Topología

Práctico N°2: Funciones continuas. Conexión

1. Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $A \subseteq X$, no vacío.

(a) Probar que la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$ es continua.

(b) Para cada $x \in X$ definimos $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$. Probar que la función $\phi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = d(x, A)$ es continua.

2. Probar que la proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $p(x, y) = x$, es continua y abierta, pero no es cerrada.

3. Sean X un conjunto y τ_1, τ_2 dos topologías en X. Probar que la función identidad $I : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua si y sólo si $\tau_2 \subseteq \tau_1$; y es abierta si y sólo si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

4. Sea $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ el espacio topológico discreto con dos elementos, y $\mathbb{S}$ el *espacio de Sierpiński*, que también tiene dos puntos $\top$ y $\bot$ con la topología $\{\emptyset, \{\top\}, \mathbb{S}\}$. Sea además (X, τ) un espacio topológico arbitrario.

(a) Probar que las funciones continuas $X \to \mathbf{2}$ están en correspondencia biunívoca con los subconjuntos *clopen* (abiertos y cerrados) de X.

(b) Probar que hay una correspondencia biunívoca “natural” entre τ y las funciones continuas $X \to \mathbb{S}$.

Una familia $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X es un *cubrimiento* si $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Es un cubrimiento *abierto* (*cerrado*) si cada A_i lo es.

5. Sea $(A_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X y $f : X \to Y$ una función tal que para todo i la restricción de f a A_i es continua. Probar que f es continua.

6. Supongamos que $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ son funciones entre espacios topológicos. Son equivalentes:

(a) f y g son continuas.

(b) $z \mapsto (f(z), g(z))$ es continua de Z a $X \times Y$.

Decimos que $f : X \to Y$ es *homeomorfismo local* si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x tal que $f \restriction U$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

7. Sean $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ y $[0, 2\pi)$ con las topologías relativas de las usuales de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ respectivamente.

(a) Probar que la función $f : [0, 2\pi) \to S^1$, $f(t) = (\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t}))$, es biyectiva y continua, pero no es abierta ni cerrada y por lo tanto no es un homeomorfismo.

(b) Probar que la función $f : \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = (\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t}))$, es suryectiva y localmente un homeomorfismo pero que no se puede restringir a un subconjunto tal que la restricción sea un homeomorfismo.

8. Sean X e Y espacios topológicos y supongamos que Y es T_2. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Probar que:

(a) $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) Si f y g coinciden en un denso, entonces son iguales.

9. Sea $f : X \to Y$ una función y $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ el *gráfico* de f. Probar que $F : X \to G(f)$, $F(x) := (x, f(x))$ es un homeomorfismo si y sólo si f es continua.

10. Sea $n \geq 2$. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{ todas sus coordenadas son racionales}\},$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{ todas sus coordenadas son irracionales}\}.$$

Probar que $\mathbb{R}^n \setminus A_1$ es conexo pero A_2 no lo es.

11. Sea $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Probar que S^n es conexa si y sólo si $n \geq 2$.

En el siguiente ejercicio, consideramos a $M_n(\mathbb{R})$ topologizado como $\mathbb{R}^{n^2}$.

12. (a) Sea $Y \subseteq M_n(\mathbb{R})$ un subconjunto conexo y sean $A, B \in Y$ tales que $\det(A) > 0$ y $\det(B) < 0$. Probar que existe $C \in Y$ con $\det(C) = 0$.

(b) Probar que $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$ no es conexo.

13. Sea X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto conexo. Pruebe que si Z es un subconjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ entonces Z es conexo. En particular, la clausura de un conexo es un subconjunto conexo.

14. Probar que los siguientes espacios, con las topologías usuales, no son homeomorfos dos a dos:

$$(0,1); \qquad [0,1); \qquad [0,1]; \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

15. Probar que un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas.

Por otro lado, dar un ejemplo de que esto no vale para conjuntos cerrados.

16. Probar que si B es un subconjunto no vacío, abierto, cerrado y conexo de un espacio topológico X, entonces B es una componente conexa de X.

17. Sean X, Y dos espacios topológicos conexos, y $A \subsetneq X$, $B \subsetneq Y$ dos subconjuntos propios. Probar que $X \times Y \setminus A \times B$ es conexo.

18. Verdadero o Falso.

(a) El producto de espacios conexos es conexo.

(b) El producto de espacios arco-conexos es arco-conexo.

(c) La clausura de un arco-conexo es necesariamente arco-conexa.

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ es arcoconexo en $\mathbb{R}^2$.

19. Probar que la *curva del seno topológica*

$$X := \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right) : x > 0 \right\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

es conexa pero no es arco-conexa.

20. Sea X un espacio localmente conexo. Fijamos U un abierto de X y C una componente conexa de U. Probar que $\operatorname{Fr} C \subseteq \operatorname{Fr} U$.

21. Sean $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = A \cup \{0\}$, $I = [0,1]$, y definimos a partir de ellos:

$$X = A \times I, \qquad Y = B \times I, \qquad Z = Y \cup \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

Dotamos a X, Y, Z con la topología como subespacios de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

(a) Determinar las componentes conexas de X, Y y Z, y los subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados.

(b) Determinar si los espacios X, Y y Z son conexos, localmente conexos, arcoconexos o localmente arcoconexos.

22. Sean X un espacio topológico localmente conexo, Y otro espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua suryectiva. Probar que si f es abierta o cerrada, entonces Y es localmente conexo.

Ejercicios Extra

23. Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento cerrado de X, y $f_i : F_i \to Y$ funciones continuas tales que $f_i \restriction_{F_i \cap F_j} = f_j \restriction_{F_i \cap F_j}$ para todo par $i \neq j$. Sea $f : X \to Y$ la función tal que $f \restriction_{F_i} = f_i$.

(a) Pruebe que si I es finito, entonces f es continua.

(b) Encontrar un ejemplo donde I sea numerable y f no sea continua.

(c) Una familia $\{F_i\}_{i \in I}$ se dice **localmente finita** si para cada $x \in X$ existe U entorno de x tal que $U \cap F_i \neq \emptyset$ sólo para finitos $i \in I$. Pruebe que en tal caso f es continua.

24. Probar que no existe ninguna función continua y suryectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$.

25. Sean $n \geq 2$ y $g : S^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que existe $x \in S^n$ tal que

$$g(x) = g(-x).$$

26. Dos subconjuntos A, B de un espacio topológico se dicen *separados* si satisfacen que

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico, con la siguiente propiedad: si $A, B \in \mathcal{A}$, existe una sucesión finita $A_0, A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tales que $A_0 = A$, $A_n = B$ y A_j, A_{j+1} no son separados, para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es un conjunto conexo.