Topología

Práctico N°3: Sucesiones. Espacios métricos completos. Compacidad

1. (a) Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos. Encontrar el límite de la siguiente sucesión:

$$y_n = 1 \text{ para } n \text{ impar}, \; y_n = n \text{ para } n \text{ par}.$$

(b) Sea X un conjunto, $x_0 \in X$ y consideremos la topología

$$\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : \; x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Describir las sucesiones convergentes en (X, τ_{x_0}). ¿Existen sucesiones que convergen a más de un punto?

2. Sea X un espacio topológico N_1 y $A \subseteq X$. Probar que:

(a) X es T_2 si y sólo si toda sucesión en X converge a lo sumo a un punto.

(b) $x \in X$ es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión en $A - \{x\}$ que converge a x.

3. Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si para toda sucesión encajada $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de subconjuntos cerrados de X tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, la intersección de todos los A_n es no vacía.

4. Completación de espacios métricos. Sea X un espacio métrico. Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en X tales que $\mathrm{d}(x_n, y_n) \to 0$ entonces decimos que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son *equivalentes* y lo denotamos $\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

(a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de X.

La clase de equivalencia de $\{x_n\}$ se denotará $[\{x_n\}]$. Sea Y el conjunto de clases de equivalencia $[\{x_n\}]$ de sucesiones de Cauchy $\{x_n\}$ en X. Definimos

$$\mathrm{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim \mathrm{d}(x_n, y_n), \qquad [\{x_n\}], [\{y_n\}] \in Y.$$

(b) Mostrar que d está bien definida y es una métrica en Y.

(c) Demostrar que la función $f : X \to Y$ dada por $x \mapsto [\{x\}]$ es un homeomorfismo isométrico (es decir, que preserva la distancia) sobre un subespacio denso de Y.

(d) Probar que Y es completo. Se llama la *completación* de X.

(e) Sean Z un espacio completo y $g : X \to Z$ una isometría. Mostrar que existe una única factorización $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ de g, tal que h una isometría. Más aún, probar que si $g(X)$ es denso en Z entonces h es suryectiva.

5. Sea X un espacio topológico.

(a) Probar que la unión finita de conjuntos compactos en X es un compacto.

(b) Mostrar con un ejemplo que la intersección de dos compactos puede no ser compacta.

(c) Asumimos ahora que X es Hausdorff. Probar que la intersección de una familia arbitraria de compactos es compacta.

6. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Todo subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

(b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y X es compacto, entonces f tiene máximo y mínimo en X.

(c) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, X es compacto y $f > 0$, entonces existe un $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$, para todo $x \in X$.

7. Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si f es biyectiva, entonces es un homeomorfismo. Mostrar que la condición de compacidad de X es necesaria.

8. Probar que toda función polinómica $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cerrada.

9. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Probar que:

(a) Si Y es T_2 y f es continua, probar que el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$.

(b) Recíprocamente, probar que, si X es T_2, Y compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

10. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una isometría. Probar que f es una biyección. ¿Qué pasa si X no es compacto?

11. Sean $X = [0, 1]$ y $D = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$. Considerar en X la topología τ que tiene por base a los abiertos del subespacio $(0, 1]$ de $\mathbb{R}$ y a los conjuntos $I_a = \{x \in X :\ x < a \text{ y } x \notin D\}$ con $0 < a < 1$. Probar que (X, τ) es T_2 y no es compacto.

12. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Probar que:

(a) Si $K \subseteq X$ es compacto y $x_0 \in X$, existe $k_0 \in K$ tal que $d(x_0, K) = d(x_0, k_0)$.

(b) Si K_1 y K_2 son 2 subconjuntos compactos de X, entonces existen $x_0 \in K_1$ e $y_0 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_0, y_0)$.

(c) Mostrar que el inciso anterior es falso si K_1 o K_2 no son compactos.

13. Una función $f : (X, d) \to (X', d')$ es *uniformente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Probar que si X es compacto y f continua, entonces f es uniformente continua.

14. Sea $\ell^1 := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Dados $x, y \in \ell^1$, definimos:

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \qquad d(x, y) := \|x - y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Probar que

(a) d es una distancia en ℓ^1.

(b) Si $B(0, 1) = \{x \in \ell^1 \mid \|x\| < 1\}$ entonces $\overline{B(0, 1)}$ no es compacto.

(c) (ℓ^1, d) es un espacio métrico completo (toda sucesión de Cauchy converge).

15. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto y T_2. Si $\tau' \subseteq \tau$ es tal que (X, τ') es T_2, entonces $\tau' = \tau$.

(b) Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto y T_2. Si $\tau' \supseteq \tau$ es tal que (X, τ') es compacto, entonces $\tau' = \tau$.

(c) La clausura de un compacto es compacta.

(d) Sea X un espacio T_2 e Y un subespacio localmente compacto y denso. Entonces Y es abierto.