1. Circunferencias

1. Sean $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(o_1, r_1)$ y $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(o_2, r_2)$ dos circunferencias. Probar que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ (como conjuntos) implica que $o_1 = o_2$ y $r_1 = r_2$.

2. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(o, r)$ una circunferencia y A una recta tangente a $\mathcal{C}$. Probar que $\mathcal{C}$ está contenida en el semiplano A_o.

3. Probar que dos circunferencias del mismo radio son congruentes. Más aún, caracterizar todas las transformaciones rígidas que llevan una en la otra.

4. Sea A una recta y sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(o, r)$ una circunferencia. Probar que,
(a) $A \cap \mathcal{C} = \emptyset \iff d(o, A) > r$;
(b) $A \cap \mathcal{C} = \{p\} \iff d(o, A) = r$;
(c) $A \cap \mathcal{C} = \{p, q\} \iff d(o, A) < r$.

5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos circunferencias secantes, con centros o y o' respectivamente. Probar que si $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, entonces p no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{oo'}$.

6. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos circunferencias. Probar que si hay un punto de $\mathcal{C}$ que es interior a $\mathcal{C}'$ y un punto de $\mathcal{C}'$ que es interior a $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son secantes.

7. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y p un punto exterior a ella. Sean a y b los puntos de tangencia de las dos rectas tangentes a $\mathcal{C}$ por p. Probar que $\overline{ap} \equiv \overline{bp}$.

8. Sean $\mathcal{C} = \mathcal{C}(o, r)$ y $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(o, r')$ dos circunferencias concéntricas con $r < r'$. Probar que las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ determinan cuerdas congruentes en $\mathcal{C}'$.

Notación: Si $a, b \in \mathcal{C}_o$, $\overset{\frown}{ab}$ denotará el arco que se obtiene al intersecar $\mathcal{C}_o$ con el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{ab}$ que no contiene a o.

9. Demostrar que las transformaciones rígidas llevan arcos en arcos y extremos (de arco) en extremos (de arco).

10. Probar que los arcos $\overset{\frown}{ab}$ y $\overset{\frown}{cd}$ en una misma semicircunferencia $\mathcal{C}_o$ son congruentes si y sólo si las cuerdas $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son congruentes, y también, si y sólo si los ángulos $\angle aob$ y $\angle cod$ son congruentes.

11. Dado un segmento $\overline{ab}$ y un ángulo $\angle AB$, construir con regla y compás el arco capaz correspondiente.

12. (i) Probar que un cuadrilátero es inscriptible si y sólo si las sumas de los ángulos opuestos son iguales.
(ii) Probar que un cuadrilátero es circunscriptible si y sólo si las sumas de los lados opuestos son iguales.

13. Probar que las bisectrices de un cuadrilátero convexo que no es rombo ni romboide limitan un cuadrilátero inscriptible.

14. Se denomina *triángulo órtico* de $\triangle abc$ al triángulo formado por los pies de las alturas de $\triangle abc$. Probar que las alturas de un triángulo están contenidas en las bisectrices de su triángulo órtico. Es decir, si d, e, f son los pies de las alturas trazadas desde a, b, c respectivamente, entonces $\angle eda = \angle adf$.

15. Construir con regla y compás un triángulo $\triangle abc$ conociendo el lado $\overline{ab}$, la altura respecto de $\overline{ab}$ y el ángulo $\angle acb$.

16. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y p un punto en su interior, distinto del centro. Considere el conjunto de todas las cuerdas de $\mathcal{C}$ que pasan por p. Demostrar que todos los puntos medios de tales cuerdas están en una circunferencia.

17. Se llama *ángulo semiinscrito* en una circunferencia a cualquier ángulo que tenga su vértice en la circunferencia, una de las semirrectas que determina sus lados sea tangente a la circunferencia y la otra sea secante. Probar que un ángulo central θ que abarca el mismo arco que un ángulo semiinscrito α, es el doble de α; es decir, vale la misma relación que en el teorema del ángulo inscrito y su ángulo central.

18. Probar el teorema de las cuerdas que se cortan: Sean $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ dos cuerdas de una circunferencia que se cortan en p. Probar que $|\overline{ap}| \cdot |\overline{pb}| = |\overline{cp}| \cdot |\overline{pd}|$.

19. Probar el Teorema de la Mariposa: Sea m el punto medio de una cuerda $\overline{ab}$ de una circunferencia, y considere dos cuerdas $\overline{cd}$ y $\overline{ef}$ que pasen por m, y tales que $\overline{ce}$ corta a $\overline{ab}$ en un punto x y $\overline{df}$ corta a $\overline{ab}$ en un punto y. Probar que $|\overline{xm}| = |\overline{my}|$.
[*Sugerencia:* Usar el teorema del seno para encontrar una expresión para $|\overline{cx}||\overline{xe}|$ y el ejercicio anterior para encontrar una segunda expresión, y comparar. De la misma forma hacerlo para $|\overline{dy}||\overline{yf}|$].

20. Números construibles con regla y compás. Definición: un número real positivo x se dice *construible* si en el plano π (munido con un segmento unidad $\mathcal{U}$) se puede construir con regla y compás un segmento de longitud igual a x. Un número real negativo x se dice construible si $-x$ es construible.

(a) Probar que son construibles todos los números enteros.

(b) Probar que son construibles todos los números $\sqrt{n}$, con $n \geq 2$. (*Sugerencia:* Usar el teorema de Pitágoras e inducción.)

(c) Probar que si t y s son construibles, entonces $t + s$, $t - s$, t/s (para $s \neq 0$) y ts también lo son.

(d) Probar que todos los números racionales son construibles.

(e) Probar que los números construibles forman un cuerpo, y es un subcuerpo de los números reales que contiene a $\mathbb{Q}$.

(f) Probar que si s es un número construible positivo entonces $\sqrt{s}$ también lo es. (*Sugerencia:* considerar la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo adecuado.)