

1. Contar todas las funciones de  $X_3 = \{1, 2, 3\}$  en  $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Mostrar que hay  $m^3$  funciones de  $X_3$  en  $X_m = \{1, 2, \dots, m\}$ , con  $m \geq 1$ .
2. (a) Dar todas las funciones  $f : \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$  y determinar cuáles son inyectivas, suryectivas o biyectivas.  
(b) Dar todas las funciones  $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2\}$ . Decidir cuáles son inyectivas, suryectivas o biyectivas.
3. (a) Calcular la cantidad de funciones inyectivas  $f : [1, 5] \rightarrow [1, 8]$  tales que  $f(5) = 6$ .  
(b) Calcular la cantidad de funciones inyectivas  $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$  tales que  $f(5) = 5$ . ¿Son todas biyectivas?
4. La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos. Sea  $A$  el conjunto de todos los números de 5 dígitos. Dar conjuntos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  y  $A_5$  tales que

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5.$$

¿Cuántos números de 5 dígitos hay?

5. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos y describirlos utilizando uniones y productos cartesianos de conjuntos.
  - (a) El conjunto de los números pares de 5 dígitos.
  - (b) El conjunto de los números de 5 dígitos con sólo un 3.
  - (c) El conjunto de los números capicúas de exactamente 5 dígitos.
  - (d) El conjunto de los números capicúas de a lo sumo 5 dígitos.
6. De una caja que contiene 122 bolillas numeradas del 1 al 122 se extraen 5 bolillas. Determinar cuáles funciones  $f$  y conjuntos  $X$  e  $Y$  describen las siguientes situaciones:
  - (a) las bolillas se extraen una a la vez y cada bolilla que se extrae es restituida.
  - (b) las bolillas se extraen una a la vez pero no son restituidas en la caja.
  - (c) las bolillas se extraen todas al mismo tiempo.

En cada caso calcular la cantidad de funciones posibles.

7. Se tienen 900 tarjetas, numeradas de 100 a 999. Se van sacando tarjetas de a una, y se anota en el pizarrón la suma de los dígitos del número de la tarjeta. Calcular el número de tarjetas que se deben sacar para garantizar que haya un número que se repita 3 veces en el pizarrón.
8. En una clase hay  $n$  chicas y  $n$  chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.
9. ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?
10. ¿Cuántos subconjuntos de  $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$  contienen al menos un número impar?
11. ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

12. Actualmente las patentes de autos en Argentina están formadas por dos letras, tres números y otras dos letras al final (se utiliza un alfabeto de 26 letras).
- ¿Cuál es el número total de patentes que se pueden formar en este sistema?
  - Si, hipotéticamente, se vendieran un millón de autos por año en Argentina, ¿en cuántos años se agotarían las patentes?
13. (a) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra: MATEMATICA?  
 (b) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?  
 (c) Ídem con las palabras ALGEBRA y GEOMETRIA.
14. (a) ¿Cuántos caminos diferentes en  $\mathbb{R}^2$  hay entre  $(0, 0)$  y  $(7, 7)$  si cada camino se construye moviéndose una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba en cada paso?  
 (b) ¿Cuántos caminos hay entre  $(2, 7)$  y  $(9, 14)$ ?  
 (c) Deducir una fórmula general para hallar la cantidad de caminos entre  $(0, 0)$  y  $(m, n)$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ .
15. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de  $n$  lados? (En el práctico 2 este ejercicio se resolvió usando inducción; aquí se deben usar técnicas de conteo).
16. El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más probable: obtener el macho o tener 33?
17. ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?
18. ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:
- no hay restricciones en la selección?
  - el comité debe tener exactamente 2 profesores?
  - el comité debe tener al menos 3 profesores?
  - el profesor  $X$  y el estudiante  $Y$  no pueden estar juntos en el comité?
19. Supongamos que se tiene 8 CD distintos de *Rock*, 7 CD distintos de *Música Clásica* y 5 CD distintos de *Cuarteto*.
- ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?
  - ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?
  - Un sonidista en una fiesta de casamiento planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?
20. (a) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?  
 (b) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 mujeres y 6 hombres en una mesa circular si nunca deben quedar dos hombres juntos?  
 (c) Ídem, pero con 10 mujeres y 7 hombres.
21. Probar que para todo  $i, j, k \in \mathbb{N}_0$  vale que

$$\binom{i+j+k}{i} \binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i! j! k!}.$$

22. Demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale:

$$(a) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

$$(b) \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

*Sugerencia:* Recordar que  $(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$  y elegir  $a, b$  convenientemente.

23. Usando el ejercicio anterior, probar que si el cardinal del conjunto  $A$  es  $n$ , entonces el cardinal de  $\mathcal{P}(A)$  es  $2^n$ . (En el práctico 2 este ejercicio se resolvió usando inducción).

24. Dados  $m, n$  y  $k$  naturales tales que  $m \leq k \leq n$ , probar que se verifica

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}.$$

25. Probar que para todo número natural  $n$  vale que  $\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$ .

## Ejercicios adicionales

26. Supongamos que en una reunión hay  $n$  personas y nos preguntamos por el número de personas que conoce cada una. Convenimos que si una persona conoce a otra, ésta también conoce a la primera, y que nadie se conoce a sí mismo. Probar que hay al menos dos personas que tienen el mismo número de conocidos en la reunión.

27. Con 20 socios de un club se desea formar 5 listas electorales (disjuntas). Cada lista consta de 1 Presidente, 1 Tesorero y 2 vocales. ¿De cuántas formas puede hacerse?

28. ¿De cuántas formas se pueden fotografiar 7 matrimonios en una hilera, de tal forma que cada persona aparezca junto a su cónyuge?

29. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 14 libros distintos entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 3 libros?

30. Mostrar que si uno arroja un dado  $n$  veces, hay  $\frac{6^n}{2}$  formas distintas de obtener una suma par.

31. Sea  $C$  un cuadrado de diagonal 3 en el que marcamos al azar 10 puntos. Demostrar que siempre tenemos al menos dos puntos que están a distancia no mayor que 1.

32. ¿Cuál es el cardinal del conjunto  $\{(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{N}^6 : a + b + c + d + e + f = 26\}$ ?