathcal{T}_Y$  cumple las propiedades de una topología.

- Claramente  $\emptyset = \emptyset \cap Y$  y  $Y = X \cap Y$ , con lo cual  $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$ .
- Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  son elementos de  $\mathcal{T}_Y$ , por definición, para cada  $i \in I$ , existe  $V_i \in \mathcal{T}$  tal que  $U_i = V_i \cap Y$ . Como  $\mathcal{T}$  es una topología,  $\cup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$ , luego  $\cup_{i \in I} U_i = (\cup_{i \in I} V_i) \cap Y$ , con lo cual  $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_Y$ .
- Si  $U_i \in \mathcal{T}_Y$ , con  $i = 1, \dots, n$ , por definición, existe  $V_i \in \mathcal{T}$  tal que  $U_i = V_i \cap Y$ . Luego,  $\cap_{i=1}^n U_i = \cap_{i=1}^n (V_i \cap Y) = (\cap_{i=1}^n V_i) \cap Y$ , con lo cual  $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_Y$ .

□

EJEMPLOS. 1. Si consideramos  $\mathbb{R}$  con la topología usual, y miramos el subconjunto  $\mathbb{N}$ , entonces la topología  $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$  es la topología discreta en  $\mathbb{N}$ . La razón es que si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{n\} = \mathbb{N} \cap (n - 1/2, n + 1/2)$ , con lo cual los puntos son abiertos.

2. Consideremos nuevamente el conjunto  $\mathbb{R}$  con la topología usual, y sea  $Y = [0, \infty)$ . Entonces una base para la topología  $\mathcal{T}_Y$  está dada por los conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : 0 < a < b\} \cup \{[0, b) : b \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

DEFINICIÓN. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, un subconjunto  $Y \subset X$  se dice *discreto* si cumple que la topología inducida  $\mathcal{T}_Y$  es la topología discreta.

- EJEMPLOS. 1. El subconjunto  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  (con la topología usual) es discreto.  
 2. El subconjunto  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , con la métrica usual también es discreto.  
 3. Si  $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  es un espacio topológico con la topología discreta, entonces cualquier subconjunto de  $X$  es discreto.

EJERCICIO 7. ¿Es cierto que si un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  cumple que todo subconjunto propio (o sea todo  $Y \subset X$  pero  $Y \neq X$ ) es discreto, entonces  $\mathcal{T}$  es la topología discreta?

**3.2. Espacios producto I.** Si  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  son dos espacios topológicos, conocemos una manera de construir un conjunto a partir de ellos, a saber el producto cartesiano  $X \times Y$ , la pregunta importante es si hay en  $X \times Y$  una topología “natural”. La palabra natural en matemática tiene distintas interpretaciones, y es muy usada en categorías. Aquí nos referimos con “natural” a que la topología cumpla propiedades esperadas, y que sea la topología “mas chica” con dichas propiedades. Por ahora nos restringimos a dar la definición de la topología, y mas adelante volveremos a la cuestión de por qué dicha topología es natural.

DEFINICIÓN. La *topología producto* en  $X \times Y$  es la topología obtenida a partir de la base

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

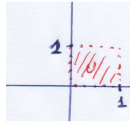
LEMA 1.4. El conjunto  $\mathcal{B}$  es una base para una topología.

DEMOSTRACIÓN. Precisamos verificar las dos propiedades de una base para una topología, a saber:

1. Notar que como  $\mathcal{T}_X$  es una topología,  $X \in \mathcal{T}_X$ , y análogamente,  $Y \in \mathcal{T}_Y$ , con lo cual  $X \times Y \in \mathcal{B}$ , con lo cual la primer propiedad se cumple trivialmente.

2. Supongamos que  $(x, y) \in U_1 \cap U_2$ , con  $U_i \in \mathcal{B}$  para  $i = 1, 2$ . Por definición, existen  $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_X$ ,  $W_1, W_2 \in \mathcal{T}_Y$  tales que  $U_1 = V_1 \times W_1$  y  $U_2 = V_2 \times W_2$ . Luego,  $U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2)$ . Como  $\mathcal{T}_X$  es una topología,  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}_X$ , y análogamente,  $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{T}_Y$ , con lo cual  $(V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2) \in \mathcal{B}$ .  $\square$

EJEMPLO 4. Consideremos  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , como espacio topológico, con la topología producto (donde  $\mathbb{R}$  tiene la topología usual). Notar que aquí la base de la topología consiste en cuadrados (sin el borde), por ejemplo,  $U = (0, 1) \times (0, 1)$  corresponde al dibujo



Claramente esta base de abiertos no coincide con la base de abiertos usual en  $\mathbb{R}^2$  dado por bolas.

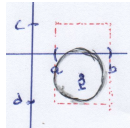
**Afirmo:** la topología producto en  $\mathbb{R}^2$  coincide con la topología dada por la distancia  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

¿Como hacemos para ver que dos topologías son iguales? Recordar que una topología en un conjunto  $X$  es un subconjunto del conjunto  $\mathcal{P}(X)$  de partes de  $X$ . Luego probar que dos topologías son iguales equivale a ver que ambos conjuntos son iguales (y la igualdad de conjuntos siempre la demostramos por la doble contención). Llamemos así  $\mathcal{T}_p$  a la topología producto y  $\mathcal{T}_d$  a la topología obtenida por la distancia. Así demostrar la afirmación equivale a probar que  $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_d$ .

**Veamos la inclusión  $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_d$ .** Como ambas son topologías, basta probarlo para abiertos de una base de la topología, por ejemplo para elementos de  $\mathcal{B}$ . Sea así  $(a, b) \times (c, d)$  un elemento de  $\mathcal{B}$ . Recordar que un conjunto  $U$  es abierto en  $\mathcal{T}_d$  si para todo punto  $x \in U$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ .

Sea entonces  $P = (x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ , y sea  $\epsilon = \min\{x_0 - a, b - x_0, y_0 - c, d - y_0\}$ . Si  $(s, t) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$  vale que  $\sqrt{(s - x_0)^2 + (t - y_0)^2} < \epsilon$ . En particular,  $|s - x_0| < \epsilon$  y  $|t - y_0| < \epsilon$ , con lo cual:

- $s < \epsilon + x_0 \leq b - x_0 + x_0 = b$  (por ser  $\epsilon$  el mínimo del conjunto),
- $s > x_0 - \epsilon \geq x_0 - (x_0 - a) = a$  (por ser  $\epsilon$  el mínimo del conjunto, con lo cual  $-\epsilon$  es mayor que todos ellos).



Esto prueba que  $s \in (a, b)$ ; una cuenta análoga prueba que  $t \in (c, d)$ , lo que implica que  $B((x_0, y_0), \epsilon) \subset (a, b) \times (c, d)$  como queríamos ver.

**Veamos la inclusión  $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_p$ .** Recordar que el conjunto  $\{B((x_0, y_0), \epsilon) : (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \epsilon > 0\}$  es una base para la topología de  $\mathcal{T}_d$ . Luego basta probar que cada tal abierto está en  $\mathcal{T}_p$ .

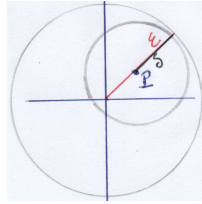
Para simplificar un poco la demostración, veamos primero lo siguiente:

**Afirmación 1:** la bola  $B((x_0, y_0), \epsilon)$  contiene al cuadrado  $(x_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, x_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}) \times (y_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$ .

Si  $(s, t) \in (x_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, x_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}) \times (y_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$  entonces  $|s - x_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$  y  $|t - y_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ , con lo cual

$$d((s, t), (x_0, y_0)) = \sqrt{(s - x_0)^2 + (t - y_0)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon.$$

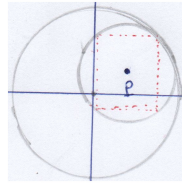
**Afirmación 2:** Si  $(s, t) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$ , llamemos  $r = d((s, t), (x_0, y_0))$  y tomemos  $\delta = \epsilon - r > 0$  entonces  $B((s, t), \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$ .



Si  $P = (u, v) \in B((s, t), \delta)$ , entonces

$$d((u, v), (x_0, y_0)) \leq d((u, v), (s, t)) + d((s, t), (x_0, y_0)) < \delta + r = \epsilon.$$

Veamos como estas dos afirmaciones implican el resultado: como  $\mathcal{B}$  es una base para la topología, basta con probar que dado  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y  $\epsilon > 0$ , si  $P = (s, t) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $(s - \delta, s + \delta) \times (t - \delta, t + \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$ . Pero por la segunda afirmación, existe  $\delta > 0$  tal que  $B((s, t), \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$ , y por la primera afirmación  $(s - \frac{\delta}{\sqrt{2}}, s + \frac{\delta}{\sqrt{2}}) \times (t - \frac{\delta}{\sqrt{2}}, t + \frac{\delta}{\sqrt{2}}) \subset B((s, t), \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$ . Así obtenemos que  $B((x_0, y_0), \epsilon)$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}$  y por lo tanto está en  $\mathcal{T}_p$ .



Notar que la igualdad de las topologías, se traduce en probar que una bola contiene un cuadrado, y un cuadrado contiene una bola.

**EJERCICIO 8.** De manera análoga, si  $X_1, \dots, X_r$  son espacios topológicos, podemos definir una topología en  $X_1 \times \dots \times X_r$  tomando como base de la topología los conjuntos que son producto de abiertos. Verificar que esto es una base para una topología.

### 3.3. Interior, clausura y borde.

DEFINICIÓN. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, y  $A \subset X$  entonces definimos:

- un punto  $x \in A$  es un *punto interior de  $A$*  si existe un abierto  $U$  tal que  $x \in U \subset A$ .
- un punto  $x \in X$  es un *punto clausura de  $A$*  si para todo abierto  $U$  que contiene al punto  $x$  vale que  $U \cap A \neq \emptyset$ .
- un punto  $x \in X$  es un *punto de acumulación de  $A$*  si para todo abierto  $U$  que contiene al punto  $x$  vale que  $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .

Notar que un punto de acumulación es siempre un punto clausura. A la vez, todos los elementos del conjunto  $A$  son puntos clausura. No obstante, no siempre punto clausura es un punto de acumulación. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}$  si tomamos  $A = \{0\}$ , entonces el único punto de  $A$  es un punto clausura, pero no es un punto de acumulación.

DEFINICIÓN. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, y  $A \subset X$ , definimos los siguientes conjuntos:

1. El interior de  $A$ , denotado  $A^0$  es el conjunto de puntos interiores.
2. La clausura de  $A$ , denotada  $\overline{A}$  es el conjunto de los puntos clausura.
3. El *borde* de  $A$  (o la *frontera* de  $A$ ), denotado  $\partial(A)$  (o  $\text{Fr}(A)$ ) esta dado por  $\partial(A) := \overline{A} \cap \overline{A}^c$ .

Claramente,  $A^0 \subset A \subset \overline{A}$ .

PROPOSICIÓN 1.5. *Con las definiciones anteriores, valen las siguientes propiedades:*

1.  $A^0$  es la unión de los abiertos contenidos en  $A$ , o sea  $A = \cup_{U \subset A} U$ , donde la unión es sobre conjuntos abiertos.
2.  $\overline{A}$  es la intersección de los cerrados que contienen al conjunto  $A$ , o sea  $\overline{A} = \cap_{A \subset V} V$ , donde la intersección es sobre conjuntos cerrados.
3.  $x \in X$  es un punto de acumulación si y sólo si  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ .

DEMOSTRACIÓN. Para ver las igualdades precisamos probar las doble inclusiones.

1.  $\subset$ ). Si  $x \in A^0$ , existe  $U_0 \subset A$  abierto que contiene a  $x$ , con lo cual  $x \in \cup_{U \subset A} U$ , con  $U$  abiertos.  
 $\supset$ ). Si  $x \in \cup_{U \subset A} U$ , en particular existe un abierto  $U_0$  tal que  $x \in U_0$ , pero entonces  $x$  cumple la definición de punto interior.
2.  $\subset$ ). Supongamos que  $x \in \overline{A}$ , y sea  $V \supset A$  un conjunto cerrado. Luego  $V^c$  es abierto. Si  $x \notin V$ , entonces  $x \in V^c$  y  $V^c \cap A = \emptyset$  lo que contradice la condición de ser un punto de acumulación. Luego  $x \in V$ .  
 $\supset$ ). Supongamos que  $x$  es un elemento de la intersección, y sea  $U$  un abierto cualquiera que contiene a  $x$ . Si  $U \cap A = \emptyset$  entonces  $A \subset U^c$  que es un cerrado con lo cual  $x \in U^c$  lo que contradice que  $x$  era un elemento de  $U$ . Luego  $U \cap A \neq \emptyset$  lo que implica que  $x \in \overline{A}$ .
3.  $\Leftrightarrow$ ) Supongamos que  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$  y veamos que es un punto de acumulación de  $A$ . Sea  $U$  un abierto cualquiera que contiene a  $x$ . Como  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ ,  $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ , con lo cual  $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$  con lo cual  $x$  es un punto de acumulación de  $A$  por definición.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x$  es un punto de acumulación de  $A$ , y veamos que  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ . Sea  $U$  un abierto cualquiera que contenga a  $x$ . Por definición de un punto de acumulación,  $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ . Pero  $A \cap (U \setminus \{x\}) = (A \setminus \{x\}) \cap U$ , con lo cual  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$  por definición de clausura.  $\square$

**COROLARIO 1.6.** *Un subconjunto  $A$  es abierto si y sólo si  $A = A^0$ .*

**PROPOSICIÓN 1.7.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, y  $A \subset X$  entonces  $\overline{A} = A \cup A'$ , donde  $A'$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $A$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Claramente  $A \subset \overline{A}$ , y  $A' \subset \overline{A}$ , con lo cual una inclusión es fácil. Para ver la otra inclusión, supongamos que  $x \in \overline{A}$  pero  $x \notin A$ , en cuyo caso queremos ver que  $x \in A'$ . Sea  $U$  un abierto cualquiera que contiene a  $x$ , y miremos el conjunto  $U \cap A$ . Como  $x \in \overline{A}$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$ . Por otro lado, como  $x \notin A$ , vale que  $U \cap A \setminus \{x\} = U \cap A \neq \emptyset$  con lo cual  $x \in A'$ .  $\square$

**DEFINICIÓN.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Un subconjunto  $Y \subset X$  se dice *denso* si su clausura es todo  $X$ , o sea  $\overline{Y} = X$ .

**EJEMPLO 5.** El conjunto  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ .

**DEFINICIÓN.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice *separable* si contiene un subconjunto denso que sea numerable.

- EJEMPLOS.**
1. El espacio topológico  $\mathbb{R}^n$  (con la topología usual) es separable.
  2. Si  $X$  es un conjunto cualquiera, el espacio topológico  $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  es separable si y sólo si  $X$  es numerable.

#### 4. Algunas propiedades de espacios topológicos

Antes de ver mas ejemplos y construcciones de espacios topológicos, veamos algunas propiedades importantes que tienen algunos espacios topológicos.

**DEFINICIÓN.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice que satisface el *primer axioma de contabilidad* (o que es  $N_1$ ) si todo punto  $x \in X$  posee una base de abiertos numerables en  $x$ . O sea para todo  $x \in X$  existen  $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  abiertos tales que si  $V \subset X$  es abierto, y  $x \in V$  entonces existe  $n_0$  tal que  $U_{n_0}(x) \subset V$ .

**DEFINICIÓN.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice que satisface el *segundo axioma de contabilidad* (o que es  $N_2$ ) si existe una base numerable para la topología. O sea existen  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  abiertos y base de la topología.

**LEMA 1.8.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  satisface el segundo axioma de contabilidad entonces también satisface el primero.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base numerable para la topología. Dado  $x \in X$ , miremos el subconjunto  $\mathcal{B}(x) = \{U_n \in \mathcal{B} : x \in U_n\}$ . Veamos que este es una base de abiertos numerable de  $x$ . Claramente es numerable. Si  $U$  es un abierto, y  $x \in U$ , como  $\mathcal{B}$  es una base, existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subset U$ . En particular, existe  $n_0$  tal que  $V = U_{n_0}$ , como queríamos ver.  $\square$

- EJEMPLOS.**
1. Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces satisface el primer axioma de numerabilidad. La razón es que dado  $x \in X$ , el conjunto  $\{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de abiertos numerable de  $x$ .

2. El espacio topológico  $(\mathbb{R}^n, d)$ , donde  $d$  es la métrica usual, o sea dada por

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

satisface el segundo axioma de contabilidad.

Para ver esto, debemos dar una base numerable para la topología. Por ejemplo, podemos tomar  $\mathcal{B} = \{B(x, 1/n) : x \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}\}$ . Este conjunto es numerable, debemos ver que es una base de la topología. Claramente todos ellos son abiertos, con lo cual tenemos que probar que si  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $V$  es abierto, entonces hay un elemento  $U$  de la base que cumple  $v \in U \subset V$ .

Por definición, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x \in B(x, \epsilon) \subset V$ . Sea  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ . Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe  $y \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $d(x, y) < \frac{1}{2n_0}$  (si nunca se vio esto, vale la pena escribir una demostración). Con esta construcción, afirmamos que  $B(y, \frac{1}{2n_0}) \subset B(x, \epsilon) \subset V$ .

Si  $z \in B(y, \frac{1}{2n_0})$ ,  $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0} < \epsilon$ . Luego  $B(y, \frac{1}{2n_0}) \subset B(x, \epsilon)$ , como queríamos ver.

3. Si  $X = \mathbb{R}$  (o cualquier conjunto no numerable), y tomamos  $\mathcal{T}_{\text{disc}}$  la topología discreta en  $X$ , entonces este espacio topológico satisface el primer axioma de contabilidad pero no el segundo.

Para ver esto, notemos que si  $x \in X$ , entonces  $\{\{x\}\}$  es una base de abiertos de  $x$ , luego  $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  es  $N_1$ . Por otro lado, como los puntos son abiertos, cualquier base de la topología debe contener al conjunto  $\{\{x\} : x \in X\}$ , el cual claramente no es numerable.

**DEFINICIÓN.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice  $T_0$  si cumple que dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , vale al menos una de las siguientes dos propiedades:

- existe  $U \subset X$  abierto tal que  $x \in U$  y  $y \notin U$ .
- existe  $U \subset X$  abierto tal que  $y \in U$  y  $x \notin U$ .

**DEFINICIÓN.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice  $T_1$  si los puntos son cerrados.

**DEFINICIÓN.** Un espacio topológico se dice  $T_2$  o Hausdorff si cumple que los conjuntos abiertos separan puntos, o sea dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$  existen abiertos  $U, V$  tales que  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

**LEMA 1.9.** Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, entonces  $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos que  $T_2$  implica  $T_1$ : sea  $x \in X$  un punto cualquiera. Para ver que  $\{x\}$  es cerrado, debemos ver que su complemento es abierto. Si  $y \neq x$ , por ser nuestro espacio topológico  $T_2$ , existen  $U_x, V_y$  abiertos disjuntos tales que  $x \in U_x$  y  $y \in V_y$ . Luego  $X \setminus \{x\} = \cup_{y \neq x} V_y$ , es abierto, como queríamos ver.

Veamos que  $T_1$  implica  $T_0$ : dados  $x \neq y$ , como el conjunto  $\{x\}$  es cerrado, su complemento  $X \setminus \{x\}$  es abierto, y claramente  $y \in X \setminus \{x\}$  por ser  $x \neq y$ .  $\square$

- EJEMPLOS.**
1. Sea  $(X, \mathcal{T})$  el espacio topológico dado por  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}\}$ . Luego  $(X, \mathcal{T})$  no es  $T_0$ , dado si tomamos como puntos  $x = 1$ ,  $y = 2$ , entonces no existe ningún abierto que contenga a uno de ellos y no al otro.
  2. Sea  $(X, \mathcal{T})$  el espacio topológico dado por  $X = \{1, 2, 3\}$  y  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$ . Notemos que dicho espacio es  $T_0$ , dado que si  $x = 1, y = 2$ , entonces  $2 \in \{2\}$ , que es abierto, y  $1 \notin \{2\}$ . Si  $x = 1, y = 3$ , entonces  $1 \in \{1, 2\}$ , que es abierto y no contiene al 3, mientras que si  $x = 2, y = 3$  el

abierto  $\{2\}$  contiene al 2 pero no al 3. No obstante,  $(X, \mathcal{T})$  no es  $T_1$ , dado que el punto 2 no es cerrado.

3. Sea  $X$  un conjunto cualquiera, y definimos  $\mathcal{T}$  de la siguiente manera: un conjunto  $U \subset X$  es abierto si  $U = \emptyset$ , o si su complemento  $X \setminus U$  es un conjunto finito. Dejamos como ejercicio para el lector verificar que esto da una topología en el conjunto  $X$ . Mas aún, si  $X$  es finito, dicha topología es la topología discreta. Afirmamos que si  $X$  no es un conjunto finito, entonces  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_1$  pero no es  $T_2$ .

La afirmación de que es  $T_1$  es clara: si  $x \in X$  es un punto, debemos ver que  $\{x\}$  es cerrado, o sea que  $X \setminus \{x\}$  es abierto, lo cual por definición equivale a ver que su complemento (que es el conjunto  $\{x\}$ ) es finito, lo cual claramente vale.

Veamos que si  $X$  no es finito, entonces  $(X, \mathcal{T})$  no es  $T_2$ : sean  $x, y \in X$  dos puntos distintos, y supongamos que existen abiertos disjuntos  $U, V$  tales que  $x \in U, y \in V$ . Como  $U \cap V = \emptyset, X = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ . Como  $U$  y  $V$  son abiertos, sus complementos son finitos, con lo cual  $X$  lo es.

Los ejemplos anteriores muestran que las condiciones  $T_0, T_1$  y  $T_2$  son distintas en espacios topológicos arbitrarios.

**OBSERVACIÓN.** La topología de complemento finito aparece naturalmente en “geometría algebraica”. Si uno quiere entender la recta  $\mathbb{C}$  (que corresponde a los ideales maximales del anillo  $\mathbb{C}[x]$ ), los cerrados para la topología Zariski son los llamados “conjuntos algebraicos”, que corresponden a soluciones de sistemas de polinomios. Como un polinomio en  $\mathbb{C}[x]$  tiene finitas raíces, los conjuntos cerrados son precisamente los conjuntos finitos. El hecho de que la topología Zariski no sea Hausdorff es un problema no menor en geometría.

**PROPOSICIÓN 1.10.** *Todo espacio métrico es Hausdorff.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , llamemos  $r = d(x, y) > 0$ . Luego  $B(x, r/2) \cap B(y, r/2) = \emptyset$  pues si  $z$  es un punto en dicha intersección, entonces  $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r/2 + r/2 = r$ , lo cual es un absurdo. Además,  $x \in B(x, r/2), y \in B(y, r/2)$ .  $\square$

**EJERCICIO 9.** Probar que si  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  y  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  son dos espacios topológicos Hausdorff, entonces el producto  $X_1 \times X_2$  (con la topología producto) es Hausdorff también.

**TEOREMA 1.11.** *Si un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es  $N_2$  entonces es separable.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una base numerable para la topología, y sea  $x_i \in U_i$  un elemento cualquiera. Afirmo que  $S = \cup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$  es un conjunto denso en  $X$ .

Recordar que un conjunto  $S$  es denso si  $\overline{S} = X$ . Para esto debemos ver que todo elemento de  $X$  es o bien un punto de  $S$  o un punto de acumulación de él (por la Posposición 1.7). Sea  $x \in X$ . Si  $x \in S$ , listo; sino sea  $U$  un abierto que contiene a  $x$ . Luego como  $\mathcal{B}$  es una base para la topología, existe  $i_0$  tal que  $x \in U_{i_0} \subset U$ . Luego, como  $x$  no es un elemento de  $S, S \setminus \{x\} = S$  y por lo tanto  $x_{i_0} \in U_{i_0} \cap (S \setminus \{x\}) \subset U \cap (S \setminus \{x\})$ , con lo cual  $x$  es un punto de acumulación.  $\square$

Notar que combinando las dos cosas que hemos demostrado, un espacio que satisface el segundo axioma de contabilidad, en particular es separable y satisface el primer axioma de contabilidad. La recíproca no es cierta, como verán en las prácticas.

**PROPOSICIÓN 1.12.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces  $X$  es  $N_2$  si y sólo si es separable.*

**DEMOSTRACIÓN.** Ya sabemos que  $N_2$  implica separable. Para la recíproca, si  $(X, d)$  es separable, sea  $S = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$  un conjunto denso numerable. Con un argumento similar al utilizado al probar que  $\mathbb{R}^n$  es  $N_2$  demuestra que el conjunto  $\{B(x_i, 1/n) : i, n \in \mathbb{N}\}$  es una base numerable para la topología. Dejamos los detalles para el lector.  $\square$

## Funciones Continuas

DEFINICIÓN. Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Decimos que la función es *continua* si la preimagen de conjuntos abiertos de  $Y$  son abiertos en  $X$ , o sea vale que si  $U \in \mathcal{T}'$  entonces  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ .

Es fácil verificar que valen las siguientes propiedades:

- $f^{-1}(\cap_{i \in I} U_i) = \cap_{i \in I} (f^{-1}(U_i))$ ,
- $f^{-1}(\cup_{i \in I} U_i) = \cup_{i \in I} (f^{-1}(U_i))$ ,
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ,
- $f^{-1}(Y) = X$ .

Luego el conjunto  $f^{-1}(\mathcal{T}')$  es una topología en  $X$  (la inducida por la función  $f$ ). Pedir que  $f$  sea continua es pedir que la topología  $\mathcal{T}$  sea mas fina que la inducida por  $f$ .

Antes de dar ejemplos, veamos una formulación un poco mas débil de continuidad de una función.

PROPOSICIÓN 2.1. Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y sea  $\mathcal{B}$  una base para la topología de  $Y$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces  $f$  es continua si y sólo si la preimagen de elementos de  $\mathcal{B}$  son abiertos en  $X$ .

DEMOSTRACIÓN.  $\Rightarrow$ ) Claramente los elementos de  $\mathcal{B}$  son abiertos de  $Y$ , con lo cual si  $f$  es continua la preimagen de dichos elementos deben ser abiertos en  $X$ .

$\Leftarrow$ ) Veamos dos maneras distintas de probar esto. La primera es formal:  $\mathcal{B}$  genera la topología  $\mathcal{T}'$ , y por las propiedades listadas arriba  $f^{-1}(\mathcal{B})$  es base para la topología  $\mathcal{T}_f = f^{-1}(\mathcal{T}')$  en  $X$ . Al ser  $\mathcal{T}$  una topología, si  $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}$  es claro que  $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}$  es cerrado por uniones) como queríamos ver.

La segunda forma la escribimos para reforzar los conceptos vistos hasta aquí. Sea  $U \subset Y$  un conjunto abierto. Queremos ver que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Notar que basta probar que dado  $x \in f^{-1}(U)$  existe un abierto  $V_x$  tal que  $x \in V_x \subset f^{-1}(U)$ . Luego

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x.$$

Como  $f(x) \in U$  (abierto), y  $\mathcal{B}$  es una base para la topología, existe  $W_{f(x)} \in \mathcal{B}$  tal que  $f(x) \in W_{f(x)} \subset U$ . Luego por hipótesis  $V_x = f^{-1}(W_{f(x)})$  es abierto en  $X$  y vale que  $x \in V_x \subset f^{-1}(U)$ .  $\square$

EJERCICIO 10. Si  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  son espacios topológicos, y  $S$  es una sub-base de la topología  $\mathcal{T}'$ , entonces una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si la preimagen de elementos de  $S$  son abiertos en  $X$ .

EJEMPLO 6. Tomemos  $X = Y = \mathbb{R}$ , con la topología usual. Notar que una base para la topología es  $\mathcal{B} = \{(y - \epsilon, y + \epsilon) : y \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$ . Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una

función cualquiera. Entonces por la Proposición 2.1,  $f$  es continua si la preimagen de elementos de  $\mathcal{B}$  son abiertos. Pero pedir que  $f^{-1}(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$  sea abierto, equivale a pedir que si  $x_0 \in f^{-1}(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$  entonces existe un intervalo alrededor de  $x_0$  que este contenido en dicho conjunto; o sea existe  $\delta > 0$  tal que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ ; equivalentemente, para todo  $x_0$  tal que  $|f(x_0) - y_0| < \epsilon$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$  entonces  $|f(x) - y_0| < \epsilon$ .

Notar que esta definición es parecida a la dada en Análisis I, ¡pero no es exactamente igual! La definición a la que estamos acostumbrados es así:  $f$  es continua si para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

No entremos en pánico, dado que ambas condiciones son en realidad equivalentes. La definición de Análisis I lo que está diciendo (geoméricamente) es que podemos simplemente entender el caso de intervalos centrados en el punto  $x_0$  en lugar de tomar un intervalo cualquiera (lo mismo nos sucedió en el Ejemplo 4). Lo que sucede es que la noción de abiertos en espacio métricos es una propiedad “local”, con lo cual siempre podemos achicar el intervalo.

Formalmente: veamos que si vale nuestra definición de continuidad entonces también vale la de Análisis I. Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y  $\epsilon > 0$ , miremos el intervalo  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  (centrado en  $f(x_0)$  con radio  $\epsilon$ ). Como  $f(x_0) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  por nuestra definición existe  $\delta > 0$  tal que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ , equivalentemente si  $|x - x_0| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

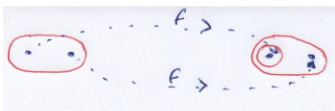
Veamos que si vale la definición de Análisis I entonces también vale la nuestra. Queremos ver que para todo  $y_0 \in \mathbb{R}$  y todo  $\epsilon > 0$ , si  $x_0$  tal que  $|f(x_0) - y_0| < \epsilon$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$  entonces  $|f(x) - y_0| < \epsilon$ . Sea  $d = |f(x_0) - y_0| < \epsilon$ , y  $\tilde{\epsilon} = \epsilon - d$  (comparar con la Afirmación 2 del Ejemplo 4). Entonces  $(f(x_0) - \tilde{\epsilon}, f(x_0) + \tilde{\epsilon}) \subset (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ . Por la definición de continuidad de Análisis I, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \tilde{\epsilon}$ . Luego, por la desigualdad triángula

$$|f(x) - y_0| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - y_0| < \tilde{\epsilon} + d = \epsilon.$$

En particular, tenemos que sacar dos cosas en claro de esto: **primero** la noción de continuidad que dimos al mirar el espacio topológico real es la misma que ya habían visto en Análisis I (lo mínimo esperado). **Segundo** al trabajar con espacio métricos, siempre vamos a poder restringirnos a trabajar con bolas centradas, pues el argumento del Ejemplo 4 y dado también en este ejemplo va a funcionar siempre.

EJEMPLOS. Veamos algunos ejemplos nuevos.

1. Tomemos  $(X, \mathcal{T}) = (\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\})$ ,  $(Y, \mathcal{T}') = (\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}\})$ , y miremos  $f : X \rightarrow Y$  la función identidad (o sea  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ).



Aunque parezca mentira, la función identidad no es continua. La razón es que  $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$  que no es un elemento de  $\mathcal{T}$ . Es importante entender que la noción de continuidad no es algo que dependa solamente de la

función  $f$ , sino que depende fuertemente de las topologías involucradas en los conjuntos.

2. Si  $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  es un espacio topológico cualquiera con la topología discreta, entonces toda  $f : X \rightarrow Y$  (para cualquier espacio topológico  $Y$ ) es continua. La razón es que la topología discreta es mas fina que la cualquier otra, en particular que la inducida por cualquier  $f$ .
3. Si  $(Y, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$  es un espacio topológico con la topología trivial, cualquier función  $f : X \rightarrow Y$  es continua. La razón es que la topología inducida por  $f$  es simplemente  $\{X, \emptyset\}$ , que está contenido en cualquier topología.
4. Si  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  son espacios topológicos, entonces las funciones proyecciones  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  y  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  son continuas (donde en  $X \times Y$  consideramos la topología producto  $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ ). Mas aún, si  $\tilde{\mathcal{T}}$  es una topología en  $X \times Y$  tal que las proyecciones  $\pi_i, i = 1, 2$  son continuas, entonces  $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subset \tilde{\mathcal{T}}$  (o sea la topología producto es la menos fina que hace a las proyecciones contrinuas).

La primera afirmación es clara, dado que si  $U \in \mathcal{T}$ , entonces  $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$  que es un elemento de  $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ . Lo mismo con la otra proyección. A la vez, como  $\mathcal{T}_{\text{prod}}$  tiene al conjunto  $\{\pi_1^{-1}(U), \pi_2^{-1}(V) : U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}'\}$  como sub-base, la segunda afirmación también es directa.

**PROPOSICIÓN 2.2.** Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es continua.
2. La preimagen por  $f$  de cerrados es cerrado.
3. Para todo  $A \subset X$  vale que  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .
4. Para todo  $B \subset Y$  vale que  $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$ .

**DEMOSTRACIÓN.**  $1 \Rightarrow 2$ . Si  $V \subset Y$  es cerrado,  $V^c$  es abierto. Luego  $f^{-1}(V^c)$  es abierto, con lo cual  $(f^{-1}(V^c))^c$  es cerrado, pero por el Ejercicio 2.(e) de la guía  $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$ , con lo cual  $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V^c))^c$ .

$2 \Rightarrow 3$ . El conjunto  $\overline{f(A)}$  es cerrado, con lo cual  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  es cerrado, y como contiene al conjunto  $A$ , vale que  $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ , con lo cual (aplicando  $f$ )  $f(\overline{A}) \subset f \circ f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f(A)}$ .

$3 \Rightarrow 4$ . Sea  $A = f^{-1}(B) \subset X$ . Por hipótesis,  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ , o sea  $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$ . Luego calculando preimágenes,  $f^{-1}(\overline{B}) \subset f^{-1} \circ f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ .

$4 \Rightarrow 2$ . Es inmediato, dado que si  $B \subset Y$  es cerrado,  $B = \overline{B}$ , con lo cual  $f^{-1}(B) \supset \overline{f^{-1}(B)}$ , y como la otra inclusión vale siempre,  $f^{-1}(B)$  es cerrado.

$2 \Rightarrow 1$ . Lo dejamos como ejercicio (es similar a ver  $1 \Rightarrow 2$ ).  $\square$

**TEOREMA 2.3.** Si  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{T}')$  y  $(Z, \mathcal{T}'')$  son espacios topológicos, y  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  son funciones continuas, entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es continua.

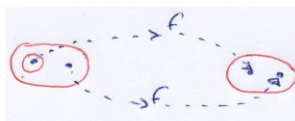
**DEMOSTRACIÓN.** La demostración es muy elemental: si  $U \in \mathcal{T}''$ , entonces  $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ . Como  $g$  es continua,  $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$ , y como  $f$  es continua,  $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ .  $\square$

**EJERCICIO 11.** Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Miremos  $\text{Im}(f)$  (la imagen de  $f$ ) como espacio topológico (con la topología de subespacio). Entonces  $f : X \rightarrow \mathfrak{S}(f)$  es continua.

DEFINICIÓN. Si  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  son espacios topológicos, una función  $f : X \rightarrow Y$  es un *homeomorfismo* si  $f$  es biyectiva, continua y su inversa es continua.

La noción de un homeomorfismo es que no sólo nos permite identificar los elementos de  $X$  con los de  $Y$  (a través de  $f$ ), sino que hace lo mismo con los abiertos, o sea abiertos de  $X$  se corresponden con abiertos de  $Y$  y viceversa.

EJERCICIO 12. Sean  $X = Y = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}\}$  y  $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$ , y sea  $f : X \rightarrow Y$  la función identidad. Probar que  $f$  es continua, biyectiva pero no es un homeomorfismo.

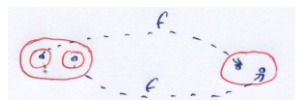


DEFINICIÓN. Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice *abierto* (respectivamente *cerrada*) si cumple que si  $U \in \mathcal{T}$  entonces  $f(U) \in \mathcal{T}'$  (respectivamente, si  $U$  es cerrado en  $X$  entonces  $f(U)$  es cerrado en  $Y$ ).

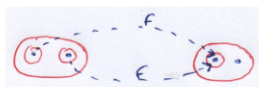
Notar que la noción de una función ser abierta/cerrada tiene que ver con “empujar” cosas por  $f$ , no traer para atrás.

EJEMPLOS. Sean  $X = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}\}$ ,  $\mathcal{T}_{\text{disc}}$  la topología discreta y  $\mathcal{T}_{\text{triv}}$  la topología trivial.

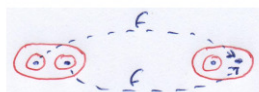
1. La función  $f : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{triv}})$  dada por la identidad es continua, pero no es abierta ni cerrada.

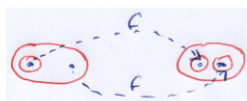


2. La función  $f : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  dada por  $f(1) = f(2) = 1$  es continua, abierta pero no es cerrada.



3. La función  $f : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  dada por  $f(1) = f(2) = 2$  es continua, cerrada pero no es abierta.





4. La función  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  dada por la identidad es abierta y cerrada, pero no es continua.

LEMA 2.4. Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y biyectiva. Entonces son equivalentes:

1.  $f$  es un homeomorfismo.
2.  $f$  es abierta.
3.  $f$  es cerrada.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por  $g : Y \rightarrow X$  la función inversa de  $f$ .

$1 \Leftrightarrow 2$ . Sabemos que  $g$  es continua si y sólo si para todo  $U \in \mathcal{T}$  vale que  $g^{-1}(U)$  es abierto, pero  $g^{-1}(U) = f(U)$ .

$1 \Leftrightarrow 3$ . Sabemos que  $g$  es continua si y sólo si para todo  $U \subset X$  cerrado vale que  $g^{-1}(U)$  es cerrado, pero  $g^{-1}(U) = f(U)$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.5. Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, y sean  $U, V$  abiertos en  $X$  tales que  $X = U \cup V$ . Sea  $(Y, \mathcal{T}')$  un espacio topológico, y sean  $f : U \rightarrow Y$ ,  $g : V \rightarrow Y$  funciones continuas (donde  $U$  y  $V$  los pensamos con la topología subespacio) tales que si  $x \in U \cap V$  entonces  $f(x) = g(x)$ . Entonces existe una única función  $h : X \rightarrow Y$  continua que coincide con  $f$  en  $U$  y con  $g$  en  $V$ . Lo mismo vale si  $U$  y  $V$  son cerrados.

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.  $\square$

EJERCICIO 13. Sean  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, y sea  $(Y, \mathcal{T}')$  un espacio topológico Hausdorff. Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  funciones continuas. Probar que el conjunto  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es cerrado en  $X$ . ¿Sigue valiendo si  $(Y, \mathcal{T}')$  no es Hausdorff?

## 1. Sucesiones y redes

Recordar que una sucesión en  $X$  es una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Las sucesiones en general las denotamos por  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Notar que si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, una sucesión es una función continua  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ , dado que como  $\mathbb{N}$  tiene naturalmente asociada la topología discreta, toda función es continua. ¿Que quiere decir que una sucesión converja a un punto?

DEFINICIÓN. Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $X$ . Decimos que la sucesión converge a  $x_0 \in X$  si vale que para todo abierto  $U \in \mathcal{T}$  que contiene a  $x_0$ , existe  $n_0$  tal que  $x_n \in U$  para todo  $n \geq n_0$ .

EJEMPLO 7. Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces  $x_n \rightarrow x_0$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $|x_n - x_0| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , dado que  $B(x_0, \epsilon)$  forman una base de abiertos de  $x_0$  (recordar que esta es la definición que usaron en Análisis I).

EJEMPLO 8. Sea  $X = \{1, 2\}$  como espacio topológico con la topología trivial. Miremos la sucesión  $\{1\}_{n \in \mathbb{N}}$  (o sea la función constantemente 1). Claramente  $\{1\}_{n \in \mathbb{N}}$

converge a 1, ¡pero también converge a 2! La razón es que cualquier abierto que contenga al 2 contiene todos los elementos de la sucesión, con lo cual satisface la definición de ser límite. En particular, una sucesión puede converger a muchos puntos distintos.

EJERCICIO 14. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , encontrar un espacio topológico y una sucesión en él que converja exactamente a  $n$  puntos distintos.

EJERCICIO 15. Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ es finito}\}$  (la llamada topología del complemento finito). Ver que  $\mathcal{T}$  es una topología. Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión que como función es inyectiva (o sea  $x_n \neq x_m$  si  $n \neq m$ ). Probar que  $\{x_n\}$  converge a 0 (y en realidad a cualquier punto real).

TEOREMA 2.6. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico que es Hausdorff, entonces toda sucesión converge a lo sumo un único punto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión que converge a dos puntos  $x, y$ , con  $x \neq y$ . Como  $(X, \mathcal{T})$  es Hausdorff, existen abiertos disjuntos  $U, V$  tales que  $x \in U, y \in V$ . Como  $\{x_n\}$  converge a  $x$ , existe  $n_0$  tal que  $x_n \in U$  para todo  $n \geq n_0$ , pero como  $U \cap V = \emptyset, x_n \notin V$  para todo  $n \geq n_0$  con lo cual  $\{x_n\}$  no puede converger a  $y$ .  $\square$

Como todo espacio métrico es Hausdorff, siempre hay a lo sumo un único punto de convergencia.

LEMA 2.7. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico donde vale que toda sucesión converge a lo sumo a un único punto, entonces  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_1$ .

DEMOSTRACIÓN. Recordar que  $T_1$  por definición es que los puntos son cerrados. Supongamos que existe  $x \in X$  que no es cerrado, o sea existe  $y \neq x$  tal que  $y \in \overline{\{x\}}$ . Afirmando entonces que la sucesión  $\{x\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge tanto a  $x$  (lo que es claro) como a  $y$ .

Como  $y \notin \{x\}$ , y esta en su clausura, debe ser un punto de acumulación. O sea, si  $U$  es un abierto, con  $y \in U, \{x\} \cap (U \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ . En particular,  $x \in U$  para todo abierto que contenga a  $y$ , luego  $\{x\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$ .  $\square$

Notar que el Ejercicio 15 muestra un espacio topológico que es  $T_1$  pero no hay unicidad en la convergencia, luego esta propiedad es una condición estrictamente mas fuerte que ser  $T_1$  pero mas débil que ser  $T_2$  (debido al Ejercicio 16).

Para los que nunca lo vieron antes, un conjunto  $X$  se dice *numerable* si existe una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  suryectiva. Así todo conjunto finito es numerable, y  $\mathbb{N}$  es numerable. Algunos ejercicios para entender un poco esta definición.

- EJERCICIOS.
1. Probar que si  $X$  es numerable, y existe  $g : X \rightarrow Y$  suryectiva, entonces  $Y$  es numerable.
  2. Probar que  $\mathbb{Z}$  es numerable.
  3. Todo número natural  $n$  que sea par se puede escribir de forma única como  $n = 2^a(2b - 1)$ . Probar que la función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  dada por

$$f(n) = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (a, b) & \text{si } n = 2^a(2b - 1), \end{cases}$$

es una función suryectiva. Decir que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable.

4. Probar que  $\mathbb{Q}$  es numerable.

EJERCICIO 16. Consideremos el conjunto  $X = \mathbb{R}$  con la topología  $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ es numerable}\}$  (la topología llamada de complemento numerable).

- Probar que si  $\{x_n\}$  es una sucesión en  $\mathbb{R}$  que converge a  $x_0$ , entonces existe  $n_0$  tal que  $x_n = x_0$  para todo  $n \geq n_0$ .
- Probar que  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  cumple que toda sucesión converge a lo sumo a un único valor, pero no es  $T_2$ .

TEOREMA 2.8. Sean  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que si  $f$  es continua, entonces si una sucesión  $\{x_n\}$  converge a un punto  $x$  en  $X$ , la sucesión  $\{f(x_n)\}$  converge al punto  $f(x)$  en  $Y$ . La recíproca no es cierta en general, pero si vale por ejemplo si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio métrico si vale.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $x_n \rightarrow x$ , y veamos que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Sea  $U \in \mathcal{T}'$  un abierto tal que  $f(x) \in U$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  y claramente  $x \in f^{-1}(U)$ , con lo cual (por definición de convergencia) existe  $n_0$  tal que  $x_n \in f^{-1}(U)$  para todo  $n \geq n_0$ . Luego  $f(x_n) \in f(f^{-1}(U)) \subset U$  para todo  $n \geq n_0$ , o sea  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Supongamos ahora que  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio métrico y veamos la recíproca. Por la Proposición 2.2 basta ver que para todo conjunto  $A \subset X$ ,  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ . Sea  $y \in \overline{A}$ . Luego vale que  $y \in A$  o sino  $y$  es un punto de acumulación. En el primer caso, claramente  $f(y) \in \overline{f(A)}$ . En el segundo, como estamos en un espacio métrico, podemos tomar el abierto  $B(y, 1/n)$  y como  $y$  es un punto de acumulación, existe  $x_n \in A$  tal que  $|y - x_n| < 1/n$ . En particular la sucesión  $\{x_n\}$  está en  $A$  y converge al punto  $y$ . Luego la sucesión  $f(x_n)$  converge al punto  $f(y)$  por hipótesis, pero como  $f(x_n) \in \overline{f(A)}$  y dicho conjunto es cerrado,  $f(y) \in \overline{f(A)}$  como queríamos ver.  $\square$

La condición de ser métrico se puede reemplazar por la condición de ser  $N_1$ , siendo la demostración casi igual a la dada.

EJERCICIO 17. Consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  donde  $\mathcal{T}$  es la topología de complemento numerable del Ejercicio 16.

1. Probar que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función cualquiera, vale que si  $x_n \rightarrow x_0$  entonces  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  (por el primer ítem del Ejercicio 16).
2. Probar que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1. \\ 2 & \text{si } x \neq 1, \end{cases}$$

no es una función continua.

## 2. Redes

Recordar que un *pre-orden* en un conjunto  $X$  es una relación  $\sim$  que cumple:

- **reflexiva:**  $x \sim x$  para todo  $x \in X$ .
- **transitiva:** si  $x, y, z \in X$  tales que  $x \sim y$  y  $y \sim z$  entonces  $x \sim z$ .

A un orden uno le suele pedir además la propiedad antisimétrica (si  $x \sim y$  y  $y \sim x$  entonces  $x = y$ ). Un *conjunto dirigido* es un par  $(X, \sim)$  donde  $X$  es un conjunto cualquiera, y  $\sim$  es una relación en  $X$  que es un pre-orden y cuyos elementos tienen cota superior, esto es:

- Dados  $x, y \in X$  existe  $z \in X$  tal que  $x \sim z$  y  $y \sim z$ .

Por ejemplo, si  $X$  es un conjunto cualquiera, y tomamos  $Y = \mathcal{P}(X)$  (el conjunto de partes de  $X$ ) con la relación dada por  $A \sim B$  si  $A \subset B$  es un conjunto dirigido.

Notar que en general en un conjunto dirigido, dados dos elementos del conjunto no podemos necesariamente relacionarlos (o sea no vale tricotomía). Al trabajar con conjuntos dirigidos, la relación la vamos a denotar por  $\leq$ .

DEFINICIÓN. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, una *red* en  $X$  es una función  $r : D \rightarrow X$ , donde  $(D, \leq)$  es un conjunto dirigido. Denotaremos una red por  $\{x_d\}_{d \in D}$ .

Como en el caso de sucesiones, tenemos la noción de que una red converga a un punto.

DEFINICIÓN. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, decimos que una red  $\{x_d\}_{d \in D}$  converge a  $x$  si para todo  $U \in \mathcal{T}$  que contiene a  $x$ , existe  $d_0 \in D$  tal que  $x_d \in U$  para todo  $d \geq d_0$ .

Notar que las sucesiones son ejemplos de redes, donde el conjunto dirigido es simplemente  $(\mathbb{N}, \leq)$ . En este caso la noción de convergencia de redes y sucesiones coincide.

PROPOSICIÓN 2.9. *Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es Hausdorff si y sólo si toda red en  $X$  converge a lo sumo a un punto.*

DEMOSTRACIÓN.  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  es Hausdorff, y sea  $(D, \leq)$  un conjunto dirigido y  $\{x_d\}_{d \in D}$  una red en  $X$ . Supongamos que existen  $x_1, x_2 \in X$  distintos tal que la red converge a ambos. Como  $X$  es Hausdorff, existen abiertos  $U, V$  disjuntos tales que  $x \in U, y \in V$ . Como  $x_d \rightarrow x$  existe  $d_1$  tal que  $x_d \in U$  para todo  $d \geq d_1$ . Análogamente, existe  $d_2$  tal que  $x_d \in V$  para todo  $d \geq d_2$ . Como  $D$  es dirigido, existe  $d_3$  mayor que  $d_1$  y que  $d_2$ . Luego  $x_{d_3} \in U \cap V = \emptyset$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $X$  no es Hausdorff. Luego existen  $x, y \in X$  tales que para todo par de abiertos  $(U, V)$  con  $x \in U, y \in V$  vale que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Miremos el conjunto  $D = \{U \in \mathcal{T} : x \in U\} \times \{V \in \mathcal{T} : y \in V\}$ , con el orden dado por  $(U, V) \geq (U', V')$  si  $U \subset U', V \subset V'$ . Notar que dicho orden hace de  $D$  un conjunto dirigido (el conjunto tiene cota superior, a saber  $X \times X$ ). Miremos la red dada por  $r(U, V) = z$  tal que  $z \in U \cap V$  (cualquiera).

Veamos que dicha red converge a  $x$ . Sea  $U_0 \in \mathcal{T}$  es un abierto que contiene a  $x$ , y tomemos un abierto  $V_0$  cualquiera que contenga a  $y$ . Sea  $d_0 = U_0 \times V_0$ . Si  $(U, V) \in D$  cumple que  $(U, V) \geq d_0$ , en particular  $U \subset U_0$ . Recordar que  $r(U, V) = z \in U \cap V \subset U_0$ , luego  $r(d) \in U_0$  para todo  $d \geq d_0$  como queríamos ver. Análogamente se ve que la red converge a  $y$ .  $\square$

TEOREMA 2.10. *Si  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  son espacios topológicos, y  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces  $f$  es continua si y sólo si vale que toda red  $\{x_d\}_{d \in D}$  que converge a  $x \in X$ ,  $\{f(x_d)\}_{d \in D}$  converge a  $f(x)$  en  $Y$ .*

DEMOSTRACIÓN.  $\Rightarrow$ ) Sea  $\{x_d\}_{d \in D}$  una red en  $X$  que converge al punto  $x$ , veamos que  $\{f(x_d)\}_{d \in D}$  converge a  $f(x)$ . Sea  $V$  un abierto en  $Y$  que contiene a  $f(x)$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(V)$  es un abierto en  $X$  que contiene a  $x$ . Como  $x_d \rightarrow x$ , existe  $d_0$  tal que  $x_d \in U$  para todo  $d \geq d_0$ , luego  $f(x_d) \in f(f^{-1}(V)) \subset V$  para todo  $d \geq d_0$  (comparar con la demostración del Teorema 2.8).

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $f$  no es continua, luego existe  $V \in \mathcal{T}'$  tal que  $f^{-1}(V) \notin \mathcal{T}$ . En particular,  $V \neq \emptyset$  y existe  $x \in f^{-1}(V)$  tal que todo abierto  $U \in \mathcal{T}$  que contiene a

$x$  no está contenido en  $f^{-1}(V)$ . Tomemos  $D = \{U \in \mathcal{T} : x \in U\}$  con el orden dado por la inclusión, y la red dada por  $r(U) = y$  tal que  $y \in U \setminus f^{-1}(V)$  (cualquiera).

Claramente, la red  $(D, s)$  converge a  $x$ , pues si  $U$  es abierto y contiene a  $x$ ,  $U \in D$  y entonces  $r(d) \in U$  para todo  $d \geq U$ . Por otro lado, veamos que la red  $(f \circ r, D)$  no puede converger a  $f(x)$ .

Por definición, tomando el abierto  $V$ , si la red converge a  $f(x)$  existe  $U_0 \in D$  tal que  $(f \circ r)(U) \in V$  para  $U \geq U_0$ . Pero por definición, si  $U \in D$ ,  $r(U) = y \notin f^{-1}(V)$  con lo cual  $f(r(U)) \notin V$ .  $\square$