

1. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $ab = 1$ , entonces  $a = b = 1$  ó  $a = b = -1$ .
- (b) Si  $a \mid 1$  entonces  $a = 1$  ó  $a = -1$ .
- (c) Si  $a, b \neq 0$ ,  $a \mid b$  y  $b \mid a$ , entonces  $a = b$  ó  $a = -b$ .
- (d) Si  $a \neq 0$  y  $a \mid b$ , entonces  $a \mid b \cdot c$ .
- (e) Si  $a \neq 0$ ,  $a \mid b$  y  $a \mid c$ , entonces  $a \mid (bx + cy)$  para  $x, y \in \mathbb{Z}$  arbitrarios.
- (f) Si  $a \neq 0$ ,  $a \mid b$  y  $a \mid (b + c)$ , entonces  $a \mid c$ .
- (g) Si  $a \neq 0$  y  $a \mid b$ , entonces  $a^n \mid b^n$  para todo natural  $n$  (más adelante veremos que si  $a^n \mid b^n$  para *algún* natural  $n$ , entonces  $a \mid b$ ).

2. Dados  $b, c$  enteros, probar las siguientes propiedades:

- (a) 0 es par y 1 es impar.
- (b) Si  $b \neq 0$  es par y  $b \mid c$ , entonces  $c$  es par. (Por lo tanto, si  $b$  es par, también lo es  $-b$ ).
- (c) Si  $b$  y  $c$  son pares, entonces  $b + c$  también lo es.
- (d) Si  $b \neq 0$  es par y  $b \mid 2$ , entonces  $b = 2$  ó  $b = -2$ .
- (e) La suma de un número par y uno impar es impar.
- (f)  $b + c$  es par si y sólo si  $b$  y  $c$  son ambos pares o ambos impares.
- (g) Probar que el producto de un número entero por su consecutivo es un número par.
- (h) Dado un número entero  $n$ , probar que:  $n$  es par si y sólo si  $n^2$  es par.

3. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Probar que las siguientes afirmaciones son falsas dando un contraejemplo.

- (a)  $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$  ó  $a \mid c$ .
- (b)  $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$  ó  $a \mid c$ .
- (c)  $a \mid c$  y  $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$ .
- (d)  $a \mid c$  y  $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$ .

4. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ :

- (a)  $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c$  y  $b \mid c$
- (b)  $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$
- (c)  $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a$  ó  $2 \mid b$
- (d)  $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a$  ó  $9 \mid b$
- (e)  $a \mid b \Rightarrow a \leq b$
- (f)  $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- (g)  $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$
- (h)  $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall n \in \mathbb{N}$

5. (a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.  
(b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

6. Hallar el cociente y el resto de la división de:

- (a) 127 por 99.
- (b) -135 por 23.
- (c) 135 por -23.
- (d) -135 por -23.

7. Dado  $m \in \mathbb{N}$  hallar los restos posibles de  $m^2$  y  $m^3$  en la división por 3 y por 11.

8. Probar que cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ :

- (a)  $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$  es múltiplo de 11.
- (b)  $3^{2n+2} - 8n - 9$  es divisible por 64.

9. Determinar los enteros positivos  $n$  tales que

- (a)  $n + 7$  es divisible por  $3n - 1$ .                      (c)  $(n - 2)(n^2 - n - 2)$  es divisible por  $2n - 1$ .  
 (b)  $n^2 + 5$  es divisible por  $2n + 1$                       (d)  $n^2 - 7n + 10$  es divisible por  $n - 3$

10. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

- (a) Probar que  $a - b \mid a^n - b^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (b) Probar que si  $n$  es un número natural impar, entonces  $a + b \mid a^n + b^n$ .  
 (c) Probar que si  $n$  es un número natural par, entonces  $a + b \mid a^n - b^n$ .

11. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

- (a) El producto de  $n$  enteros consecutivos es divisible por  $n!$   
 (b)  $\binom{2n}{n}$  es divisible por 2.  
 (c)  $2^n \prod_{i=1}^n (2i - 1)$  es divisible por  $n!$   
 (d)  $\binom{2n}{n}$  es divisible por  $n + 1$  (Sugerencia: probar que  $(2n + 1)\binom{2n}{n} = (n + 1)\binom{2n+1}{n}$  y observar que  $\binom{2n}{n} = (2n + 2)\binom{2n}{n} - (2n + 1)\binom{2n}{n}$ ).

12. Expresar 1810 y 1816 en las bases 2 y 11.

13. Expresar en base 10 los siguientes enteros:  $(1111)_2$  y  $(1111)_{12}$ .

14. Calcular las siguientes sumas expresándolas en la misma base.

- (a)  $(2234)_5 + (2310)_5$                       (b)  $(10101101)_2 + (10011)_2$ .

## Ejercicios complementarios

15. Sea  $X$  un conjunto arbitrario de 20 números naturales. Probar que hay al menos dos elementos de  $X$  cuya diferencia es divisible por 19.

16. Sean  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  números enteros. Probar que existen índices  $i, j$  con  $1 \leq i < j \leq n$  tales que  $\sum_{k=i}^j a_k$  es divisible por  $n$ . (Sugerencia: considere los restos en la división por  $n$  de los  $n$  números  $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .)

17. Sea  $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Probar que si el desarrollo en base 10 de  $a$  termina en  $k$  ceros entonces el desarrollo en base 5 de  $a$  termina en por lo menos  $k$  ceros.

18. ¿Cuáles son los números naturales más chico y más grande que se pueden escribir con exactamente  $n$  "dígitos" en base  $d > 1$ ?