Notas de Topología

Ariel Pacetti

Índice general

Capítulo 1

Espacios Topológicos

El objetivo de la topología es poder generalizar nociones que tenemos sobre el conjunto de números reales a conjuntos abstractos. El objetivo "ideal" sería el de poder clasificar espacios topológicos, esto es decir si dados dos de estos objetos, poder saber si son "iguales" o no lo son. Comencemos por recordar algunas delas propiedades que tienen los números reales. Al hablar de los números reales, no solamente tenemos en mente el conjunto, sino que también la noción de poder decir si dos cosas están cerca o no, esto viene dado por la función valor absoluto. Si $a, b \in \mathbb{R}$, en general definimos su distancia como

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Además, en análisis vimos que dentro de el conjunto de los números reales existen varios subconjuntos que juegan un rol preponderante, a saber los intervalos. Recordemos que el intervalo (a, b) se define como $\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$. A partir de estos conjuntos, pudimos definir la noción de un subconjunto *abierto* en $\mathbb{R}$.

Definición. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}$ se dice abierto si para todo $x \in U$ posee un intervalo que contiene a x y está contenido en U, o sea, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$.

Los abiertos de $\mathbb{R}$ satisfacen dos propiedades muy importantes (que dejamos al lector que verifique), a saber:

- La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.
- La intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.
- El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto, y $\mathbb{R}$ también lo es.

En general no es cierto que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos también lo sea.

Ejemplo 1. Si $U_n = (-1/n, 1/n)$, para $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que estos conjuntos son abiertos, pero su intersección $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$, que no es abierto.

A partir de la noción de intervalos en $\mathbb{R}$ (o conjuntos abiertos), podemos estudiar muchas propiedades importantes, como definir funciones continuas, límites de sucesiones, clausuras, etc. El objetivo es poder generalizar esto a conjuntos arbitrarios.

Definición. Sea X un conjunto cualquiera. Una *topología* en X es una colección de subconjuntos $\mathcal{T}$ de X (o sea es un subconjunto del conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de X) que satisface las siguientes propiedades:

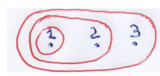
1. $\emptyset \in \mathcal{T}$.
2. $X \in \mathcal{T}$.
3. Unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ vuelve a estar en $\mathcal{T}$ (o sea si $U_i \in \mathcal{T}$ para $i \in I$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$).

4. Intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ vuelve a estar en $\mathcal{T}$ (o sea si $U_i \in \mathcal{T}$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces $\cap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$).

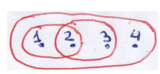
Definición. Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$ donde X es un conjunto cualquiera, y $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, a los elementos de $\mathcal{T}$ se los llaman *abiertos*. A la vez, decimos que un subconjunto $V \subset X$ es *cerrado* si su complemento $X \setminus V$ es abierto.

Ejemplos.
1. Si tomamos $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}$ como los abiertos de $\mathbb{R}$ (definidos anteriormente), el par $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Generalmente se denota simplemente como $\mathbb{R}$ a este espacio topológico.
2. Si tomamos $X = \mathbb{R}^2$, y $\mathcal{T}$ como el conjunto de $U \subset X$ que cumplen que para todo $(x_0, y_0) \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\} \subset U$ (comparar con la noción de abierto de Análisis II). Esto da un espacio topológico (que se suele simplemente denotar $\mathbb{R}^2$).
3. Tomemos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, y definimos $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Veamos que esto es un espacio topológico.



Claramente el conjunto vacío y todo son abiertos. Notar que $\mathcal{T}$ tiene la particularidad de que si tomamos dos elementos de él, entonces uno de ellos siempre está contenido en el otro. Luego la unión y la intersección de dos elementos de $\mathcal{T}$ siempre vuelve a estar en $\mathcal{T}$.
4. Tomemos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ como antes, y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.



Notar que $\mathcal{T}$ no es una topología, dado que $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{3\} \notin \mathcal{T}$.
5. Supongamos que tomamos X un conjunto cualquiera, y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Claramente el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. A esta topología $\mathcal{T}$ se la llama la topología *trivial*.
6. Por otro lado, si X es un conjunto cualquiera, y tomamos $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, nuevamente esto da una topología en X, que se llama la topología *discreta*. Notar que para esta topología todo subconjunto de X es abierto.

Notar que si fijamos un conjunto X y consideramos a el conjunto T de todas las posibles topologías que podemos poner en X (o sea $T = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X) \text{ topología}\}$), entonces el conjunto T tiene un orden (parcial) natural dado por la inclusión. Así decimos que una topología $\mathcal{T}_1$ es *mas fina* que una topología $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ (o sea $\mathcal{T}_1$ contiene todos los abiertos de $\mathcal{T}_2$ y a priori alguno mas). Luego con este orden parcial, existe un elemento que es el mas chico de todos, a saber la topología trivial, y uno que es el mas grande de todos, a saber la topología discreta.

Ejemplo 2. No es cierto que el orden anterior sea un orden total, o sea no siempre se pueden comparar dos elementos. Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$ y tomamos $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1, 2\}\}$, y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{2, 3\}\}$, es fácil ver que ambas son topologías en X, pero ninguna es mas fina que la otra.

EJERCICIO 1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $\#X = 1$, entonces $\mathcal{T}$ tiene que ser la topología discreta, que también es la topología trivial.

EJERCICIO 2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico que cumple que los puntos son abiertos, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

1. Espacios métricos

Hay una gran fuente de espacios topológicos obtenidos a partir de una "distancia".

DEFINICIÓN. Si X es un conjunto, una *distancia* en X es una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$.
2. $d(x, y) \neq 0$ si $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para toda terna de elementos (x, y, z) de X (usualmente llamada la **desigualdad triangular**).

EJEMPLOS. 1. Si tomamos $X = \mathbb{R}$ y definimos $d(x, y) = |x - y|$, esto da la distancia usual de $\mathbb{R}$. Notar que $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}$.
2. Si $X = \mathbb{R}^2$, definimos $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$. Esto da una distancia en $\mathbb{R}^2$ (queda como ejercicio verificar la desigualdad triangular si nunca lo hicieron). Esta distancia es bastante mas particular, dado que proviene de una *norma*. A pesar de que esto no lo veremos mucho en este curso, cabe relacionarlo con cosas vistas anteriormente. Recordar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. El mismo tiene un producto interno dado por $\langle (x_0, y_0), (x_1, y_1) \rangle = x_0 x_1 + y_0 y_1$ (repasar las notas de Algebra II). Un espacio $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno tiene luego una forma natural de medir vectores (o sea definir distancias), y es la dada anteriormente. Luego en este caso particular, la demostración de la desigualdad triangular ya fue dada en Algebra II.
3. En $\mathbb{R}^2$ podemos definir otra distancia, dada por
$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = |x_0 - x_1| + |y_0 - y_1|.$$
Dejamos como ejercicio verificar que esta función cumple las propiedades para ser distancia.
4. Podemos extender las últimas dos definiciones a $\mathbb{R}^n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ de manera natural, y es fácil ver que ambas definen distancias.
5. Sea X un conjunto cualquiera, y definamos
$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$
Verificar que esto es una distancia.
6. Tomemos $X = \mathbb{Q}$, y p un número primo. Si $a \in \mathbb{Z}$ es no nulo, entonces por el Teorema Fundamental de la Aritmética, sabemos que a se factoriza como producto de primos a potencias. En particular, podemos definir $v_p(a)$ como el exponente que aparece en p al factorizar el número a. Equivalentemente,
$$v_p(a) = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ : \ p^{-n} a \in \mathbb{Z}\}.$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

a) $v_p(a) \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ no nulo.

b) $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$ para todo par $a, b \in \mathbb{Z}$ ambos no nulos.

c) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son no nulos, y $a + b$ es no nulo, entonces $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Podemos extender dicha función a los números racionales no nulos, definiendo $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$ (convencerse de que esto está bien definido, o sea de que si dos fracciones son equivalentes, la valuación de ambas es igual). A partir de la *valuación* v_p podemos definir un *valor absoluto* por:

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{a}{b} = 0, \\ p^{-v_p(\frac{a}{b})} & \text{si } \frac{a}{b} \neq 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio al lector verificar que si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces $d_p(x, y) = |x - y|_p$ es una distancia (la llamada "distancia p-ádica"). Notar que con esta distancia, la sucesión $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a cero. [1]

La razón de estudiar distancias, es que a partir de una distancia en un conjunto X, podemos construir una topología asociada.

Definición. Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una distancia.

Dado un espacio métrico (X, d) y dados $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, podemos definir la bola centrada en x de radio r por

$$B(x, r) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}.$$

Definición. Si (X, d) es un espacio métrico, y $A \subset X$, decimos que A es *abierto* en X si vale que para todo $x \in A$ existe un $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Sea (X, d) un espacio métrico, y $\mathcal{T}_d = \{A \subset X \ : \ A \text{ es abierto}\}$.

Ejercicio 3. En las hipótesis anteriores, probar que dado $x \in X$, $r > 0$, la bola $B(x, r) \in \mathcal{T}_d$.

Proposición 1.1. *El conjunto $\mathcal{T}_d$ es una topología en X.*

Demostración. Claramente $\emptyset$ y X son elementos de $\mathcal{T}_d$. Supongamos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección de abiertos, y veamos que su unión también lo es. Si $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces existe i_0 tal que $x \in U_{i_0}$ (por definición de unión de conjuntos). Luego como U_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U_{i_0}$, pero como $U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ deducimos que $B(x, r) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Resta verificar que intersección finita de abiertos es abierto. Sean $U_1, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos, y sea $x \in \cap_{i=1}^n U_i$. Como cada U_i es abierto, existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subset U_i$. Sea $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, con lo cual $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego $B(x, r) \subset \cap_{i=1}^n U_i$.

□

En particular, si (X, d) es un espacio métrico, tenemos asociada naturalmente un espacio topológico a él, a saber $(X, \mathcal{T}_d)$. Una pregunta natural es si toda topología proviene de una medida. La respuesta es negativa.

[1] Es muy interesante ver como el análisis con la distancia p-ádica difiere mucho del clásico, por ejemplo, una serie converge con la distancia p-ádica si y sólo si el término general tiende a cero.

EJEMPLO 3. Sea $X = \{1, 2\}$, y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ (la topología trivial). Afirmo que esta topología no puede provenir de una distancia. Supongamos que existe $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una distancia cualquiera. En particular, sea $n = d(1, 2)$. Por definición de distancia, sabemos que $n \in \mathbb{R}$ es positivo y no nulo. Luego $B(1, n/2) = \{1\}$, pues claramente $d(1, 1) = 0 < n/2$, y $d(1, 2) = n > n/2$. En particular, $\{1\}$ debería ser abierto, pero $\{1\}$ no es un elemento de $\mathcal{T}$.

EJERCICIO 4. Probar que si X es un conjunto cualquiera con al menos dos elementos distintos, entonces no existe ninguna métrica d en X para la cual $\mathcal{T}_d$ sea la topología trivial.

EJERCICIO 5. Probar que si X es un conjunto finito, y $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una distancia, entonces $\mathcal{T}_d$ es la topología discreta.

DEFINICIÓN. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice *metrizable* si existe una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

El Ejercicio 3 muestra que no todo espacio topológico es metrizable (veremos mas adelante algunas propiedades que tienen los espacios métricos que no valen en general, como ser Hausdorff). Notar que una topología puede provenir de mas de una distancia.

EJERCICIO 6. Sea $X = \mathbb{R}^2$, y miremos las siguientes distancias:

- $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$,
- $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

Probar que ambas son realmente distancias (uno ya lo hicimos antes), y que las topologías $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$. Si no sale en una primera leída, mirar el Ejemplo 4 y volver a intentarlo.

2. Bases y sub-bases

DEFINICIÓN. Si X es un conjunto cualquiera, y $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X (o sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$), decimos que $\mathcal{B}$ es una *base para una topología* si satisface las siguientes propiedades:

1. Si $x \in X$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$.
2. Si $U, V \in \mathcal{B}$ y si $x \in U \cap V$, entonces existe $W \in B$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Veamos algunos ejemplos de bases de topologías:

EJEMPLOS.
1. Si $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base para una topología.
2. Si (X, d) es un espacio métrico, el conjunto $\mathcal{B} = \{B(x, 1/n) \ : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ es una base para una topología.
3. Si X es un conjunto cualquiera, $\mathcal{B} = \{\{x\} \ : \ x \in X\}$ es una base para una topología.

Si X es un conjunto, y $\mathcal{B}$ es una base para una topología, podemos asociarle a $\mathcal{B}$ una topología de X que es la más chica que contiene a $\mathcal{B}$, a saber, $\mathcal{T}$ está formada por uniones de elementos de $\mathcal{B}$. Dicho de otra manera (como hicimos con espacios métricos), $U \in \mathcal{T}$ si vale que para todo $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$.

LEMA 1.2. *El conjunto $\mathcal{T}$ definido es una topología en X.*

DEMOSTRACIÓN.
- Claramente $\emptyset \in \mathcal{T}$ (todo elemento de $\emptyset$ satisface todo) y $X \in \mathcal{T}$ por la primer propiedad de una base de una topología.

- Si $\{U_i\}_{i\in I}$ son elementos en $\mathcal{T}$, entonces su unión también lo esta. Si $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ entonces existe i_0 tal que $x \in U_{i_0}$. Luego existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.
- Si $U_i \in \mathcal{T}$ para $1 \leq i \leq n$, veamos que $\cap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. Para esto hagamos inducción en n. Si $n = 1$ entonces la afirmación es clara. Supongamos que vale para n y veamos que vale para $n+1$ conjuntos. Sea $V = \cap_{i=1}^{n} U_i$, entonces $\cap_{i=1}^{n+1} U_i = V \cap U_{n+1}$. Luego basta probar el caso de dos conjuntos.

  Si $x \in V \cap U_{n+1}$, entonces como V es abierto, existe $W_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W_1 \subset V$. De igual forma, existe $W_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W_2 \subset U_{n+1}$. Ahora la segunda propiedad de una base para una topología nos asegura que existe un conjunto $\tilde{W} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \tilde{W} \subset W_1 \cap W_2 \subset V \cap U_{n+1}$. Luego $V \cap U_{n+1}$ es abierto, como queríamos ver.

□

Volviendo a los ejemplos anteriores, la topología asociada a las bases $\mathcal{B}$ corresponden a la topología usual de $\mathbb{R}$ en el primer ejemplo, a la topología asociada a la distancia d en el segundo, y a la topología discreta en el tercer ejemplo.

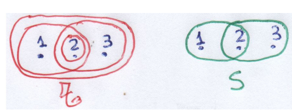
Haciendo un poco de abuso, si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, decimos que $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$ si $\mathcal{B}$ es una base para una topología, y dicha topología coincide con $\mathcal{T}$.

Definición. Si X es un conjunto, una sub-base para una topología es una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X tales que $X = \bigcup_{U\in S} U$.

A partir de una sub-base de una topología, podemos obtener una topología $\mathcal{T}$ en X declarando que un conjunto $U \in \mathcal{T}$ si U es una unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de S.

La ventaja de trabajar con bases y sub-bases es que en algunos ejemplos para probar ciertas propiedades de una topología $\mathcal{T}$ (o funciones en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$), nos bastará chequear propiedades en bases/sub-bases.

Ejemplos. 1. Si $X = \{1, 2, 3\}$, el conjunto $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ es una sub-base para la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$.



2. Si $X = \mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathcal{S} = \{B(x, 1) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ es una sub-base para la topología usual de $\mathbb{R}$ (queda como ejercicio completar los detalles)

3. Otras construcciones de espacios topológicos

Una pregunta natural a la hora de estudiar espacios topológicos es como poder construir espacios topológicos a partir de otros. En esta sección vamos a estudiar dos construcciones elementales, y mas adelante daremos algunas mas.

3.1. Subespacios topológicos.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $Y \subset X$ es un subconjunto cualquiera, podemos dotar al conjunto de Y de la llamada *topología subespacio*, o *topología relativa*; esto es que Y hereda abiertos a partir de abiertos de X. Para ello, definimos el conjunto $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \ : \ U \in \mathcal{T}\}$.

LEMA 1.3. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, entonces* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $\mathcal{T}_Y$ cumple las propiedades de una topología.

- Claramente $\emptyset = \emptyset \cap Y$ y $Y = X \cap Y$, con lo cual $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I}$ son elementos de $\mathcal{T}_Y$, por definición, para cada $i \in I$, existe $V_i \in \mathcal{T}$ tal que $U_i = V_i \cap Y$. Como $\mathcal{T}$ es una topología, $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$, luego $\bigcup_{i \in I} U_i = (\bigcup_{i \in I} V_i) \cap Y$, con lo cual $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_Y$.
- Si $U_i \in \mathcal{T}_Y$, con $i = 1, \ldots, n$, por definición, existe $V_i \in \mathcal{T}$ tal que $U_i = V_i \cap Y$. Luego, $\cap_{i=1}^n U_i = \cap_{i=1}^n (V_i \cap Y) = (\cap_{i=1}^n V_i) \cap Y$, con lo cual $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_Y$.

$\square$

EJEMPLOS. 1. Si consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual, y miramos el subconjunto $\mathbb{N}$, entonces la topología $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ es la topología discreta en $\mathbb{N}$. La razón es que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{n\} = \mathbb{N} \cap (n - 1/2, n + 1/2)$, con lo cual los puntos son abiertos.

2. Consideremos nuevamente el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología usual, y sea $Y = [0, \infty)$. Entonces una base para la topología $\mathcal{T}_Y$ está dada por los conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \ : \ 0 < a < b\} \cup \{[0, b) \ : \ b \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

DEFINICIÓN. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, un subconjunto $Y \subset X$ se dice *discreto* si cumple que la topología inducida $\mathcal{T}_Y$ es la topología discreta.

EJEMPLOS. 1. El subconjunto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ (con la topología usual) es discreto.

2. El subconjunto $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, con la métrica usual también es discreto.
3. Si $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ es un espacio topológico con la topología discreta, entonces cualquier subconjunto de X es discreto.

EJERCICIO 7. ¿Es cierto que si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ cumple que todo subconjunto propio (o sea todo $Y \subset X$ pero $Y \neq X$) es discreto, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta?

3.2. Producto de espacios topológicos I. Si $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son dos espacios topológicos, conocemos una manera de construir un conjunto a partir de ellos, a saber el producto cartesiano $X \times Y$, la pregunta importante es si hay en $X \times Y$ una topología "natural". La palabra natural en matemática tiene distintas interpretaciones, y es muy usada en categorías. Aquí nos referimos con "natural" a que la topología cumpla propiedades esperadas, y que sea la topología "mas chica" con dichas propiedades. Por ahora nos restringimos a dar la definición de la topología, y mas adelante volveremos a la cuestión de por qué dicha topología es natural.

DEFINICIÓN. La *topología producto* en $X \times Y$ es la topología obtenida a partir de la base

$$\mathcal{B} = \{U \times V \ : \ U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

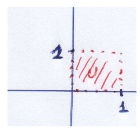
LEMA 1.4. *El conjunto* $\mathcal{B}$ *es una base para una topología.*

DEMOSTRACIÓN. Precisamos verificar las dos propiedades de una base para una topología, a saber:

1. Notar que como $\mathcal{T}_X$ es una topología, $X \in \mathcal{T}_X$, y análogamente, $Y \in \mathcal{T}_Y$, con lo cual $X \times Y \in \mathcal{B}$, con lo cual la primer propiedad se cumple trivialmente.

2. Supongamos que $(x, y) \in U_1 \cap U_2$, con $U_i \in \mathcal{B}$ para $i = 1, 2$. Por definición, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_X$, $W_1, W_2 \in \mathcal{T}_Y$ tales que $U_1 = V_1 \times W_1$ y $U_2 = V_2 \times W_2$. Luego, $U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2)$. Como $\mathcal{T}_X$ es una topología, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}_X$, y análogamente, $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{T}_Y$, con lo cual $(V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2) \in \mathcal{B}$. □

Ejemplo 4. Consideremos $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, como espacio topológico, con la topología producto (donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual). Notar que aquí la base de la topología consiste en cuadrados (sin el borde), por ejemplo, $U = (0, 1) \times (0, 1)$ corresponde al dibujo

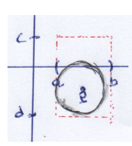


Claramente esta base de abiertos no coincide con la base de abiertos usual en $\mathbb{R}^2$ dado por bolas.
Afirmo: la topología producto en $\mathbb{R}^2$ coincide con la topología dada por la distancia $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

¿Como hacemos para ver que dos topologías son iguales? Recordar que una topología en un conjunto X es un subconjunto del conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de X. Luego probar que dos topologías son iguales equivale a ver que ambos conjuntos son iguales (y la igualdad de conjuntos siempre la demostramos por la doble contención). Llamemos así $\mathcal{T}_p$ a la topología producto y $\mathcal{T}_d$ a la topología obtenida por la distancia. Así demostrar la afirmación equivale a probar que $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_d$.
Veamos la inclusión $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_d$. Como ambas son topologías, basta probarlo para abiertos de una base de la topología, por ejemplo para elementos de $\mathcal{B}$. Sea así $(a, b) \times (c, d)$ un elemento de $\mathcal{B}$. Recordar que un conjunto U es abierto en $\mathcal{T}_d$ si para todo punto $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$.

Sea entonces $P = (x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$, y sea $\epsilon = \text{mín}\{x_0 - a, b - x_0, y_0 - c, d - y_0\}$. Si $(s, t) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$ vale que $\sqrt{(s - x_0)^2 + (t - y_0)^2} < \epsilon$. En particular, $|s - x_0| < \epsilon$ y $|t - y_0| < \epsilon$, con lo cual:

- $s < \epsilon + x_0 \leq b - x_0 + x_0 = b$ (por ser ϵ el mínimo del conjunto),
- $s > x_0 - \epsilon \geq x_0 - (x_0 - a) = a$ (por ser ϵ el mínimo del conjunto, con lo cual $-\epsilon$ es mayor que todos ellos).



Esto prueba que $s \in (a, b)$; una cuenta análoga prueba que $t \in (c, d)$, lo que implica que $B((x_0, y_0), \epsilon) \subset (a, b) \times (c, d)$ como queríamos ver.
Veamos la inclusión $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_p$. Recordar que el conjunto $\{B((x_0, y_0), \epsilon \ : \ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \epsilon > 0\}$ es una base para la topología de $\mathcal{T}_d$. Luego basta probar que cada tal abierto está en $\mathcal{T}_p$.

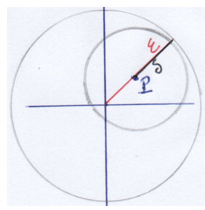
Para simplificar un poco la demostración, veamos primero lo siguiente:

Afirmación 1: la bola $B((x_0, y_0), \epsilon)$ contiene al cuadrado $(x_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, x_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}) \times (y_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$.

Si $(s, t) \in (x_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, x_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}) \times (y_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$ entonces $|s - x_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ y $|t - y_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, con lo cual

$$d((s,t),(x_0,y_0)) = \sqrt{(s-x_0)^2 + (t-y_0)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon.$$

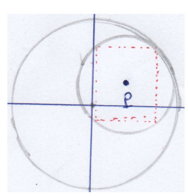
Afirmación 2: Si $(s, t) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$, llamemos $r = d((s, t), (x_0, y_0))$ y tomemos $\delta = \epsilon - r > 0$ entonces $B((s, t), \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$.



Si $P = (u, v) \in B((s, t), \delta)$, entonces

$$d((u,v),(x_0,y_0)) \leq d((u,v),(s,t)) + d((s,t),(x_0,y_0)) < \delta + r = \epsilon.$$

Veamos como estas dos afirmaciones implican el resultado: como $\mathcal{B}$ es una base para la topología, basta con probar que dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$, si $P = (s, t) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $(s-\delta, s+\delta) \times (t-\delta, t+\delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$. Pero por la segunda afirmación, existe $\delta > 0$ tal que $B((s, t), \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$, y por la primera afirmación $(s - \frac{\delta}{\sqrt{2}}, s + \frac{\delta}{\sqrt{2}}) \times (t - \frac{\delta}{\sqrt{2}}, t + \frac{\delta}{\sqrt{2}}) \subset B((s, t), \delta) \subset B((x_0, y_0), \epsilon)$. Así obtenemos que $B((x_0, y_0), \epsilon)$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$ y por lo tanto está en $\mathcal{T}_p$.



Notar que la igualdad de las topologías, se traduce en probar que una bola contiene un cuadrado, y un cuadrado contiene una bola.

Ejercicio 8. De manera análoga, si $X_1, \ldots, X_r$ son espacios topológicos, podemos definir una topología en $X_1 \times \cdots \times X_r$ tomando como base de la topología los conjuntos que son producto de abiertos. Verificar que esto es una base para una topología.

3.3. Interior, clausura y borde.

DEFINICIÓN. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $A \subset X$ entonces definimos:

- un punto $x \in A$ es un *punto interior de* A si existe un abierto U tal que $x \in U \subset A$.
- un punto $x \in X$ es un *punto clausura de* A si para todo abierto U que contiene al punto x vale que $U \cap A \neq \emptyset$.
- un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación de* A si para todo abierto U que contiene al punto x vale que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Notar que un punto de acumulación es siempre un punto clausura. A la vez, todos los elementos del conjunto A son puntos clausura. No obstante, no siempre punto clausura es un punto de acumulación. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ si tomamos $A = \{0\}$, entonces el único punto de A es un punto clausura, pero no es un punto de acumulación.

DEFINICIÓN. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $A \subset X$, definimos los siguientes conjuntos:

1. El interior de A, denotado A^0 es el conjunto de puntos interiores.
2. La clausura de A, denotada $\overline{A}$ es el conjunto de los puntos clausura.
3. El *borde* de A (o la *frontera* de A), denotado $\partial(A)$ (o $\mathrm{Fr}(A)$) esta dado por $\partial(A) := \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Claramente, $A^0 \subset A \subset \overline{A}$.

PROPOSICIÓN 1.5. *Con las definiciones anteriores, valen las siguientes propiedades:*

1. *A^0 es la unión de los abiertos contenidos en A, o sea $A = \bigcup_{U \subset A} U$, donde la unión es sobre conjuntos abiertos.*
2. *$\overline{A}$ es la intersección de los cerrados que contienen al conjunto A, o sea $\overline{A} = \cap_{A \subset V} V$, donde la intersección es sobre conjuntos cerrados.*
3. *$x \in X$ es un punto de acumulación si y sólo si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver las igualdades precisamos probar las doble inclusiones.

1. $\subset$). Si $x \in A^0$, existe $U_0 \subset A$ abierto que contiene a x, con lo cual $x \in \bigcup_{U \subset A} U$, con U abiertos.
$\supset$). Si $x \in \bigcup_{U \subset A} U$, en particular existe un abierto U_0 tal que $x \in U_0$, pero entonces x cumple la definición de punto interior.
2. $\subset$). Supongamos que $x \in \overline{A}$, y sea $V \supset A$ un conjunto cerrado. Luego V^c es abierto. Si $x \notin V$, entonces $x \in V^c$ y $V^c \cap A = \emptyset$ lo que contradice la condición de ser un punto de acumulación. Luego $x \in V$.
$\supset$). Supongamos que x es un elemento de la intersección, y sea U un abierto cualquiera que contiene a x. Si $U \cap A = \emptyset$ entonces $A \subset U^c$ que es un cerrado con lo cual $x \in U^c$ lo que contradice que x era un elemento de U. Luego $U \cap A \neq \emptyset$ lo que implica que $x \in \overline{A}$.
3. $\Leftarrow$) Supongamos que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ y veamos que es un punto de acumulación de A. Sea U un abierto cualquiera que contiene a x. Como $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, con lo cual $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$ con lo cual x es un punto de acumulación de A por definición.

$\Rightarrow$) Supongamos que x es un punto de acumulación de A, y veamos que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Sea U un abierto cualquiera que contenga a x. Por definición de un punto de acumulación, $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Pero $A \cap (U \setminus \{x\}) = (A \setminus \{x\}) \cap U$, con lo cual $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ por definición de clausura.

□

COROLARIO 1.6. *Un subconjunto A es abierto si y sólo si $A = A^0$.*

PROPOSICIÓN 1.7. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $A \subset X$ entonces $\overline{A} = A \cup A'$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente $A \subset \overline{A}$, y $A' \subset \overline{A}$, con lo cual una inclusión es fácil. Para ver la otra inclusión, supongamos que $x \in \overline{A}$ pero $x \notin A$, en cuyo caso queremos ver que $x \in A'$. Sea U un abierto cualquiera que contiene a x, y miremos el conjunto $U \cap A$. Como $x \in \overline{A}$, $U \cap A \neq \emptyset$. Por otro lado, como $x \notin A$, vale que $U \cap A \setminus \{x\} = U \cap A \neq \emptyset$ con lo cual $x \in A'$. □

DEFINICIÓN. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subset X$ se dice *denso* si su clausura es todo X, o sea $\overline{Y} = X$.

EJEMPLO 5. El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice *separable* si contiene un subconjunto denso que sea numerable.

EJEMPLOS.
1. El espacio topológico $\mathbb{R}^n$ (con la topología usual) es separable.
2. Si X es un conjunto cualquiera, el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ es separable si y sólo si X es numerable.

4. Algunas propiedades de espacios topológicos

Antes de ver mas ejemplos y construcciones de espacios topológicos, veamos algunas propiedades importantes que tienen algunos espacios topológicos.

DEFINICIÓN. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que satisface el *primer axioma de contabilidad* (o que es N_1) si todo punto $x \in X$ posee una base de abiertos numerables en x. O sea para todo $x \in X$ existen $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos tales que si $V \subset X$ es abierto, y $x \in V$ entonces existe n_0 tal que $U_{n_0}(x) \subset V$.

DEFINICIÓN. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que satisface el *segundo axioma de contabilidad* (o que es N_2) si existe una base numerable para la topología. O sea existen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos y base de la topología.

LEMA 1.8. *Si $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de contabilidad entonces también satisface el primero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para la topología. Dado $x \in X$, miremos el subconjunto $\mathcal{B}(x) = \{U_n \in \mathcal{B} \,:\, x \in U_n\}$. Veamos que este es una base de abiertos numerable de x. Claramente es numerable. Si U es un abierto, y $x \in U$, como $\mathcal{B}$ es una base, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$. En particular, existe n_0 tal que $V = U_{n_0}$, como queríamos ver. □

EJEMPLOS.
1. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces satisface el primer axioma de numerabilidad. La razón es que dado $x \in X$, el conjunto $\{B(x, 1/n) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de abiertos numerable de x.

2. El espacio topológico $(\mathbb{R}^n, d)$, donde d es la métrica usual, o sea dada por
$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$
satisface el segundo axioma de contabilidad.

Para ver esto, debemos dar una base numerable para la topología. Por ejemplo, podemos tomar $\mathcal{B} = \{B(x,1/n) \,:\, x \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto es numerable, debemos ver que es una base de la topología. Claramente todos ellos son abiertos, con lo cual tenemos que probar que si $v \in \mathbb{R}^n$ y V es abierto, entonces hay un elemento U de la base que cumple $v \in U \subset V$.

Por definición, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in B(x,\epsilon) \subset V$. Sea n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe $y \in \mathbb{Q}^n$ tal que $d(x,y) < \frac{1}{2n_0}$ (si nunca se vio esto, vale la pena escribir una demostración). Con esta construcción, afirmamos que $B(y,\frac{1}{2n_0}) \subset B(x,\epsilon) \subset V$.

Si $z \in B(y,\frac{1}{2n_0})$, $d(z,x) \le d(z,y)+d(y,x) < \frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0} < \epsilon$. Luego $B(y,\frac{1}{2n_0}) \subset B(x,\epsilon)$, como queríamos ver.

3. Si $X = \mathbb{R}$ (o cualquier conjunto no numerable), y tomamos $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ la topología discreta en X, entonces este espacio topológico satisface el primer axioma de contabilidad pero no el segundo.

Para ver esto, notemos que si $x \in X$, entonces $\{\{x\}\}$ es una base de abiertos de x, luego $(X,\mathcal{T}_{\text{disc}})$ es N_1. Por otro lado, como los puntos son abiertos, cualquier base de la topología debe contener al conjunto $\{\{x\} \,:\, x \in X\}$, el cual claramente no es numerable.

Definición. Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice T_0 si cumple que dados $x, y \in X$, con $x \neq y$, vale al menos una de las siguientes dos propiedades:

- existe $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$.
- existe $U \subset X$ abierto tal que $y \in U$ y $x \notin U$.

Definición. Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice T_1 si los puntos son cerrados.

Definición. Un espacio topológico se dice T_2 o Hausdorff si cumple que los conjuntos abiertos separan puntos, o sea dados $x, y \in X$, con $x \neq y$ existen abiertos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Lema 1.9. *Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.*

Demostración. Veamos que T_2 implica T_1: sea $x \in X$ un punto cualquiera. Para ver que $\{x\}$ es cerrado, debemos ver que su complemento es abierto. Si $y \neq x$, por ser nuestro espacio topológico T_2, existen U_x, V_y abiertos disjuntos tales que $x \in U_x$ y $y \in V_y$. Luego $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y\neq x} V_y$, es abierto, como queríamos ver.

Veamos que T_1 implica T_0: dados $x \neq y$, como el conjunto $\{x\}$ es cerrado, su complemento $X \setminus \{x\}$ es abierto, y claramente $y \in X \setminus \{x\}$ por ser $x \neq y$. □

Ejemplos. 1. Sea $(X,\mathcal{T})$ el espacio topológico dado por $X = \{1,2,3\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1,2\}\}$. Luego $(X,\mathcal{T})$ no es T_0, dado si tomamos como puntos $x = 1$, $y = 2$, entonces no existe ningún abierto que contenga a uno de ellos y no al otro.

2. Sea $(X,\mathcal{T})$ el espacio topológico dado por $X = \{1,2,3\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$. Notemos que dicho espacio es T_0, dado que si $x = 1, y = 2$, entonces $2 \in \{2\}$, que es abierto, y $1 \notin \{2\}$. Si $x = 1, y = 3$, entonces $1 \in \{1,2\}$, que es abierto y no contiene al 3, mientras que si $x = 2, y = 3$ el

abierto $\{2\}$ contiene al 2 pero no al 3. No obstante, $(X, \mathcal{T})$ no es T_1, dado que el punto 2 no es cerrado.

3. Sea X un conjunto cualquiera, y definimos $\mathcal{T}$ de la siguiente manera: un conjunto $U \subset X$ es abierto si $U = \emptyset$, o si su complemento $X \setminus U$ es un conjunto finito. Dejamos como ejercicio para el lector verificar que esto da una topología en el conjunto X. Mas aún, si X es finito, dicha topología es la topología discreta. Afirmamos que si X no es un conjunto finito, entonces $(X, \mathcal{T})$ es T_1 pero no es T_2.

   La afirmación de que es T_1 es clara: si $x \in X$ es un punto, debemos ver que $\{x\}$ es cerrado, o sea que $X \setminus \{x\}$ es abierto, lo cual por definición equivale a ver que su complemento (que es el conjunto $\{x\}$) es finito, lo cual claramente vale.

   Veamos que si X no es finito, entonces $(X, \mathcal{T})$ no es T_2: sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, y supongamos que existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$. Como $U \cap V = \emptyset$, $X = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$. Como U y V son abiertos, sus complementos son finitos, con lo cual X lo es.

Los ejemplos anteriores muestran que las condiciones T_0, T_1 y T_2 son distintas en espacios topológicos arbitrarios.

Observación. La topología de complemento finito aparece naturalmente en "geometría algebraica". Si uno quiere entender la recta $\mathbb{C}$ (que corresponde a los ideales maximales del anillo $\mathbb{C}[x]$), los cerrados para la topología Zariski son los llamados "conjuntos algebraicos", que corresponden a soluciones de sistemas de polinomios. Como un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ tiene finitas raíces, los conjuntos cerrados son precisamente los conjuntos finitos. El hecho de que la topología Zariski no sea Hausdorff es un problema no menor en geometría.

Proposición 1.10. *Todo espacio métrico es Hausdorff.*

Demostración. Si (X, d) es un espacio métrico, dados $x, y \in X$, con $x \neq y$, llamemos $r = d(x, y) > 0$. Luego $B(x, r/2) \cap B(y, r/2) = \emptyset$ pues si z es un punto en dicha intersección, entonces $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r/2 + r/2 = r$, lo cual es un absurdo. Además, $x \in B(x, r/2)$, $y \in B(y, r/2)$. □

Ejercicio 9. Probar que si $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ son dos espacios topológicos Hausdorff, entonces el producto $X_1 \times X_2$ (con la topología producto) es Hausdorff también.

Teorema 1.11. *Si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es N_2 entonces es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base numerable para la topología, y sea $x_i \in U_i$ un elemento cualquiera. Afirmo que $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$ es un conjunto denso en X.

Recordar que un conjunto S es denso si $\overline{S} = X$. Para esto debemos ver que todo elemento de X es o bien un punto de S o un punto de acumulación de él (por la Posposición 1.7). Sea $x \in X$. Si $x \in S$, listo; sino sea U un abierto que contiene a x. Luego como $\mathcal{B}$ es una base para la topología, existe i_0 tal que $x \in U_{i_0} \subset U$. Luego, como x no es un elemento de S, $S \setminus \{x\} = S$ y por lo tanto $x_{i_0} \in U_{i_0} \cap (S \setminus \{x\}) \subset U \cap (S \setminus \{x\})$, con lo cual x es un punto de acumulación. □

Notar que combinando las dos cosas que hemos demostrado, un espacio que satisface el segundo axioma de contabilidad, en particular es separable y satisface el primer axioma de contabilidad. La recíproca no es cierta, como verán en las prácticas.

PROPOSICIÓN 1.12. *Si* (X, d) *es un espacio métrico, entonces* X *es* N_2 *si y sólo si es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que N_2 implica separable. Para la recíproca, si (X, d) es separable, sea $S = \{x_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable. Con un argumento similar al utilizado al probar que $\mathbb{R}^n$ es N_2 demuestra que el conjunto $\{B(x_i, 1/n) \ : i, n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable para la topología. Dejamos los detalles para el lector. $\square$

EJERCICIO 10. Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico Hausdorff, y X es finito, entonces la topología es la discreta.

Capítulo 2

Funciones Continuas

Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que la función es *continua* si la preimagen de conjuntos abiertos de Y son abiertos en X, o sea vale que si $U \in \mathcal{T}'$ entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Es fácil verificar que valen las siguientes propiedades:

- $f^{-1}(\cap_{i \in I} U_i) = \cap_{i \in I}(f^{-1}(U_i))$,
- $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I}(f^{-1}(U_i))$,
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
- $f^{-1}(Y) = X$.

Luego el conjunto $f^{-1}(\mathcal{T}')$ es una topología en X (la inducida por la función f). Pedir que f sea continua es pedir que la topología $\mathcal{T}$ sea mas fina que la inducida por f.

Antes de dar ejemplos, veamos una formulación un poco mas débil de continuidad de una función.

Proposición 2.1. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de Y. Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si la preimagen de elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos en X.*

Demostración. $\Rightarrow$) Claramente los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos de Y, con lo cual si f es continua la preimagen de dichos elementos deben ser abiertos en X.
$\Leftarrow$) Veamos dos maneras distintas de probar esto. La primera es formal: $\mathcal{B}$ genera la topología $\mathcal{T}'$, y por las propiedades listadas arriba $f^{-1}(B)$ es base para la topología $\mathcal{T}_f = f^{-1}(\mathcal{T}')$ en X. Al ser $\mathcal{T}$ una topología, si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}$ es claro que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ es cerrado por uniones) como queríamos ver.

La segunda forma la escribimos para reforzar los conceptos vistos hasta aquí. Sea $U \subset Y$ un conjunto abierto. Queremos ver que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Notar que basta probar que dado $x \in f^{-1}(U)$ existe un abierto V_x tal que $x \in V_x \subset f^{-1}(U)$. Luego

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x.$$

Como $f(x) \in U$ (abierto), y $\mathcal{B}$ es una base para la topología, existe $W_{f(x)} \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \in W_{f(x)} \subset U$. Luego por hipótesis $V_x = f^{-1}(W_{f(x)})$ es abierto en X y vale que $x \in V_x \subset f^{-1}(U)$. □

Ejercicio 11. Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son espacios topológicos, y S es una sub-base de la topología $\mathcal{T}'$, entonces una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la preimagen de elementos de S son abiertos en X.

Ejemplo 6. Tomemos $X = Y = \mathbb{R}$, con la topología usual. Notar que una base para la topología es $\mathcal{B} = \{(y - \epsilon, y + \epsilon) \ : \ y \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Entonces por la Proposición 2.1, f es continua si la preimagen de elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos. Pero pedir que $f^{-1}(y_0-\epsilon, y_0+\epsilon)$ sea abierto, equivale a pedir que si $x_0 \in f^{-1}(y_0-\epsilon, y_0+\epsilon)$ entonces existe un intervalo alrededor de x_0 que este contenido en dicho conjunto; o sea existe $\delta > 0$ tal que $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset f^{-1}(y_0-\epsilon, y_0+\epsilon)$; equivalentemente, para todo x_0 tal que $|f(x_0)-y_0| < \epsilon$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-y_0| < \epsilon$.

Notar que esta definición es parecida a la dada en Análisis I, ¡pero no es exactamente igual! La definición a la que estamos acostumbrados es así: f es continua si para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, y todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$.

No entremos en pánico, dado que ambas condiciones son en realidad equivalentes. La definición de Análisis I lo que está diciendo (geométricamente) es que podemos simplemente entender el caso de intervalos centrados en el punto x_0 en lugar de tomar un intervalo cualquiera (lo mismo nos sucedió en el Ejemplo 4). Lo que sucede es que la noción de abiertos en espacio métricos es una propiedad "local", con lo cual siempre podemos achicar el intervalo.

Formalmente: veamos que si vale nuestra definición de continuidad entonces también vale la de Análisis I. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, y $\epsilon > 0$, miremos el intervalo $(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$ (centrado en $f(x_0)$ con radio ϵ). Como $f(x_0) \in (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$ por nuestra definición existe $\delta > 0$ tal que $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset f^{-1}(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$, equivalentemente si $|x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$.

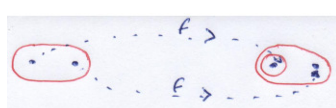
Veamos que si vale la definición de Análisis I entonces también vale la nuestra. Queremos ver que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ y todo $\epsilon > 0$, si x_0 tal que $|f(x_0)-y_0| < \epsilon$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-y_0| < \epsilon$. Sea $d = |f(x_0)-y_0| < \epsilon$, y $\tilde{\epsilon} = \epsilon - d$ (comparar con la Afirmación 2 del Ejemplo 4). Entonces $(f(x_0)-\tilde{\epsilon}, f(x_0)+\tilde{\epsilon}) \subset (y_0-\epsilon, y_0+\epsilon)$. Por la definición de continuidad de Análisis I, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)| < \tilde{\epsilon}$. Luego, por la desigualdad triangula

$$|f(x)-y_0| \leq |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)-y_0| < \tilde{\epsilon} + d = \epsilon.$$

En particular, tenemos que sacar dos cosas en claro de esto: **primero** la noción de continuidad que dimos al mirar el espacio topológico real es la misma que ya habían visto en Análisis I (lo mínimo esperado). **Segundo** al trabajar con espacio métricos, siempre vamos a poder restringirnos a trabajar con bolas centradas, pues el argumento del Ejemplo 4 y dado también en este ejemplo va a funcionar siempre.

Ejemplos. Veamos algunos ejemplos nuevos.

1. Tomemos $(X, \mathcal{T}) = (\{1,2\}, \{\emptyset, \{1,2\}\})$, $(Y, \mathcal{T}') = (\{1,2\}, \{\emptyset, \{1,2\}, \{1\}\})$, y miremos $f : X \to Y$ la función identidad (o sea $f(1) = 1$, $f(2) = 2$).



Aunque parezca mentira, la función identidad no es continua. La razón es que $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ que no es un elemento de $\mathcal{T}$. Es importante entender que la noción de continuidad no es algo que dependa solamente de la función f, sino que depende fuertemente de las topologías involucradas en los conjuntos.

2. Si $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ es un espacio topológico cualquiera con la topología discreta, entonces toda $f : X \to Y$ (para cualquier espacio topológico Y) es continua. La razón es que la topología discreta es mas fina que la cualquier otra, en particular que la inducida por cualquier f.
3. Si $(Y, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$ es un espacio topológico con la topología trivial, cualquier función $f : X \to Y$ es continua. La razón es que la topología inducida por f es simplemente $\{X, \emptyset\}$, que está contenido en cualquier topología.
4. Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son espacios topológicos, entonces las funciones proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son continuas (donde en $X \times Y$ consideramos la topología producto $\mathcal{T}_{\text{prod}}$). Mas aún, si $\tilde{\mathcal{T}}$ es una topología en $X \times Y$ tal que las proyecciones π_i, $i = 1, 2$ son continuas, entonces $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subset \tilde{\mathcal{T}}$ (o sea la topología producto es la menos fina que hace a las proyecciones continuas).

   La primera afirmación es clara, dado que si $U \in \mathcal{T}$, entonces $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ que es un elemento de $\mathcal{T}_{\text{prod}}$. Lo mismo con la otra proyección. A la vez, como $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ tiene al conjunto $\{\pi_1^{-1}(U), \pi_2^{-1}(V) \ : \ U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}'\}$ como sub-base, la segunda afirmación también es directa.

Proposición 2.2. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. Son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *La preimagen por f de cerrados es cerrado.*
3. *Para todo $A \subset X$ vale que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
4. *Para todo $B \subset Y$ vale que $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Si $V \subset Y$ es cerrado, V^c es abierto. Luego $f^{-1}(V^c)$ es abierto, con lo cual $(f^{-1}(V^c))^c$ es cerrado, pero por el Ejercicio 2.(e) de la guía $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$, con lo cual $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V^c))^c$.

$2 \Rightarrow 3$. El conjunto $\overline{f(A)}$ es cerrado, con lo cual $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado, y como contiene al conjunto A, vale que $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, con lo cual (aplicando f) $f(\overline{A}) \subset f \circ f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f(A)}$.

$3 \Rightarrow 4$. Sea $A = f^{-1}(B) \subset X$. Por hipótesis, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, o sea $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$. Luego calculando preimágenes, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1} \circ f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset f^{-1}(\overline{B})$.

$4 \Rightarrow 2$. Es inmediato, dado que si $B \subset Y$ es cerrado, $B = \overline{B}$, con lo cual $f^{-1}(B) \supset \overline{f^{-1}(B)}$, y como la otra inclusión vale siempre, $f^{-1}(B)$ es cerrado.

$2 \Rightarrow 1$. Lo dejamos como ejercicio (es similar a ver $1 \Rightarrow 2$). □

Teorema 2.3. *Si $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(Z, \mathcal{T}'')$ son espacios topológicos, y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

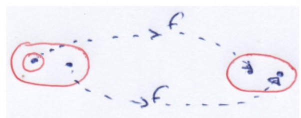
Demostración. La demostración es muy elemental: si $U \in \mathcal{T}''$, entonces $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Como g es continua, $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$, y como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$. □

Ejercicio 12. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función continua. Miremos $\operatorname{Im}(f)$ (la imagen de f) como espacio topológico (con la topología de subespacio). Entonces $f : X \to \operatorname{Im}(f)$ es continua.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si f es biyectiva, continua y su inversa es continua.

La noción de un homeomorfismo es que no sólo nos permite identificar los elementos de X con los de Y (a través de f), sino que hace lo mismo con los abiertos, o sea abiertos de X se corresponden con abiertos de Y y viceversa.

Ejercicio 13. Sean $X = Y = \{1, 2\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}\}$ y $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$, y sea $f : X \to Y$ la función identidad. Probar que f es continua, biyectiva pero no es un homeomorfismo.



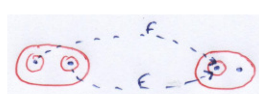
Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice *abierta* (respectivamente *cerrada*) si cumple que si $U \in \mathcal{T}$ entonces $f(U) \in \mathcal{T}'$ (respectivamente, si U es cerrado en X entonces $f(U)$ es cerrado en Y).

Notar que la noción de una función ser abierta/cerrada tiene que ver con "empujar" cosas por f, no traer para atrás.

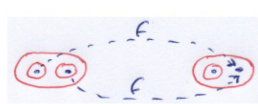
Ejemplos. Sean $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ la topología discreta y $\mathcal{T}_{\text{triv}}$ la topología trivial.

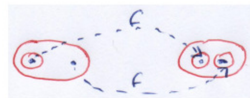
1. La función $f : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to (X, \mathcal{T}_{\text{triv}})$ dada por la identidad es continua, pero no es abierta ni cerrada.

2. La función $f : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to (X, \mathcal{T})$ dada por $f(1) = f(2) = 1$ es continua, abierta pero no es cerrada.



3. La función $f : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to (X, \mathcal{T})$ dada por $f(1) = f(2) = 2$ es continua, cerrada pero no es abierta.





4. La función $f : (X, \mathfrak{T}) \to (X, \mathfrak{T}_{\text{disc}})$ dada por la identidad es abierta y cerrada, pero no es continua.

Lema 2.4. *Sean $(X, \mathfrak{T})$ y $(Y, \mathfrak{T}')$ espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Entonces son equivalentes:*

1. f es un homeomorfismo.
2. f es abierta.
3. f es cerrada.

Demostración. Denotemos por $g : Y \to X$ la función inversa de f.

$1 \Leftrightarrow 2$. Sabemos que g es continua si y sólo si para todo $U \in \mathfrak{T}$ vale que $g^{-1}(U)$ es abierto, pero $g^{-1}(U) = f(U)$.

$1 \Leftrightarrow 3$. Sabemos que g es continua si y sólo si para todo $U \subset X$ cerrado vale que $g^{-1}(U)$ es cerrado, pero $g^{-1}(U) = f(U)$. □

Proposición 2.5. *Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, y sean U, V abiertos en X tales que $X = U \cup V$. Sea $(Y, \mathfrak{T}')$ un espacio topológico, y sean $f : U \to Y$, $g : V \to Y$ funciones continuas (donde U y V los pensamos con la topología subespacio) tales que si $x \in U \cap V$ entonces $f(x) = g(x)$. Entonces existe una única función $h : X \to Y$ continua que coincide con f en U y con g en V. Lo mismo vale si U y V son cerrados.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicio 14. Sean $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, y sea $(Y, \mathfrak{T}')$ un espacio topológico Hausdorff. Sean $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ funciones continuas. Probar que el conjunto $\{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X. ¿Sigue valiendo si $(Y, \mathfrak{T}')$ no es Hausdorff?

Ejercicio 15. Sean $(X, \mathfrak{T})$, $(Y, \mathfrak{T}')$ y $(Z, \mathfrak{T}'')$ espacios topológicos. Denotemos por $\pi_1 : Y \times Z \to Y$ (resp. $\pi_2 : Y \times Z \to Z$) la proyección en la primer coordenada (resp. la segunda coordenada). Probar que una función $f : X \to Y \times Z$ es continua si y sólo si $\pi_1 \circ f : X \to Y$ y $\pi_2 \circ f : X \to Z$ lo son.

1. Sucesiones y redes

Recordar que una sucesión en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Las sucesiones en general las denotamos por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Notar que si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico, una sucesión es una función continua $f : \mathbb{N} \to X$, dado que como $\mathbb{N}$ tiene naturalmente asociada la topología discreta, toda función es continua. ¿Que quiere decir que una sucesión converja a un punto?

Definición. Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X. Decimos que la sucesión *converge* a $x_0 \in X$ si vale que para todo abierto $U \in \mathfrak{T}$ que contiene a x_0, existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo 7. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $x_n \to x_0$ si para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n - x_0| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, dado que $B(x_0, \epsilon)$ forman una base de abiertos de x_0 (recordar que esta es la definición que usaron en Análisis I).

EJEMPLO 8. Sea $X = \{1, 2\}$ como espacio topológico con la topología trivial. Miremos la sucesión $\{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o sea la función constantemente 1). Claramente $\{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1, ¡pero también converge a 2! La razón es que cualquier abierto que contenga al 2 contiene todos los elementos de la sucesión, con lo cual satisface la definición de ser límite. En particular, una sucesión puede converger a muchos puntos distintos.

EJERCICIO 16. Dado $n \in \mathbb{N}$, encontrar un espacio topológico y una sucesión en él que converja exactamente a n puntos distintos.

EJERCICIO 17. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \ : \ U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ (la llamada topología del complemento finito). Ver que $\mathcal{T}$ es una topología. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que como función es inyectiva (o sea $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$). Probar que $\{x_n\}$ converge a 0 (y en realidad a cualquier punto real).

TEOREMA 2.6. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico que es Hausdorff, entonces toda sucesión converge a lo sumo un único punto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a dos puntos x, y, con $x \neq y$. Como $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$. Como $\{x_n\}$ converge a x, existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$, pero como $U \cap V = \emptyset$, $x_n \notin V$ para todo $n \geq n_0$ con lo cual $\{x_n\}$ no puede converger a y. $\square$

Como todo espacio métrico es Hausdorff, siempre hay a lo sumo un único punto de convergencia.

LEMA 2.7. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico donde vale que toda sucesión converge a lo sumo a un único punto, entonces* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_1.

DEMOSTRACIÓN. Recordar que T_1 por definición es que los puntos son cerrados. Supongamos que existe $x \in X$ que no es cerrado, o sea existe $y \neq x$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$. Afirmo entonces que la sucesión $\{x\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge tanto a x (lo que es claro) como a y.

Como $y \notin \{x\}$, y esta en su clausura, debe ser un punto de acumulación. O sea, si U es un abierto, con $y \in U$, $\{x\} \cap (U \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. En particular, $x \in U$ para todo abierto que contenga a y, luego $\{x\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. $\square$

Notar que el Ejercicio 17 muestra un espacio topológico que es T_1 pero no hay unicidad en la convergencia, luego esta propiedad es una condición estrictamente mas fuerte que ser T_1 pero mas débil que ser T_2 (debido al Ejercicio 18).

Para los que nunca lo vieron antes, un conjunto X se dice *numerable* si existe una función $f : \mathbb{N} \to X$ suryectiva. Así todo conjunto finito es numerable, y $\mathbb{N}$ es numerable. Algunos ejercicios para entender un poco esta definición.

EJERCICIOS.

1. Probar que si X es numerable, y existe $g : X \to Y$ suryectiva, entonces Y es numerable.
2. Probar que $\mathbb{Z}$ es numerable.

3. Todo número natural n que sea par se puede escribir de forma única como $n = 2^a(2b-1)$. Probar que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por
$$f(n) = \begin{cases} (1,1) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (a,b) & \text{si } n = 2^a(2b-1), \end{cases}$$
es una función suryectiva. Deducir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.
4. Probar que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Ejercicio 18. Consideremos el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$ (la topología llamada de complemento numerable).

- Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a x_0, entonces existe n_0 tal que $x_n = x_0$ para todo $n \geq n_0$.
- Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ cumple que toda sucesión converge a lo sumo a un único valor, pero no es T_2.

Teorema 2.8. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función. Si f es continua, entonces si una sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto x en X, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge al punto $f(x)$ en Y. La recíproca no es cierta en general, pero si vale por ejemplo si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio métrico.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$, y veamos que $f(x_n) \to f(x)$. Sea $U \in \mathcal{T}'$ un abierto tal que $f(x_0) \in U$. Como f es continua, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ y claramente $x \in f^{-1}(U)$, con lo cual (por definición de convergencia) existe n_0 tal que $x_n \in f^{-1}(U)$ para todo $n \geq n_0$. Luego $f(x_n) \in f(f^{-1}(U)) \subset U$ para todo $n \geq n_0$, o sea $f(x_n) \to f(x)$.

Supongamos ahora que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio métrico y veamos la recíproca. Por la Proposición 2.2 basta ver que para todo conjunto $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Sea $y \in \overline{A}$. Luego vale que $y \in A$ o sino y es un punto de acumulación. En el primer caso, claramente $f(y) \in \overline{f(A)}$. En el segundo, como estamos en un espacio métrico, podemos tomar el abierto $B(y, 1/n)$ y como y es un punto de acumulación, existe $x_n \in A$ tal que $d(y, x_n) < 1/n$. En particular la sucesión $\{x_n\}$ está en A y converge al punto y. Luego la sucesión $f(x_n)$ converge al punto $f(y)$ por hipótesis, pero como $f(x_n) \in \overline{f(A)}$ y dicho conjunto es cerrado, $f(y) \in \overline{f(A)}$ como queríamos ver. $\square$

La condición de ser métrico se puede reemplazar por la condición de ser N_1, siendo la demostración casi igual a la dada.

Ejercicio 19. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es la topología de complemento numerable del Ejercicio 18.

1. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, vale que si $x_n \to x_0$ entonces $f(x_n) \to f(x_0)$ (por el primer ítem del Ejercicio 18).
2. Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1. \\ 2 & \text{si } x \neq 1, \end{cases}$$
no es una función continua.

2. Redes

Recordar que un *pre-orden* en un conjunto X es una relación $\sim$ que cumple:

- **reflexiva**: $x \sim x$ para todo $x \in X$.
- **transitiva**: si $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $x \sim z$.

A un orden uno le suele pedir además la propiedad antisimétrica (si $x \sim y$ y $y \sim x$ entonces $x = y$). Un *conjunto dirigido* es un par $(X, \sim)$ donde X es un conjunto cualquiera, y $\sim$ es una relación en X que es un pre-orden y cuyos elementos tienen cota superior, esto es:

- Dados $x, y \in X$ existe $z \in X$ tal que $x \sim z$ y $y \sim z$.

Por ejemplo, si X es un conjunto cualquiera, y tomamos $Y = \mathcal{P}(X)$ (el conjunto de partes de X) con la relación dada por $A \sim B$ si $B \subset A$ es un conjunto dirigido.

Notar que en general en un conjunto dirigido, dados dos elementos del conjunto no podemos necesariamente relacionarlos (o sea no vale tricotomía). Al trabajar con conjuntos dirigidos, la relación la vamos a denotar por $\leq$.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, una *red* en X es una función $r : D \to X$, donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido. Denotaremos una red por $\{x_d\}_{d \in D}$.

Como en el caso de sucesiones, tenemos la noción de que una red converja a un punto.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, decimos que una red $\{x_d\}_{d \in D}$ converge a x si para todo $U \in \mathcal{T}$ que contiene a x, existe $d_0 \in D$ tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_0$.

Notar que las sucesiones son ejemplos de redes, donde el conjunto dirigido es simplemente $(\mathbb{N}, \leq)$. En este caso la noción de convergencia de redes y sucesiones coincide.

Proposición 2.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A que converge a x.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \overline{A}$. Luego por definición, para todo abierto $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$. Miremos el conjunto dirigido $(D, \leq)$ donde $D = \{U \in \mathcal{T} \ : \ x \in U\}$ con el orden usual de contención, y la red dada por $r(U) = x_U$ cualquier punto en $A \cap U$. Claramente r converge a x. Notar que si $x \in A$, podemos tomar la red constante.

$\Leftarrow$) Supongamos que tenemos un conjunto dirigido $(D, \leq)$ y una red $r : D \to A$ que converge a x. Recordar la noción de convergencia a x: dado $U \in \mathcal{T}$ que contenga a x, existe $d_0 \in D$ tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_0$. En particular, $U \cap A$ es no vacío. $\square$

Proposición 2.10. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff si y sólo si toda red en X converge a lo sumo a un punto.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que X es Hausdorff, y sea $(D, \leq)$ un conjunto dirigido y $\{x_d\}_{d \in D}$ una red en X. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tal que la red converge a ambos. Como X es Hausdorff, existen abiertos U, V disjuntos tales que $x \in U$, $y \in V$. Como $x_d \to x$ existe d_1 tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_1$. Análogamente, existe d_2 tal que $x_d \in V$ para todo $d \geq d_2$. Como D es dirigido, existe d_3 mayor que d_1 y que d_2. Luego $x_{d_3} \in U \cap V = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Supongamos que X no es Hausdorff. Luego existen $x, y \in X$ tales que para todo par de abiertos (U, V) con $x \in U$, $y \in V$ vale que $U \cap V \neq \emptyset$. Miremos el conjunto $D = \{U \in \mathcal{T} \ : x \in U\} \times \{V \in \mathcal{T} \ : \ y \in V\}$, con el orden dado por $(U, V) \leq (U', V')$ si $U' \subset U$, $V' \subset V$. Notar que dicho orden hace de D un conjunto dirigido, pues si (U, V) y (U', V') son elementos de D, entonces $(U \cap U', V \cap V')$ es un elemento de D que es mayor que ambos. Miremos la red dada por $r(U, V) = z$ tal que $z \in U \cap V$ (cualquiera).

Veamos que dicha red converge a x. Sea $U_0 \in \mathcal{T}$ es un abierto que contiene a x, y tomemos un abierto V_0 cualquiera que contenga a y. Sea $d_0 = U_0 \times V_0$. Si $(U, V) \in D$ cumple que $(U, V) \geq d_0$, en particular $U \subset U_0$. Recordar que $r(U, V) = z \in U \cap V \subset U_0$, luego $r(d) \in U_0$ para todo $d \geq d_0$ como queríamos ver. Análogamente se ve que la red converge a y. $\square$

Teorema 2.11. *Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son espacios topológicos, y $f : X \to Y$ es una función, entonces f es continua si y sólo si vale que toda red $\{x_d\}_{d \in D}$ que converge a $x \in X$, $\{f(x_d)\}_{d \in D}$ converge a $f(x)$ en Y.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\{x_d\}_{d \in D}$ una red en X que converge al punto x, veamos que $\{f(x_d)\}_{d \in D}$ converge a $f(x)$. Sea V un abierto en Y que contiene a $f(x)$. Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es un abierto en X que contiene a x. Como $x_d \to x$, existe d_0 tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_0$, luego $f(x_d) \in f(f^{-1}(V)) \subset V$ para todo $d \geq d_0$ (comparar con la demostración del Teorema 2.8).

$\Leftarrow$) Supongamos que f no es continua, luego existe $V \in \mathcal{T}'$ tal que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{T}$. En particular, $V \neq \emptyset$ y existe $x \in f^{-1}(V)$ tal que todo abierto $U \in \mathcal{T}$ que contiene a x no esta contenido en $f^{-1}(V)$. Tomemos $D = \{U \in \mathcal{T} \ : \ x \in U\}$ con el orden dado por la inclusión, y la red dada por $r(U) = y$ tal que $y \in U \setminus f^{-1}(V)$ (cualquiera).

Claramente, la red (D, s) converge a x, pues si U es abierto y contiene a x, $U \in D$ y entonces $r(d) \in U$ para todo $d \geq U$. Por otro lado, veamos que la red $(f \circ r, D)$ no puede converger a $f(x)$.

Por definición, tomando el abierto V, si la red converge a $f(x)$ existe $U_0 \in D$ tal que $(f \circ r)(U) \in V$ para $U \geq U_0$. Pero por definición, si $U \in D$, $r(U) = y \notin f^{-1}(V)$ con lo cual $f(r(U)) \notin V$. $\square$

Ejercicios.

1. Probar que si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son dos espacios topológicos, y $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son las funciones proyecciones, entonces ambas son abiertas.
2. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual) al subconjunto
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \cdot y = 1\}$$
Probar que X es cerrado. ¿Quién es $\pi_1(X)$? ¿Es cerrado?

Capítulo 3

Espacios conexos y arco-conexos

1. Espacios conexos

Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice conexo si no existen abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ no vacíos y disjuntos tales que $X = U \cup V$.

Ejemplos. 1. Si X es un conjunto cualquiera, y miramos $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$, entonces es conexo si i sólo si $X = \emptyset$ o $\#X = 1$.
2. El espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{triv}})$ es conexo para cualquier conjunto X.
3. El espacio topológico $\mathbb{R}$ (con la topología usual) es conexo.
   Supongamos que $\mathbb{R} = U \cup V$ con U, V abiertos. Como $U \neq \emptyset$, existe $x \in U$. Sea $d = d(x, V) = \text{ínf}\{d(x, y) \ : \ y \in B\}$ (notar que como V es no vacío, existe un elemento $y \in V$ con lo cual dicho ínfimo existe). A la vez, como U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$, con lo cual $d \geq \epsilon > 0$.

   Por definición de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in V$ tal que $d(x, y_n) < d + \frac{1}{n}$. En particular, la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy, con lo cual converge a un elemento $y \in \mathbb{R}$ (por ser $\mathbb{R}$ completo). Claramente $d(x, V) = d(x, y)$. Notar que $y \notin V$, dado que si lo está, al ser V abierto, existiría $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset V$ y con lo cual existiría $\tilde{y} \in V$ tal que $d(x, \tilde{y}) < d(x, V)$ (que es el ínfimo de tales distancias). Luego $y \in U$, pero como U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset U$, pero existe n_0 tal que $y_{n_0} \in B(y, \epsilon)$ (pues $y_n \to y$) con lo cual $y_{n_0} \in U \cap V = \emptyset$. Absurdo.
4. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo (a, b) es conexo. La demostración es análoga al caso anterior.
5. De forma análoga, se puede ver que $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de las métricas anteriores es conexo.

Ejercicio 20. Supongamos que X es un conjunto con 3 elementos. ¿Cuántas topologías distintas puede tener el conjunto X de forma que sea conexo?

Notemos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y sólo si los únicos conjuntos U que son a la vez abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$. La razón es que si $X = U \cup V$ con U, V abiertos y disjuntos implica que U y V son también cerrados.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $Y \subset X$ es un subconjunto, decimos que Y es conexo si lo es como subespacio topológico (o sea con la topología inducida).

Lema 3.1. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y sólo si no existe una función suryectiva $f : X \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que existe una tal función, luego sean $U = f^{-1}(\{0\})$ y $V = f^{-1}(\{1\})$. Ambos son abiertos (por ser f continua), no vacíos (por ser f suryectiva), disjuntos y su unión es todo X, con lo cual X no es conexo.

$\Leftarrow$) Si $X = U \cup V$, con U, V abiertos, no vacíos y disjuntos, definimos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

Como $U \cap V = \emptyset$ f está bien definida. Como U, V son no vacíos, f es suryectiva, y como U, V son abiertos, f es continua. $\square$

Teorema 3.2. *Supongamos que $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico, y existen $\{U_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de X conexos tal que $\cap_{i\in I} U_i$ es no vacío. Entonces $\bigcup_{i\in I} U_i$ es conexo.*

Demostración. Llamemos $Y = \bigcup_{i\in i} U_i$, como espacio topológico. Supongamos que $Y = A \cup B$, con A, B subconjuntos abiertos en Y (recordar que esto quiere decir que existen abiertos $\tilde{A}, \tilde{B}$ de X tales que $A = \tilde{A} \cap Y$, $B = \tilde{B} \cap Y$), disjuntos y no vacíos

Como U_i es conexo para cada i, $A \cap U_i = U_i$ o $\emptyset$ (sino $U_i = (U_i \cap A) \cup (U_i \cap B)$ abiertos no vacíos y disjuntos). Recordemos que existe $x \in \cap_{i\in I} U_i$. Luego, si $U_i \cap A = U_i$ para un i, lo mismo vale todos los valores de i (pues $x \in A$), con lo cual $U_i \cap B = \emptyset$ para todo $i \in I$, con lo cual $B = Y \cap B = \emptyset$. $\square$

Teorema 3.3. *Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, y sea A un subconjunto conexo. Entonces si B es un subconjunto de X tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, B también es conexo. En particular, si A es conexo, su clausura también lo es.*

Demostración. Supongamos que $B = U \cup V$ con U, V abiertos en B, disjuntos. Como A es conexo, $A \subset U$ ó $A \subset V$ (pues $A = (A \cap U) \cup (A \cap B)$). Supongamos que $A \subset U$. Luego $\overline{A} \cap B \subset U$ (pues U es cerrado en B, y recordar que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A), pero por hipótesis $B \subset \overline{A}$, con lo cual $\overline{A} \cap B = B$ y por lo tanto $B \subset U$ (o sea V es vacío). $\square$

Teorema 3.4. *Sean $(X, \mathfrak{T})$ y $(Y, \mathfrak{T}')$ dos espacios topológicos, donde X es conexo, y sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(X)$ no es conexo, o sea $f(X) = U \cup V$, con U, V abiertos en $f(X)$ disjuntos no vacíos. Luego,

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Como f es continua, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos, como f es suryectiva en $f(X)$, son no vacíos, y como A, B son disjuntos, son disjuntos, lo que contradice que X es conexo. $\square$

Corolario 3.5. *Si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico conexo, y $(Y, \mathfrak{T}')$ es un espacio topológico no conexo, no existe ninguna función continua y suryectiva $f : X \to Y$.*

Teorema 3.6. *Si $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $1 \leq i \leq n$ son espacios topológicos conexos, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ (con la topología producto) es conexo.*

Demostración. Por inducción en i. Si $i = 1$, listo. Veamos que el paso inductivo es equivalente a probar que el producto de dos espacios topológicos conexos es conexo. La razón es que si $(X_1, \mathfrak{T}_1), \ldots, (X_{n+1}, \mathfrak{T}_{n+1})$ son conexos, la hipótesis inductiva dice que $A = \prod_{i=1}^n X_i$ es conexo, y $B = X_{n+1}$ es conexo. Luego si probamos que el producto de dos espacios conexos es conexo, ganamos.

La idea es cubrir el producto de dos espacios conexos por unión de “lineas” que siempre tengan un punto en común, y luego usar el Teorema 3.2. Para eso, fijemos $a \in X$ y un $b \in Y$, y tiremos el conjunto

$$T_a = X \times \{b\} \cup \{a\} \times Y.$$

Notar que $X \times \{b\}$ es homeomorfo a X vía la función π_1 (proyección en la primer coordenada). Dejamos para el lector verificar que dicha función es un homeomorfismo. Luego, como X es conexo, también lo es $X \times \{b\}$. Análogamente, $\{a\} \times Y$ es conexo, y como ambos conjuntos tienen al punto (a, b) como intersección, el conjunto T_a es conexo. Ahora,

$$X \times Y = \bigcup_{a \in X} T_a,$$

pues el punto $(x_0, y_0) \in T_{x_0}$. Por otro lado, para todo par $a, a' \in X$, $T_a \cap T_{a'} \neq \emptyset$, pues la “recta” $X \times \{b\}$ está en ambos. Luego por el Teorema 3.2 $X \times Y$ es conexo. $\square$

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $x \in X$, tiene sentido mirar al conexo mas grande que contiene al punto x, esto es:

$$\mathscr{C}_x = \bigcup_{\substack{U \text{ conexo} \\ x \in U}} U.$$

Por el Teorema 3.2 $\mathscr{C}_x$ es conexo.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, definimos la *componente conexa de* x al conjunto $\mathscr{C}_x$.

Lema 3.7. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, y* $x, y \in X$*, entonces vale que* $\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_y$ *ó* $\mathscr{C}_x \cap \mathscr{C}_y = \emptyset$.

Demostración. Si $\mathscr{C}_x \cap \mathscr{C}_y$ no es vacío, entonces el conjunto $\mathscr{C}_x \cup \mathscr{C}_y$ es conexo, con lo cual está contenido en $\mathscr{C}_x$ (que es el máximo conexo que contiene a x), por lo tanto $\mathscr{C}_y \subset \mathscr{C}_x$. Análogamente se ve que vale la otra inclusión. $\square$

Esto nos permite definir una relación en el conjunto X, diciendo que $x \sim y$ si y sólo si $\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_y$.

Lema 3.8. *Esta relación es una relación de equivalencia.*

Demostración. La relación es claramente reflexiva ($\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_x$), simétrica (si $\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_y$ entonces $\mathscr{C}_y = \mathscr{C}_x$) y transitiva (si $\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_y$ y $\mathscr{C}_y = \mathscr{C}_z$ entonces $\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_z$). $\square$

Una relación de equivalencia en un conjunto nos permite mirar el *conjunto de clases de equivalencia*, que lo denotaremos por $X/\sim$. A la vez, si $[x]$ es un elemento de $X/\sim$, denotaremos por x a un elemento cualquiera en la clase $[x]$.

Proposición 3.9. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, entonces* X *es la unión disjunta de las componentes conexas, o sea* $X = \bigcup_{[x] \in X/\sim} \mathscr{C}_x$.

Demostración. Es automático de la definición del conjunto de clases. $\square$

En particular, un espacio es conexo si y sólo si tiene una única componente conexa.

2. Espacios arco-conexos

En lo que queda de estas notas, vamos a denotar por I al intervalo $[0,1]$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$.

Definición. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, y sean $x,y \in X$ dos puntos. Un *arco* de x a y es una función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0)=x$, $\alpha(1)=y$.

Definición. Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice *arco-conexo* si para todo par $x,y \in X$ existe un arco de x en y.

Como siempre existe un arco de x en x (tomando la función constante), para decidir si un espacio es arco-conexo o no, basta entender que pasa con puntos distintos.

La noción intuitiva de un arco es la de poder dibujar una cuerda saliendo de x y llegando a y. A pesar de que en un espacio topológico cualquiera esto no se puede hacer, esta idea intuitiva sirve para demostrar varias propiedades. Por ejemplo, $(X,\mathcal{T}_{\text{triv}})$ es siempre arcoconexo (independientemente del espacio X, por ejemplo podría tener simplemente dos puntos donde la idea de una cuerda no tiene mucho sentido). La razón de por qué el espacio es arcoconexo, es que dados $x,y \in X$ distintos, podemos definir la función

$$\alpha(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \\ y & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Como toda función hacia un espacio topológico cuya topología es discreta es continua, $\alpha(x)$ es un arco que une x con y. Así, $(X,\mathcal{T}_{\text{triv}})$ es arcoconexo.

Ejemplos.

1. $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$, donde por $\| \ \|_2$ (que es una norma) denotamos a la distancia $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, es arcoconexo. Dados $x,y \in \mathbb{R}^n$, podemos mirar la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ dada por
$$\alpha(t) = t\cdot y + (1-t)\cdot x.$$
Claramente es continua, $\alpha(0)=x$, $\alpha(1)=y$.
2. $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \| \ \|_2)$ es arco-conexo. Hay muchas formas de probar eso (dado que hay muchos arcos entre dos puntos). Por ejemplo, dados $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ distintos, si la recta que pasa por x y por y no pasa por el cero, la misma función del ejercicio anterior sirve. Caso contrario, tomemos un punto z cualquiera que no esté en la recta que une x con y, y miremos como α el arco que une primero x con z (que no puede contener al cero, ¿por qué?) y luego z con y. Mas específicamente,
$$\alpha(t) = \begin{cases} (1-2t)\cdot x + 2t\cdot z & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (2t-1)\cdot y + (2-2t)\cdot z & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$
Dejamos como ejercicio al lector ver que la función α es continua.
3. $S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2 = 1\}$, con la topología subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ es arco-conexo. Hay varias formas de ver esto. Una es puramente geométrica (S^n es una esfera, con lo cual podemos movernos por ella entre dos puntos cualesquiera). Otra manera de verlo, es que si a S^n le quitamos un punto, obtenemos un espacio topológico homeomorfo a R^n (dada por la proyección estereográfica). Mas concretamente, supongamos

que a S^n le quitamos el “polo norte”, o sea el punto $P = (0, \dots, 0, 1)$, y miremos las funciones: $f : S^n \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

y $g : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{P\}$ dada por

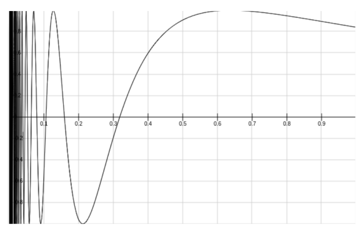
$$g(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1} \right).$$

Dejamos como ejercicio al lector ver que ambas están bien definidas y son una inversa de la otra. Como $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo, $S^n \setminus \{P\}$ también lo es. Luego podemos conectar dos puntos cualesquiera que no sean P. Si algún punto es P, podemos rotar S de forma de cambiar el punto desde el que proyectamos.

Ejemplo 9. Consideremos $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto dado por

$$X = \{(x, \sin(\pi/x)) \; : \; 0 < x \leq 1\} \cup \{0\} \times [-1, 1],$$

con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \| \, \|_2)$. El espacio X es conexo pero no arco-



conexo.

X **es conexo.** Llamemos $S = \{(x, \sin(\pi/x)) \; : \; 0 < x \leq 1\}$. Claramente S es la imagen por la función $x \to (x, \sin(\pi/x))$ del intervalo $(0, 1]$. Como la función es continua y $(0, 1]$ es conexo, S es conexo. Por otro lado, $X = \overline{S}$, con lo cual por el Teorema 3.3 X resulta conexo.

X **no es arco-conexo.** Supongamos que lo es. En particular, podemos unir el punto $(0, 0)$ con el punto $(1, 0)$, o sea existe $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = (0, 0)$ y $\alpha(1) = (1, 0)$.

Sea $b = \sup\{x \in I \; : \; \alpha(x) \in \{0\} \times [-1, 1]\}$. Claramente dicho conjunto es no vacío (el 0 está). Por otro lado, como $\{0\} \times [-1, 1]$ es cerrado, $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$ es cerrado, con lo cual b es en realidad un máximo. En particular, $\alpha(x) \in S$ para todo $b < x \leq 1$.

Llamemos $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a la proyección en la primer coordenada (que es una función continua), y denotemos por $\alpha_1 = \pi_1 \circ \alpha$ (que también es continua por ser composición de continuas). Sea $\delta > 0$ tal que $b + \delta < 1$. Notar que $\alpha_1(b + \delta) > 0$ por ser b un supremo. Luego $\alpha_1([b, b + \delta])$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}$, en particular contiene a todos los puntos del intervalo $[0, \alpha_1(b + \delta)]$. En particular, existe N_0 tal que $\frac{2}{n} \in [0, \alpha_1(b + \delta)]$ para todo $n \geq N_0$. Como la función α_1 es suryectiva sobre el conjunto $[0, \alpha_1(b + \delta)]$, sea $t_n = \min\{x \in [b, 1] \; : \; \alpha_1(x) = \frac{2}{n}\}$ para cada $n \geq N_0$ (notar que el conjunto es cerrado y no vacío, por ende tiene mínimo).

Afirmo: $t_{n+1} < t_n$. La razón es que $\alpha_1[b, t_n]$ contiene al intervalo $[0, \frac{2}{n}]$, con lo cual existe un elemento $s \in [b, t_n]$ tal que $\alpha_1(s) = \frac{2}{n+1}$. Como $s < t_n$, $t_{n+1} < t_n$.

Recordar que toda sucesión decreciente y acotada inferiormente converge, con lo cual $\{t_n\}$, $n \geq N_0$ converge a un valor u, y al ser α_1 continua, $\alpha_1(t_n) \to \alpha_1(u)$. Pero $u \in [b, 1]$ y $\alpha_1(t_n) = \frac{2}{n}$, con lo cual $\alpha_1(u) = 0$, pero b es el único valor en $[b, 1]$ donde α_1 vale 0, con lo cual $u = b$. Resumiendo: existe una sucesión $\{t_n\}$ que converge a b y tal que $\alpha_1(t_n) = \frac{2}{n}$. Luego como α es continua, $\alpha(t_n)$ debe converger a $\alpha(b)$, o sea dado $\varepsilon = 1/2$, existe N_1 tal que para $n \geq N_1$, $\|\alpha(t_n) - \alpha(b)\|_2 < \frac{1}{2}$. Pero $\alpha(t_n) = (\frac{2}{n}, \sin(\frac{\pi n}{2}))$, y

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid n, \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{si } n \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

¡Luego la sucesión $\alpha(t_n)$ nunca pueden ser una sucesión de Cauchy!

Teorema 3.10. *Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son dos espacios topológicos, con X arco-conexo y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es arco-conexo.*

Demostración. Tomemos $y_1, y_2 \in f(X)$ dos puntos cualesquiera, y sean x_0, x_1 puntos en X tales que $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Como X es arco-conexo, existe $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_1$, $\alpha(1) = x_2$. Luego si llamamos $\beta = f \circ \alpha$, $\beta : I \to f(X)$, es continua y $\beta(0) = y_1$, $\beta(1) = y_2$. □

Teorema 3.11. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio arco-conexo, entonces es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X = U \cup V$, con U, V abiertos disjuntos y no vacíos. Tomemos $x \in U$ y $y \in V$ cualesquiera. Como X es arco-conexo, existe $\alpha : I \to X$ tales que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si llamamos $J = \alpha(I)$ (la imagen), por el Teorema 3.4 J es conexo, pero por otro lado $J = (U \cap J) \cup (V \cap J)$, donde ambos son abiertos en J, disjuntos y no vacíos, lo que es un absurdo. □

Teorema 3.12. *Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son espacios topológicos arco-conexos, entonces $X \times Y$ es un espacio topológico arco-conexo.*

Demostración. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos cualesquiera de $X \times Y$. Como X es arco-conexo, existe $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_1$, $\alpha(1) = x_2$. A la vez, como Y es arco-conexo, existe $\beta : I \to Y$ tal que $\beta(0) = y_1$, $\beta(1) = y_2$. Consideremos la función $\alpha \times \beta : I \to X \times Y$ dada por $\alpha \times \beta(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Claramente $\alpha \times \beta(0) = (x_1, y_1)$, $\alpha \times \beta(1) = (x_2, y_2)$, y $\alpha \times \beta$ es continua por el Ejercicio 15. □

De manera análoga al caso conexo, el producto de finitos espacios topológicos arco-conexos vuelve a ser arco-conexo.

Teorema 3.13. *Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y existen $\{U_i\}_{i \in I}$ subconjuntos de X arco-conexos tal que $\cap_{i \in I} U_i$ es no vacío. Entonces $\bigcup_{i \in I} U_i$ es arco-conexo.*

Antes de dar la demostración de este resultado, aprovechamos para introducir algunas notaciones que nos serán muy útiles mas adelante. Si $\alpha : I \to X$ es una función continua, denotamos por $\alpha^{-1} : I \to X$ a la función que hace el mismo recorrido que α, pero en sentido contrario, esto es:

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t). \tag{1}$$

Notar que α^{-1} comienza donde termina α, y termina donde comienza α. A la vez, si $\alpha : I \to X$ y $\beta : I \to X$ son tales que α termina donde comienza β, o sea $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos $\alpha * \beta : I \to X$ a la función

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Notar que $\alpha * \beta$ es una función continua que comienza donde comienza α y termina donde termina β.

Demostración del Teorema 3.13. Para aliviar la notación, llamemos $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$. Sean $z \in \cap_{i \in I} U_i$, y sean $x, y \in Y$. Queremos ver que hay un arco que une x con y. Supongamos que $x \in U_{i_0}$. Como tal conjunto es arco-conexo, existe $\alpha : I \to U_{i_0} \subset Y$ continua tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = z$. Por otro lado, si $y \in U_{i_1}$, como dicho conjunto es arco-conexo, existe $\beta : I \to U_{i_1} \subset Y$ tal que $\beta(0) = y$, $\beta(1) = z$. Luego la función $\alpha * \beta^{-1} : I \to Y$ es continua y cumple que comienza en x y termina en y. $\square$

Como hicimos con conjuntos conexos, este resultado nos permite, dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un punto $x \in X$, mirar al conjunto arco-conexo mas grande que contiene al punto x, esto es:

$$\mathscr{A}_x = \bigcup_{\substack{U \text{ arco-conexo} \\ x \in U}} U.$$

Dado que el conjunto $\{x\}$ es arco-conexo, y contiene al punto x, $\mathscr{A}_x$ es no vacío.

Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, definimos la *componente arco-conexa de x* al conjunto $\mathscr{A}_x$.

Lema 3.14. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $x, y \in X$, entonces vale que $\mathscr{A}_x = \mathscr{A}_y$ ó $\mathscr{A}_x \cap \mathscr{A}_y = \emptyset$.*

Demostración. Igual a la demostración del Lema 3.7. $\square$

Análogamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.15. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces X es la unión disjunta de las componentes arco-conexas.*

Claramente, un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es arco-conexo si y sólo si hay una única componente arco-conexa.

Lema 3.16. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $x \in X$ entonces $\mathscr{A}_x \subset \mathscr{C}_x$.*

Demostración. Claramente $\mathscr{A}_x$ es arco-conexo, con lo cual es conexo (por el Teorema 3.11), con lo cual $\mathscr{A}_x \subset \mathscr{C}_x$ (por ser este último el mayor conexo que contiene a x). $\square$

Notar que en general $\mathscr{A}_x$ y $\mathscr{C}_x$ no son iguales. Si miramos el Ejemplo 9, vimos que dicho espacio topológico es conexo, con lo cual hay una única componente conexa. Sin embargo, vimos que el espacio no es arco-conexo. Es fácil ver que $\{0\} \times [-1, 1]$ es arco-conexo, y que el conjunto que llamamos S también lo es. Luego tiene dos componentes arco-conexas.

3. Espacios localmente conexos

DEFINICIÓN. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que X es *localmente conexo en* x si vale que para todo abierto U que contiene a x, existe V abierto y conexo que contiene a x y contenido en U. O sea: si $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$, existe $V \in \mathcal{T}$ conexo con $x \in V \subset U$. Decimos que X es localmente conexo si lo es en todos sus puntos.

EJEMPLOS.
1. Si a, b son números reales, con $a < b$, el intervalo (a, b) es localmente conexo (con la topología subespacio).

   Para ver eso, sea $x \in \mathbb{R}$, con $a < x < b$, debemos ver que (a, b) es localmente conexo en x. Sea U un abierto en (a, b) que contiene a x. En particular, U es un abierto de $\mathbb{R}$ (pues un abierto en (a, b) es un abierto en $\mathbb{R}$ intersecado con el intervalo (a, b) que también es abierto). Sabemos que una base para la topología de $\mathbb{R}$ son los intervalos, con lo cual existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (c, d) \subset U$. Pero los intervalos son conexos, listo.
2. El abierto $X = (0, 1) \cup (2, 3)$ de $\mathbb{R}$ es localmente conexo (ver el Ejercicio 22). Si $x \in X$, entonces $x \in (0, 1)$ o $x \in (2, 3)$; supongamos que vale lo primero. Sea U un abierto de X que contiene a x. Luego $U \cap (1, 2)$ es un abierto en $(1, 2)$ que contiene a x, pero por el ejemplo anterior $(1, 2)$ es localmente conexo, con lo cual existe un abierto V conexo que contiene a x y está contenido en $U \cap (1, 2) \subset U$.
3. De manera análoga, uniones de bolas en $\mathbb{R}^n$ son espacios localmente conexos.

EJERCICIO 21. Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico localmente conexo, y $U \subset X$ es un subconjunto abierto, entonces U (con la topología subespacio) es localmente conexo.

EJEMPLO 10. De manera similar al primer ejemplo, $\mathbb{R}$ es localmente conexo. Sin embargo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es localmente conexo. La razón es que si tomamos por ejemplo $0 \in \mathbb{Q}$, no existe ningún abierto en $\mathbb{Q}$ que sea conexo y contenga el 0. Recordar que todo abierto contiene un intervalo, y si $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, todo conjunto de la forma $(-a, b) \cap \mathbb{Q}$ no es conexo. La razón es que entre 0 y a existe siempre un irracional α, y $(-a, b) \cap \mathbb{Q} = ((-a, \alpha) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\alpha, b) \cap \mathbb{Q})$ por ejemplo (donde la unión es disjunta). Esto muestra que la hipótesis de ser abierto en el ejercicio anterior es necesaria.

EJERCICIO 22. Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $\{U_i\}_{i \in I}$ son subespacios abiertos y localmente conexos, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i$ es localmente conexo.

PROPOSICIÓN 3.17. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo si y sólo para todo abierto U de X vale que todas las componentes conexas de U son abiertas.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sea $x \in \mathcal{T}$ un abierto cualquiera, y $x \in U$. Notemos por $\mathscr{C}(U, x)$ a la componente conexa de x en U. Queremos ver que $\mathscr{C}(U, x)$ es un conjunto abierto. Sea $y \in \mathscr{C}(U, x)$, y miremos el abierto U. Luego como X es localmente conexo, existe un abierto $V_y \subset U$ y conexo tal que $y \in V_y$, por ende $V_y \subset \mathscr{C}(U, y) = \mathscr{C}(U, x)$, con lo cual $\mathscr{C}(U, x) = \bigcup_{y \in \mathscr{C}(U,x)} V_y$ es abierto.
$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y U un abierto que contiene a x. Queremos ver que existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$. Pero por hipótesis, $\mathscr{C}(U, x)$ (la componente conexa

de x en U) es abierta (en U o en X, es igual por ser U abierto) y conexa, luego $x \in \mathscr{C}(U, x) \subset U$ como queríamos ver. $\square$

4. Espacios localmente arco-conexos

Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que X es *localmente arco-conexo en x* si vale que para todo abierto U que contiene a x, existe V abierto y arco-conexo que contiene a x y contenido en U. O sea: si $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$, existe $V \in \mathcal{T}$ arco-conexo con $x \in V \subset U$. Decimos que X es localmente arco-conexo si lo es en todos sus puntos.

Como los intervalos en $\mathbb{R}$ (y las bolas en $\mathbb{R}^n$) son arco-conexos, todos los ejemplos de la sección anterior (y sus ejercicios) siguen siendo ciertos si reemplazamos localmente conexo por localmente arco-conexo. También vale el siguiente resultado (la demostración es análoga).

Proposición 3.18. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es localmente arco-conexo si y sólo para todo abierto U de X vale que todas las componentes arco-conexas de U son abiertas.*

Claramente un espacio localmente arco-conexo es localmente conexo.

Teorema 3.19. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico conexo y localmente arco-conexo, entonces X es arco-conexo.*

Demostración. Sabemos que X es unión disjunta de sus componentes arco-conexas, y por ser X localmente arco-conexo, sus componentes arco-conexas son abiertas, con lo cual X es unión de abiertos disjuntos. Pero X es conexo, con lo cual sólo puede haber una única componente arco-conexa. $\square$

Corolario 3.20. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio localmente arco-conexo, entonces las componentes conexas coincides con las componentes arco-conexas.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto, y $\mathscr{C}_x$ su componente conexa. Como X es localmente arco-conexo, es localmente conexo, con lo cual $\mathscr{C}_x$ es abierto. Como X es localmente arco-conexo y $\mathscr{C}_x$ es abierto, también es localmente arco-conexo (por el análogo al Ejercicio 21), y es conexo entonces el teorema anterior dice que $\mathscr{C}_x$ es arco-conexo, o sea $\mathscr{C}_x \subset \mathscr{A}_x \subset \mathscr{C}_x$, con lo cual vale la igualdad. $\square$

Antes de pasar a varios ejemplos, vimos que la imagen de un conexo (resp. arco-conexo) por una función continua vuelve a ser conexo (resp. arco-conexo). Esto no vale para propiedades locales.

Ejemplo 11. Consideremos $f : (\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to \mathbb{Q}$, donde el conjunto de llegada está pensado con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$, dada por la identidad, o sea $f(x) = x$. Claramente f es continua, y biyectiva. Por otro lado, $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ es localmente arco-conexo (puesto que el conjunto $\{x\}$ es abierto y arco-conexo), por ende también es localmente conexo. Pero vimos que $\mathbb{Q}$ no es localmente conexo (con lo cual tampoco localmente arco-conexo).

Proposición 3.21. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y abierta. Si X es localmente conexo entonces $f(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos primero que f es abierta. Si $y = f(x_0) \in f(X)$, y $U \in \mathcal{T}'$ es un abierto que contiene a x, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X y contiene a x_0. Por ser X localmente conexo, existe $V \in T$ conexo tal que $x_0 \in V \subset f^{-1}(U)$. Luego $f(x_0) \in f(V) \subset f(f^{-1}(U)) \subset U$. Como f es abierta, $f(V)$ es un conjunto abierto, y como V es conexo, $f(V)$ también lo es. $\square$

Proposición 3.22. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y cerrada. Si X es localmente conexo entonces $f(X)$ es localmente conexo.*

Antes de demostrar esto (que es un poco mas complicado), probemos el siguiente resultado preliminar.

Lema 3.23. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y suryectiva. Si $U \in T$ es tal que $U = f^{-1}(f(U))$ entonces $f(U)$ es abierto.*

Demostración. Ver que $f(U)$ es abierto es equivalente a ver que $f(U)^c$ es cerrado. Ahora como f es suryectiva, $f(U)^c = f(f^{-1}(f(U))^c)$ (o sea es la imagen por f de todo lo que no va a parar a $f(U)$). Pero por hipótesis $f^{-1}(f(U)) = U$, con lo cual $f(U)^c = f(U^c)$. Al ser U abierto, U^c es cerrado, y como f es una función cerrada, $f(U^c)$ es cerrado. $\square$

Demostración de la Proposición 3.22. Supongamos ahora que f es cerrada y continua. Como queremos probar que $f(X)$ (con la topología subespacio) es localmente conexo, podemos suponer que f es sobreyectiva. Sea $U \in \mathcal{T}'$ un abierto que contiene a y_0. Por la Proposición 3.18 basta probar que $\mathscr{C}(U, y_0)$ es abierto.

Sea $V = f^{-1}(U)$ (un abierto en X), y llamemos $W = f^{-1}(\mathscr{C}(U, y_0))$.

Afirmo: si $w \in W$ entonces $\mathscr{C}(V, w) \subset W$.

La razón es que si $w \in W$, por definición $f(w) \in \mathscr{C}(U, y_0)$. Por otro lado, sabemos que como $\mathscr{C}(V, w)$ es conexo, y f es continua, $f(\mathscr{C}(V, w))$ es conexo. Pero $f(\mathscr{C}(V, w)) \cap \mathscr{C}(U, y_0)$ es no vacío ($f(w)$ está), con lo cual $f(\mathscr{C}(V, w)) \subset \mathscr{C}(U, y_0)$ (por ser la componente conexa el conexo mas grande que contiene a y_0).

Luego, $W = \bigcup_{w \in W} \mathscr{C}(V, w)$, y como X es localmente conexo, W es abierto. Por otro lado, $W = f^{-1}(\mathscr{C}(U, y_0))$, con lo cual $W = f^{-1}(f(W))$ (por ser f suryectiva). El lema anterior nos dice que entonces $f(W) = \mathscr{C}(U, y_0)$ es abierto (donde la igualdad vale por ser f suryectiva).

$\square$

5. Contraejemplos varios.

En esta sección, veremos que todas las combinaciones de {sí/no conexo}, {sí/no arco-conexo}, {sí/no localmente conexo}, {sí/no localmente arco-conexo} pueden pasar. Sabemos que arco-conexo implica conexo, que localmente arco-conexo implica localmente conexo, y que localmente arco-conexo + conexo implican arco-conexo. Luego quedan estudiar las otras 9 posibilidades. Daremos contraejemplos para casi todos (para los cuales se pueden construir espacios fáciles de tratar). Para abreviar la notación, denotaremos C, AC, LC, LAC a los cuatro tipos anteriores.

Ejemplo 12. El espacio $\mathbb{R}$ es **C, AC, LC, LAC**.

Ejemplo 13. Conjuntos que son **C, AC, LC, no LAC** son mas difíciles de describir. Un ejemplo bien detallado puede consultarse en este post de stackexchange.

Ejemplo 14. Miremos el "peine", el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1/n\} \times [0,1].$$

El espacio X es **C, AC, no LC, no LAC**.

Claramente X es arco-conexo, pues dados dos puntos cualesquiera, siempre podemos movernos verticalmente hasta tener cero en la segunda coordenada, obteniendo un punto en $[0,1] \times \{0\}$, y todo este segmento (que es conexo) está contenido en X. En particular, también es conexo.

Veamos que no es localmente conexo. Tomemos el punto $p = (0,1)$ y el abierto $B((0,1), 1/2)$ intersecada con X. Supongamos que hay un abierto conexo U que contiene al punto p. En particular, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B((0,1), \epsilon) \subset U$ (por ser las bolas una base de la topología). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$, y sea α un irracional cualquiera entre 0 y $\frac{1}{n_0}$. Luego,

$$U = (U \cap \{(x,y) \ : \ x < \alpha\}) \cup (U \cap \{(x,y) \ : \ x > \alpha\}).$$

Como todos los elementos de X tienen coordenadas racionales, claramente la unión da todo (y es disjunta). Veamos que ambos conjuntos son no vacíos. El primer conjunto contiene al punto $(0,1)$. El segundo conjunto contiene al punto $(\frac{1}{n_0}, 1)$, que claramente tiene la primer coordenada mayor que α, y a la vez $d((0,1), (\frac{1}{n_0}, 1)) = \frac{1}{n_0} < \epsilon$, con lo cual $(\frac{1}{n_0}, 1) \in B((0,1), \epsilon) \subset U$.

Ejemplo 15. Recordemos que si X es un conjunto con una relación de orden total, dados $a, b \in X$, tenemos cuatro nociones diferentes de *intervalos*:

- $(a,b) = \{x \in X \ : a < x < b\}$,
- $(a,b] = \{x \in X \ : a < x \leq b\}$,
- $[a,b) = \{x \in X \ : a \leq x < b\}$,
- $[a,b] = \{x \in X \ : a \leq x \leq b\}$.

En tal caso, en el conjunto X podemos definir una base para la llamada *topología del orden*, dada por: B contiene los conjuntos de la forma

- Todos los intervalos (a,b).
- Si existe a_0 un mínimo (o primer) elemento en X, también los intervalos $[a_0, b)$.
- Si existe b_0 un máximo (o último) elemento en X, también los intervalos $(a, b_0]$.

Miremos el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ y definamos el orden *lexicográfico*, dado por $(a,b) < (c,d)$ si $a < c$ ó si $a = c$ y $b < d$ (comparar con el Ejercicio 17 del Práctico 1). Notar que este es el orden que se utiliza en los diccionarios.

El espacio X es **C, no AC, LC, no LAC** (ver [**Mun00**], Ejemplo 6).

La razón por la cual X no es arco-conexo (y es la misma por la que no es localmente arco-conexo) es que si $\alpha : I \to X$ es continua, y $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ (digamos con $a < b$), entonces α debe tomar todos los valores en $[a,b]$ (recordar que la imagen de un conexo por una función continua es conexo). Digamos que

$a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$, y supongamos que $a_1 \neq b_1$. Luego

$$\bigcup_{a_1 < t < b_1} \{t\} \times (0,1) \subset \alpha(I).$$

Notar que el conjunto $\{t\} \times (0,1) = ((t,0),(t,1))$, con lo cual es abierto. Luego $\alpha^{-1}(\{t\} \times (0,1))$ es abierto, y por ende contiene un número racional q_t. Pero entonces tenemos una función inyectiva de (a_1, b_1) en $\mathbb{Q}$, ¡lo que no puede suceder! (los intervalos no son numerables).

Esto prueba que X no es arco-conexo, ni es localmente arco-conexo (por ejemplo en el punto $(1/2, 1)$. Ver que X es conexo y arco-conexo es similar a la demostración de que los intervalos en $\mathbb{R}$ son conexos. Ver el Teorema 24.1 en [**Mun00**] para los detalles.

El Ejemplo 9 es **C, no AC, no LC, no LAC**. Vimos que es conexo y no arco-conexo. La misma demostración prueba que no es localmente arco-conexo (mirando el punto $(0,0)$ por ejemplo), y la demostración del Ejemplo 14 (con una modificación mínima) prueba que no es localmente conexo.

Ejercicio 23. El conjunto $(1,0) \cup (2,3)$ con la topología subespacio es **no C, no AC, LC, LAC**.

Ejercicio 24. Si al Ejemplo 15 le agregamos un intervalo disjunto (por ejemplo el $(3,4) \times \{0\}$) con la topología propia, obtenemos un espacio que es **no C, no AC, LC, no LAC**.

Ejercicio 25. Si al Ejemplo 14 le unimos el intervalo $(2,3) \times \{0\}$, obtenemos un espacio topológico que es **no C, no AC, no LC, no LAC**.

Capítulo 4

Espacios Compactos

DEFINICIÓN. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, un *cubrimiento por abiertos* de X es una familia $\mathscr{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ tal que cada conjunto $U_i \in \mathcal{T}$ (es abierto) y los abiertos U_i cubren X, o sea $X = \cup_{i \in I} U_i$.

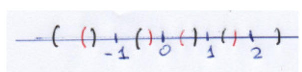
Un *subcubrimiento* de $\mathscr{C}$ es un subconjunto de $\mathscr{C}$ que también cubre a X.

EJEMPLO 16. Si $(X, \mathcal{T}) = \mathbb{R}$, y tomamos $\mathscr{C} = \{(a,b) : a < b\}$, claramente $\mathscr{C}$ es un cubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$. A la vez, el conjunto $\{(a,b)\ a < b \text{ y } a \in \mathbb{Z}\}$ es un subcubrimiento.

DEFINICIÓN. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice *compacto* si todo cubrimiento por abiertos de X admite un subcubrimiento finito.

EJEMPLOS.

1. El espacio topológico $\mathbb{R}$ no es compacto. Para ver esto, tomemos por ejemplo el cubrimiento $\mathscr{C} = \{(n - 3/4, n + 3/4)\ :\ n \in \mathbb{Z}\}$. Notemos que $\mathscr{C}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}$, dado que si $a \in \mathbb{R}$, y tomamos

   $n \in \mathbb{Z}$ el entero mas cercano a a, claramente $|a - n| \leq 1/2$, con lo cual $a \in (n - 3/4, n + 3/4)$.

   El cubrimiento $\mathscr{C}$ tiene la particularidad de que si quitamos cualquier elemento, deja de cubrir a los reales. La razón es que en el intervalo $(n - 3/4, n + 3/4)$ (con $n \in \mathbb{Z}$) hay un único entero, a saber n, dado que la distancia entre dos enteros es al menos 1. Luego si removemos alguno de los abiertos, seguro nos queda un número entero sin cubrir. Esto demuestra que $\mathscr{C}$ no admite ningún subcubrimiento finito, ergo $\mathbb{R}$ no es compacto.
2. Sea $X = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$. Afirmo que $\mathbb{R}$ no es compacto.

   Veamos primero que la topología en X es la discreta. Es fácil verificar que $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right) \cap X = \frac{1}{n}$, con lo cual los puntos son abiertos. Luego, podemos tomar como cubrimiento por abiertos de X a $\mathscr{C} = \{\{\frac{1}{n}\}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Claramente si le quitamos al cubrimiento un elemento cualquiera, el mismo deja de cubrir a X, con lo cual no existe subcubrimiento finito, y X no es compacto.
3. Sea $X = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$ nuevamente con la topología subespacio. Afirmo que X sí es compacto.

   Sea $\mathscr{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento cualquiera de X. Como $0 \in X$, existe U_0 abierto en X que contiene al 0. Recordar que un abierto en X es un abierto de $\mathbb{R}$ intersecado con X, con lo cual existe un $\varepsilon > 0$ tal que U

contiene $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap X$ (pues los intervalos son una base para la topología). En particular, existe n_0 tal que $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap X \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Notar que el abierto U_0 cubre todos los elementos de X salvo finitos (a saber $\frac{1}{n}$ con $n < n_0$ eventualmente). Para cada uno de estos puntos existe un abierto U_i del cubrimiento tal que $\frac{1}{i} \in U_i$ (como $\mathscr{C}$ es un cubrimiento, todos los elementos de X están en algún abierto del cubrimiento). Luego el conjunto $\{U_0, U_i \ : \ 1 \leq i < n_0\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathscr{C}$. Así, cualquier cubrimiento admite un subcubrimiento finito y X es compacto.

4. Si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico cualquiera, con X finito, entonces X es compacto. La razón es que hay sólo finitos conjuntos abiertos en X con lo cual cualquier cubrimiento es finito.

Teorema 4.1. *Si $(X, \mathfrak{T})$ es compacto, y $Y \subset X$ es cerrado, entonces Y con la topología de subespacio es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de Y. Recordar que esto quiere decir que existen abiertos V_i en X tales que $U_i = V_i \cap Y$. Miremos el cubrimiento por abiertos $\{V_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus Y\}$ de X (aquí es donde usamos que Y es cerrado). Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito de X, digamos $\{V_{i_j}\}_{j=1,\ldots,n}$ y tal vez $X \setminus Y$ (notar que podemos suponer que está en el subcubrimiento, dado que si no estuviera y lo agregamos seguimos teniendo un subcubrimiento finito de X). Como $Y = X \cap Y = \bigcup_{j=1}^{n}(V_{i_j} \cap Y) = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$. En particular pudimos obtener un subcubrimiento finito lo que implica que Y es compacto. □

Notar que usamos fuertemente que Y es cerrado en la demostración. Si miramos el ejemplo 3 anterior, vemos que X es compacto, y si tomamos Y al subespacio del ejemplo 2, vimos que no es compacto, con lo cual la condición de ser cerrado es necesaria en el Teorema.

Es importante remarcar también que si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico compacto, y $Y \subset X$ es un subespacio compacto, no necesariamente Y es cerrado. Por ejemplo, si X es finito, sabemos que todo subespacio Y es compacto (por el ejemplo 4 anterior), pero Y no tiene por qué ser cerrado.

Corolario 4.2. *Si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico, y K_i son conjuntos compactos y cerrados, entonces su intersección es compacto.*

Demostración. Claramente la intersección de cerrados es cerrado, luego por el Teorema anterior un cerrado dentro de un compacto es compacto. □

Teorema 4.3. *Si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico Hausdorff, y $K \subset X$ es compacto, dado $x \in X \setminus K$ existen abiertos U, V tales que $x \in U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Como X es Hausdorff, dado el punto x y un punto $y \in K$ cualquiera (notar que como $x \notin K$ necesariamente $x \neq y$), existen abiertos U_y, V_y tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ con la condición de que $U_y \cap V_y = \emptyset$. El conjunto $\{V_y\}_{y \in K}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Al ser K compacto, sabemos que existe un subcubrimiento finito del mismo, o sea existen $y_1, \ldots, y_n$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Tomemos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ y $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Ambos son abiertos, $K \subset V$ y $x \in U$, resta ver que son disjuntos. Si $z \in U \cap V$ en particular existe i_0 tal que $z \in V_{y_{i_0}}$ (por estar en V). A la vez, $z \in U_{y_{i_0}}$ (pues está en la intersección), con lo cual $z \in V_{y_{i_0}} \cap U_{y_{i_0}}$, pero ambos conjuntos son disjuntos, lo cual es un absurdo. □

Corolario 4.4. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico Hausdorff, y* $K \subset X$ *es compacto, entonces* K *es cerrado.*

Demostración. Por el Teorema anterior, dado $x \in X \setminus K$, existen abiertos U_x, V_x disjuntos tales que $K \subset V_x$ y $x \in U_x$. Luego $X \setminus K = \bigcup_{x \in X \setminus K} U_x$, que es un abierto. □

Ejercicio 26. Usando el Corolario, probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico Hausdorff, y X es finito, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta (notar que esto ya lo demostraron en el Ejercicio 10)

Teorema 4.5. *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *y* $(Y, \mathcal{T}')$ *son espacios topológicos,* $f : X \to Y$ *una función continua y* $K \subset X$ *un conjunto compacto. Entonces* $f(K) \subset Y$ *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de $f(K)$. Como f es continua, $\{f^{-1}(U_i) \cap K\}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Como K es compacto, existen i_j con $1 \leq j \leq n$ tales que $K = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_{i_j}) \cap K$, con lo cual $f(K) = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. □

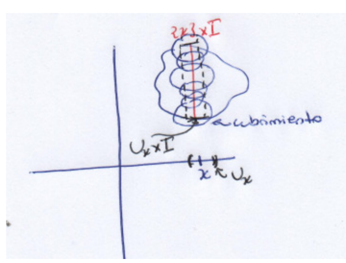
Corolario 4.6. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *y* $(Y, \mathcal{T}')$ *son espacios topológicos tales que* X *es compacto y* Y *es Hausdorff, entonces toda función* $f : X \to Y$ *continua es cerrada.*

Demostración. Si $A \subset X$ es cerrado, entonces es compacto (por el Teorema 4.1, luego $f(A)$ es compacto por el Teorema 4.5 y como Y es Hausdorff, $f(A)$ es cerrado por el Corolario 4.4. □

Teorema 4.7. *Si* $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ *son espacios topológicos compactos entonces el producto* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *es compacto.*

Demostración. Al igual que hicimos para ver que el producto de espacios conexos es conexo, por un argumento inductivo basta probar con dos conjuntos, o sea si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son compactos entonces el producto $X \times Y$ es compacto.

Para ello sea $\mathscr{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de $X \times Y$, y queremos ver que podemos quedarnos con finitos. Pensemos en $X \times Y$ como un plano, y la idea es ver que para cada $x \in X$ podemos tomar un "tubo" alrededor de la "linea" $\{x\} \times Y$ cubierto por finitos abiertos del cubrimiento. Para ello fijemos un $x \in X$,



y miremos el conjunto

$$I_x = \{i \in I \ : \ U_i \cap (\{x\} \times Y) \neq \emptyset\}.$$

Como $\mathscr{C}$ es un cubrimiento de $X \times Y$, $\{x\} \times Y = \bigcup_{i \in I_x} U_i \cap (\{x\} \times Y)$, o sea $\mathscr{C}_x = \{U_i \cap (\{x\} \times Y)\}_{i \in I_x}$ es un cubrimiento por abiertos de $\{x\} \times Y$.

Luego, dado $(x,y) \in \{x\} \times Y$, sabemos que existe U_{i_0} que contiene al punto (x,y). Por definición de la topología producto, sabemos que existen abiertos V_y de X y W_y de Y tales que $V_y \times W_y \subset U_{i_0}$. Miremos entonces al cubrimiento de $\{x\} \times Y$ dado por

$$\tilde{\mathscr{C}} = \{(V_y \times W_y) \cap (\{x\} \times Y)\}.$$

El conjunto $\{x\} \times Y \simeq Y$ (homeomorfo) por la proyección en la segunda coordenada, y como Y es compacto, $\{x\} \times Y$ también lo es. Luego $\tilde{\mathscr{C}}$ admite un subcubrimiento finito, o sea existen $y_1, \ldots, y_n$ (el número de puntos depende del punto x que fijamos) tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} (V_{y_i} \times W_{y_i}) \cap \{x\} \times Y = \{x\} \times Y.$$

Sea $V_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ (claramente $x \in V_x$), con lo cual $V_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} (V_{y_i} \times W_{y_i})$, y llamemos U_{i_j}, $1 \leq j \leq n$ al abierto de $\mathscr{C}$ que contiene al abierto $V_{y_j} \times W_{y_j}$. En particular, la franja $V_x \times Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$, o sea la pudimos cubrir con finitos elementos de $\mathscr{C}$. Ahora lo que hacemos es mover el punto x.

Como $X = \bigcup_{x \in X} V_x$, y este es un cubrimiento por abiertos, al ser X compacto, existen finitos $x_1, \ldots, x_N$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Luego $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \times Y$ (o sea todo el espacio lo cubrimos por finitas franjas). Pero antes vimos que para cada V_{x_i} existen finitos U_{i_j} que cubren la franja $V_{x_i} \times Y$, con lo cual todo $X \times Y$ lo podemos cubrir con finitos elementos de $\mathscr{C}$. □

A pesar de que todavía no estudiamos el caso de producto infinito de espacios topológicos, uno estaría tentado a dados $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ espacios topológicos, poner una topología en el producto $\prod_{i \in I} X_i$ donde los abiertos sean de la forma $\prod_{i \in I} U_i$, donde cada $U_i \in \mathcal{T}_i$. Esta topología se suele llamar la topología de *cajas*, y la estudiaremos mas adelante. El problema que tiene dicha topología es que el Teorema anterior deja de ser cierto al tomar un producto infinito de espacios compactos.

Ejemplo 17. Sea $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$, o sea $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0,1]$, donde cada elemento del producto está pensado con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.

Recordar que $[0,1]$ es compacto (como vieron en Análisis I y recordaremos mas adelante), no obstante, X no lo es. En el intervalo $[0,1]$ podemos tomar el cubrimiento (finito) por abiertos $\mathscr{C} = \{[0,3/4), (1/4,1]\}$. Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de partes del conjunto de números naturales (o sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ contiene a todos los posibles subconjuntos de los números naturales). Dado $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ denotamos por $\mathscr{C}^A$ al conjunto dado por

$$\mathscr{C}^A = \prod_{n \in \mathbb{N}} C_n, \text{ donde } C_n = \begin{cases} [0,3/4) & \text{si } n \in A, \\ (1/4,1] & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

En particular, $\mathscr{C}^A$ es un producto (infinito) de abiertos, con lo cual “debería” ser un abierto en X (si tomamos la topología producto simplemente). Afirmo que $\{\mathscr{C}^A\}_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ es un cubrimiento de X que no admite subcubrimiento finito (ergo X no es compacto).

Veamos que es un cubrimiento. Dado que si $x \in X$, queremos construir un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $x \in \mathscr{C}^A$. Si x_n denota la coordenada n-ésima de X, por definición de X, x_n está en alguno de $[0,3/4)$ o $(1/4,1]$. Si está en el primer conjunto, decido que $n \in A$, mientras que si no está en el primer conjunto (por ende está en el segundo), decido que $n \notin A$. Así construimos un conjunto A que cumple que $x \in \mathscr{C}^A$.

Veamos que $\{\mathscr{C}^A\}_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ no admite subcubrimiento finito. Supongamos que existe un subcubrimiento que satisface que hay un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que el abierto $\mathscr{C}^A$ no está en él. Luego, si tomamos el elemento $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dado por:

$$x_n = \begin{cases} 1/8 & \text{si } n \notin A, \\ 7/8 & \text{si } n \in A, \end{cases}$$

entonces x no fue cubierto. La razón es que por construcción este elemento está únicamente en $\mathscr{C}^A$, que no es parte del subcubrimiento.

Recordar que una red en X es una función $r : D \to X$, donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido.

Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $(D, \leq)$ es un espacio dirigido, y $r : D \to X$ una red para D. Una *subred* de r es una red s para un conjunto dirigido $(E, \leq)$ con la propiedad de que existe una función $f : E \to D$ que cumple:

- $s = r \circ f$,
- para cada $d \in D$ existe $e \in E$ tal que si $\tilde{e} \geq e$ entonces $f(\tilde{e}) > d$.

Notar que en el case de que el conjunto dirigido sea $(\mathbb{N}, \leq)$, la noción de subred coincide con la de subsucesión.

Teorema 4.8. *Un espacio $(X, \mathcal{T})$ es compacto si y sólo si toda red en X tiene una subred convergente.*

Demostración. Ver Teorema 5.3.5 de [**DD92**]. □

1. Compactos en espacios métricos

A lo largo de esta sección nos vamos a restringir a espacios métricos, donde algunas propiedades de compactos se pueden interpretar en términos de sucesiones y bolas.

Veamos primero que al estudiar cubrimientos en espacios métricos, podemos en general restringirnos a bolas.

Teorema 4.9 (Número de Lebesgue). *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y $\mathscr{C}$ un cubrimiento por abiertos de X. Entonces existe un número positivo ε (llamado el* número de Lebesgue del cubrimiento*) con la propiedad de que para todo $x \in X$, existe $U \in \mathscr{C}$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ existe $U \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U$ (por ser cubrimiento), luego existe $r(x) > 0$ tal que $B(x, r(x)) \subset U$ (por ser estos abiertos una base de la topología). En particular, para cada x existe $r(x)$ tal que $B(x, r(x)) \subset U$ para algún $U \in \mathscr{C}$. El problema es que hasta aquí el radio depende del punto. Como X es compacto, miremos el cubrimiento por abiertos dado por $\{B(x, \frac{r(x)}{2})\}_{x \in X}$. Al ser X compacto, existen finitos puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{r(x_i)}{2})$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{mín}\{r(x_i) \ : \ 1 \leq i \leq n\}$. Luego, si $y \in X$, existe i_0 tal que $y \in B(x_{i_0}, \frac{r(x_{i_0})}{2})$, con lo cual $B(y, \varepsilon) \subset B(x_{i_0}, \varepsilon + \frac{r(x_{i_0})}{2}) \subseteq B(x_{i_0}, r(x_{i_0}))$, pero por construcción esta bola está contenida en un abierto del cubrimiento. □

Teorema 4.10. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si toda sucesión admite una subsucesión convergente.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, y sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de valores de la sucesión. Si A es finito, entonces la sucesión toma infinitas veces el mismo valor, con lo cual admite una subsucesión constante que claramente es convergente. Supongamos entonces que A no es finito, y sin pérdida de generalidad que todos los valores de la sucesión son distintos (tomando una subsucesión si fuera preciso).

Notar que $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente si y sólo si A tiene un punto de acumulación en X (recordemos que x es un punto de acumulación si $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\}$ es no vacío para todo $n \in \mathbb{N}$). Supongamos entonces que A no tiene ningún punto de acumulación. Luego para todo x_n existe ε_n tal que $B(x_n, \varepsilon_n) \cap A \setminus \{x_n\} = \emptyset$ (pues x_n no es punto de acumulación). Esto quiere decir que A como espacio topológico tiene la topología discreta. Pero por otro lado, como A no tiene puntos de acumulación, $\overline{A} = A$ con lo cual A es cerrado en un compacto, luego compacto. Pero un conjunto infinito con la topología discreta no es compacto, absurdo.

$\Leftarrow$) Veamos primero que podemos restringirnos al caso en que nuestro cubrimiento está dado por bolas de un radio fijo. Sea $\mathscr{C}$ un cubrimiento por abiertos cualquiera.

Afirmo: bajo las hipótesis existe el número de Lebesgue, o sea existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe $U \in \mathscr{C}$ con $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Supongamos que no es cierto, luego dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe un punto $x_n \in X$ tal que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U$ para ningún $U \in \mathscr{C}$. Por hipótesis, la sucesión de centros $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente. Supongamos (para aliviar la notación) que la toda la sucesión converge. Esto quiere decir que existe $x \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Como $\mathscr{C}$ es un cubrimiento, existe $U \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U$, y como las bolas son una base para la topología, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, 2\varepsilon) \subset U$. Tomando este ε, si $n \geq \max\{n_0, \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil\}$ vale que $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x, 2\varepsilon)$ pues si $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$, $d(x, y) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$, luego $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset U$ para todo $n \geq n_0$, lo que es un absurdo.

Por la afirmación tenemos entonces que dado $\mathscr{C}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que dado $x \in X$, existe $U \in \mathscr{C}$ con $B(x, \varepsilon) \subset U$. Si probamos que el cubrimiento $\mathscr{C}_\varepsilon = \{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ (el radio está fijo) admite un subcubrimiento finito, tomando los abiertos de $\mathscr{C}$ que contienen a cada bola obtenemos un subcubrimiento finito de $\mathscr{C}$.

Sea así $x_1 \in X$ cualquiera. Si $X = B(x_1, \varepsilon)$, listo (con un sólo abierto alcanza). Caso contrario, existe $x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Seguimos con este procedimiento construyendo distintos puntos: dados $x_1, \ldots, x_n$ o bien $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ (en cuyo caso ganamos), o existe $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Notar que por construcción $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ si $i \neq j$. Si el proceso termina, conseguimos un subcubrimiento finito, caso contrario, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ para todo $i \neq j$. Claramente dicha sucesión no puede admitir ninguna subsucesión convergente. $\square$

Recordemos que si (X, d) es un espacio métrico, y A es un subconjunto de X, la distancia de un punto $y \in X$ al conjunto A se define como $d(y, A) = \inf\{d(y, x) : x \in A\}$.

Corolario 4.11. *Sea (X, d) es un espacio métrico, y $A \subset X$ compacto. Entonces si $y \notin A$, la distancia se alcanza, o sea existe $x \in A$ tal que $d(y, A) = d(y, x)$.*

Demostración. Por definición del mínimo, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $d(y, x_n) < d(y, A) + \frac{1}{n}$. Como A es compacto, existe una subsucesión (supongamos nuevamente que es la misma subsucesión x_n) de puntos de A que convergen a $x \in A$. Pero entonces $d(y,A) \leq d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) < d(y,A) + \frac{2}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $d(y,A) = d(y,x)$. □

1.1. Espacios localmente compactos.

Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice *localmente compacto* si para cualquier $x \in X$ existe $U \in \mathcal{T}$ que contiene a x tal que $\overline{U}$ es compacto.

Ejemplos. Veamos algunos ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto para cualquier n. Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sea $U_{\vec{x}} = \prod_{i=1}^n (x_i - 1/2, x_i + 1/2)$. Claramente $U_{\vec{x}}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y su clausura $\overline{U} = \prod_{i=1}^n [x_i - 1/2, x_i + 1/2]$ es compacto por ser producto de compactos.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto, entonces claramente es localmente compacto (tomando como abierto siempre el conjunto total X).

Ejemplo 18. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dado por las sucesiones que cuya cola es cero, o sea

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \ f(n) = 0 \ \forall n \geq n_0\}.$$

Para tener una idea mejor de quién es $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pueden pensar en el conjunto de polinomios (que no son sumas infinitas, sino que los coeficientes que multiplican las potencias de x son cero a partir de un punto). Definimos una distancia en el conjunto $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ por:

$$d(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

Notar que como los términos son eventualmente cero, en realidad esto es siempre una suma finita (por lo cual converge).

Dejamos como ejercicio verificar que realmente esto define una norma en el conjunto (y por ende una topología). Afirmo que este espacio no es localmente compacto. Veamos que no lo es por ejemplo en el punto $x = \{0\}$ (o sea la sucesión constantemente cero). Supongamos que existe un abierto U tal que $\overline{U}$ es compacto. Por definición de la topología en un espacio métrico, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Luego, $\overline{B(x,\varepsilon)}$ debe ser compacto (por ser cerrado en un compacto).

Miremos la sucesión de elementos de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dada por $\{x_m\}$, donde el punto x_m corresponde a la sucesión:

$$x_m(i) = \begin{cases} \varepsilon/2 & \text{si } i = m, \\ 0 & \text{si } i \neq m. \end{cases}$$

Claramente cada elemento x_m está en $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (pues la cola es cero), y por el Teorema 4.10 dicha sucesión debe tener una subsucesión convergente. Pero notar que $d(x_n, x_m) = \varepsilon$ si $n \neq m$ (que es un número fijo), con lo cual no puede tener ninguna subsucesión convergente.

Lema 4.12. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio localmente compacto, y $Y \subset X$ es cerrado, entonces Y es localmente compacto.*

Demostración. Sea $y \in Y$ un punto cualquiera. En particular $y \in X$, con lo cual existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $y \in U$ y $\overline{U}$ es compacto. Luego $V = U \cap Y$ es abierto en Y, contiene a y, y $\overline{V} \subset \overline{U} \cap Y$ (por ser Y cerrado) que es cerrado dentro de un compacto y por ende compacto. □

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Baire, precisamos un pequeño lema auxiliar.

LEMA 4.13. *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico, y* V_1 *un conjunto cerrado y compacto. Dada una subsucesión de conjuntos cerrados* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no vacíos y encajados (o sea* $V_{n+1} \subset V_n$*) la intersección* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \emptyset$. Como cada V_n es cerrado, $\{V_i^c\}_{i\in\mathbb{N}}$ son abiertos y cubren a V_1, pues $V_1 \subset (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n^c$. Como los V_n son encajados y no vacíos, claramente no podemos quedarnos con finitos de ellos, pues si basta con tomar hasta el V_N, los elementos de V_N no fueron cubiertos. □

TEOREMA 4.14 (Baire). *Si* $(X, \mathfrak{T})$ *es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y* $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es un cubrimiento numerable por abiertos densos entonces* $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ *es denso en* X.

DEMOSTRACIÓN. Recordar que un conjunto T es denso si su clausura es todo X. Equivalentemente, si vale que para todo $U \in \mathfrak{T}$, $U \cap T \neq \emptyset$.

Sea $U \in T$ un abierto cualquiera, y veamos que $U \cap (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i) \neq \emptyset$ entonces. Como U_1 es denso, $U \cap U_1$ es no vacío y abierto. Sea $x \in U \cap U_1$. Como X es localmente compacto, existe un abierto V que contiene a x y tal que $\overline{V}$ es compacto (y podemos suponer $V \subset U \cap U_1$, sino tomamos $V \cap U \cap U_1$).

Afirmo: podemos suponer que $\overline{V} \subset U \cap U_1$.

Veamos primero la validez de la afirmación. Llamemos $\tilde{U} = U \cap U_1$ (para aliviar notación). Supongamos que $\overline{V} \not\subset \tilde{U}$. Sabemos que $\overline{V}$ es cerrado, y que $\tilde{U}$ es abierto, con lo cual $\overline{V} \setminus \tilde{U}$ es un conjunto cerrado y por ende compacto. Por otro lado, $x \in \tilde{U}$, con lo cual $x \notin \overline{V} \setminus \tilde{U}$. Como X es Hausdorff, dado un punto y un compacto que no lo contiene, existen abiertos disjuntos que los separan, o sea existen abiertos W_1, W_2 tales que $x \in W_1$ y $\overline{V} \setminus \tilde{U} \subset W_2$ con $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Tomemos $V_1 = V \cap W_1$, que es un abierto no vacío (contiene a x), con clausura compacta (es un cerrado en $\overline{V}$ que es compacto por hipótesis) y veamos que $\overline{V_1} \subset \tilde{U}$. Claramente $\overline{V} = (\overline{V} \cap \tilde{U}) \cup (\overline{V} \setminus \tilde{U})$ (siendo la unión disjunta), y como $V_1 \subset V$, $\overline{V_1} \subset \overline{V}$. Si probamos que $\overline{V_1} \cap (\overline{V} \setminus \tilde{U}) = \emptyset$, entonces $\overline{V_1} \subset \overline{V} \cap \tilde{U} \subset \tilde{U}$.

Pero W_2 es un abierto disjunto de V_1, con lo cual es disjunto de la clausura de V_1, y como $\overline{V} \setminus \tilde{U} \subset W_2$, se sigue que $\overline{V_1} \cap (\overline{V} \setminus \tilde{U}) = \emptyset$, de ahí la afirmación.

Luego existe V_1 abierto no vacío tal que $\overline{V_1}$ es compacto y está contenido en $U \cap U_1$. Análogamente, existe V_2 abierto no vacío tal que $\overline{V_2}$ es compacto y $\overline{V_2} \subset V_1 \cap U_2 \subset U \cap U_1 \cap U_2$. Continuando, construimos una sucesión de conjuntos V_n todos ellos abiertos, no vacíos y de clausura compacta encajados unos en los otros (o sea $V_{n+1} \subset V_n$). El Lema que probamos antes implica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset$; como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \subset U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicho conjunto no puede ser vacío. □

COROLARIO 4.15. *Si* $(X, \mathfrak{T})$ *es un espacio localmente compacto y Hausdorff, entonces* X *no se puede expresar como unión numerable de cerrados con interior vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con F_n cerrado y $F_n^\circ = \emptyset$. Luego F_n^c es abierto, y además denso, pues si existe U abierto de X con $U \cap F_n^c = \emptyset$, entonces $U \subset F_n$ cuyo interior es vacío, absurdo. Luego el Teorema de Baire implica que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^c = X^c = \emptyset$, absurdo □

Notar que esto por ejemplo prueba que $\mathbb{R}$ no es numerable, pues vimos que es localmente compacto, y también es Hausdorff, si fuese numerable, lo podemos cubrir con sus puntos, que son cerrados de interior vacío.

Teorema 4.16 (Alexandroff). *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico no compacto entonces existe un par (X^*, ι) donde X^* es compacto, $\iota : X \to X^*$ es un homeomorfismo con su imagen con la propiedad de que $\iota(X)$ es denso en X^*. Además, si X es localmente compacto y Hausdorff, X^* es Hausdorff.*

Demostración. Definamos $X^* = X \cup \{\infty\}$, o sea a X le agregamos un punto. Debemos definir la topología en él. Para eso definimos:

$$\mathcal{T}^* = \{U \subset X \;:\; U \in \mathcal{T}\} \cup \{U \subset X^* \;:\; \infty \in U, X^* \backslash U \text{ es cerrado y compacto en } X\}.$$

Digamos que los abiertos de $\mathcal{T}^*$ son de tipo I en el primer caso y de tipo II en el segundo. Veamos que $\mathcal{T}^*$ es una topología en X^*:

- Claramente $\emptyset$, X^* son elementos de $\mathcal{T}^*$ (vacío de tipo I y X^* de tipo II).
- Veamos que uniones de abiertos son abiertos. Claramente unión de conjuntos de tipo I vuelve a ser un abierto de tipo I por ser $\mathcal{T}$ una topología en X. Recordar que intersección de cerrados dentro de un compacto da un conjunto cerrado y compacto, con lo cual si a un conjunto de tipo II le uno conjuntos de tipo I vuelve a ser de tipo II (pues $X^* \setminus (U_1 \cup U_2) = (X^* \setminus U_1) \cap U_2^c$ cerrado y compacto en X). Análogamente, la unión de conjuntos de tipo II vuelve a ser de tipo II.
- Claramente la intersección finita de conjuntos de tipo I vuelve a ser de tipo I. A la vez, la intersección finita de conjuntos de tipo II vuelve a ser de tipo II (pues $X^* \setminus (U \cap V) = (X^* \setminus U) \cup (X^* \setminus V)$, y la unión finita de cerrados compactos es cerrado y compacto). Por último, si intersecamos un conjunto de tipo I con uno de tipo II da un conjunto de tipo I (el punto ∞ no está en la intersección), y notemos que si $\infty \in U$, $X^* \setminus U = X \setminus (U \setminus \{\infty\})$ es cerrado, con lo cual $U \setminus \{\infty\}$ es abierto en X.

Las cuentas anteriores muestras que $\iota : X \to X^*$ dada por la identidad es un homeomoerfismo con su imagen. La continuidad sale de que si U es abierto de tipo II, $\iota^{-1}(U) = U \setminus \{\infty\}$ es abierto. A la vez, ι es claramente abierta, con lo cual es un homeomoerfismo con su imagen. A la vez, $\iota(X)$ es denso en X^* pues el único punto que no está en la imagen no es abierto (aquí usamos que X no es compacto).

Veamos que X^* es compacto. Sea $\{U_i\}$ un cubrimiento cualquiera de X^*. Como ∞ es un punto de X^*, debe haber un abierto U_0 que lo contiene. Luego $X^* \setminus U_0$ es un compacto en X, con lo cual podemos quedarnos con finitos abiertos para cubrir esta parte. En definitiva, el abierto U_0 y finitos mas bastan para cubrir X.

Por último, supongamos que X es localmente compacto y Hausdorff. Sean $x, y \in X^*$ dos puntos distintos. Si $x, y \neq \infty$, entonces existen abiertos de tipo I que los separan (por ser X Hausdorff). Si $y = \infty$, como X es localmente compacto, dado x existe un abierto U que contiene a x y tal que $\overline{U}$ es compacto. Luego, U y $V = (X \setminus \overline{U}) \cup \{\infty\}$ son abiertos, $x \in U$, $\infty \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

Al conjunto X^* se lo llama la completación de Alexandroff de X.

Ejercicio 27. Ver que la compactación de $\mathbb{R}$ con el proceso anterior da la esfera $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ (notar que la hemos desplazado uno para arriba). Para ver esto, probar que la proyección desde el punto $\infty = (0, 2)$ da un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $S^1 \setminus \{(0,2)\}$. Luego como conjunto podemos identificar a $\mathbb{R}^*$ son S^1. Probar que la topología del Teorema de Alexandroff coincide con la topología de (subespacio de) S^1.

2. Espacios completos

En esta sección trabajaremos únicamente con espacios métricos. Recordemos la siguiente definición de Análisis I.

DEFINICIÓN. Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice *de Cauchy* si cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo par $n, m \geq n_0$.

DEFINICIÓN. Un espacio métrico (X,d) se dice *completo* si cumple que toda sucesión de Cauchy converge, o sea si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

Una tarea difícil de Análisis I es probar justamente que $\mathbb{R}$ es completo. Para esto demostraron que si tienen una sucesión de Cauchy, siempre tiene una subsucesión creciente o decreciente, y luego probaron que dichas sucesiones convergen (tomando un supremo o un ínfimo, que es la propiedad fundamental que diferencia los reales de los números racionales). A la vez, probaron que $\mathbb{Q}$ no es completo (por ejemplo pueden tomar una sucesión de número racionales que tiene a $\sqrt{2}$ en $\mathbb{R}$; al mirarla como sucesión en $\mathbb{Q}$ es de Cauchy, pero no puede converger).

Los espacios métricos completos tienen propiedades muy interesantes.

LEMA 4.17. *Si (X,d) es un espacio métrico completo y $A \subset X$ es compacto, entonces A es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en A. Como A es compacto, el Teorema 4.10 $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente, llamemos x al punto al que converge la subsucesión. Es un ejercicio sencillo ver que entonces toda la sucesión tiene que converger a x. $\square$

LEMA 4.18. *Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es cerrado, entonces A es completo*

DEMOSTRACIÓN. Una sucesión de Cauchy en A es de Cauchy en X por lo tanto converge a un punto, que es un punto de acumulación de A y al ser A cerrado, dicho punto pertenece a A. $\square$

LEMA 4.19. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq b$ entonces el intervalo $[a,b]$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera en $[a,b]$, y veamos que admite una subsucesión convergente. Si el conjunto $\{x_n\}$ (de valores de la sucesión) es finito, entonces podemos tomar una subsucesión constante, la cual converge.

Supongamos entonces que la sucesión toma infinitos valores distintos. Partamos el intervalo al medio, digamos $[a,b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$. Como la sucesión tiene infinitos términos distintos en uno de estos dos subintervalos hay infinitos valores, llamemos I_1 a un tal intervalo, y definamos y_1 como un término de la sucesión en I_1. Notar que el diámetro de I_1 es $\frac{b-a}{2}$.

Supongamos construidos $y_1, \ldots, y_n$ cada uno en un intervalo I_n, donde la sucesión toma infinitos valores, y tal que I_{k+1} se obtuvo a partir de I_k partiéndolo al medio. Partimos I_n al medio, y miramos un intervalo donde la sucesión tome infinitos valores, y lo llamamos I_{n+1}. Por construcción, existe un término de la sucesión original que está a la derecha de los valores $y_1, \dots y_n$ (o sea ocurre para un índice n mayor que el que usamos para cada uno de ellos). Llamemos y_{n+1} a un tal valor. Así nos construimos una subsucesión $\{y_n\}$, que cumple que $y_n \in I_k$ para todo $n \geq k$, con lo cual $d(y_n, y_m) \leq \frac{b-a}{2^k}$ si $n, m \geq k$ (pues este valor es el tamaño del intervalo). Luego $\{y_n\}$ es de Cauchy, y por ser $\mathbb{R}$ completo, converge. □

TEOREMA 4.20 (Heine-Borel). *un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Ya vimos que un conjunto compacto en un Hausdorff es cerrado. Supongamos que K no es acotado, o sea dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $d(x_n, \vec{0}) \geq n$. Como K es compacto, $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente (la cual tampoco puede estar acotada por construcción de x_n). Digamos que $\{y_n\}$ es una tal subsucesión. En particular, $\{y_n\}$ es de Cauchy, con lo cual dado $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que $d(y_n, y_m) \leq 1$ si $n, m \geq n_0$.

Llamemos $N = \max\{d(x_i, \vec{0}) \ : \ 1 \leq i \leq n_0\}$. Afirmo que $d(y_n, \vec{0}) \leq N + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es un absurdo (pues la sucesión no es acotada). La razón es que si $1 \leq n \leq n_0$, vale la desigualdad por la definición de N. Si $n \geq n_0$, entonces $d(y_n, \vec{0}) \leq d(y_n, y_{n_0}) + d(y_{n_0}, \vec{0}) \leq 1 + N$.

Para ver la recíproca, supongamos que K es cerrado y acotado. Como es acotado, $K \subset B(\vec{0}, N)$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Pero $B(\vec{0}, N) \subset \prod_{i=1}^{n}[-N, N]$, y este último conjunto es compacto por ser producto de compactos, con lo cual K es un cerrado dentro de un compacto y por ende compacto. □

2.1. Completación de espacios métricos.

DEFINICIÓN. Si (X, d), $(Y, \tilde{d})$ son dos espacios métricos, una isometría entre X e Y es una función $f : X \to Y$ que preserva distancias, o sea $d(x, y) = \tilde{d}(f(x), f(y))$ para todo par $x, y \in X$.

Notar que una isometría entre espacios métricos es siempre continua. La razón es que dado $\varepsilon > 0$, si $d(x, y) < \epsilon$ entonces $\tilde{d}(f(x), f(y)) = d(x, y) < \varepsilon$. O sea f manda una bola centrada en x de radio ε dentro de la bota centrada en $f(x)$ del mismo radio. A la vez, una isometría es siempre una función continua, dado que si $f(x) = f(y)$ entonces $\tilde{d}(f(x), f(y)) = 0$ pero entonces $d(x, y) = 0$ con lo cual $x = y$.

En algunos textos, a las isometrías además se les pide que sean biyectivas.

DEFINICIÓN. Dos espacios métricos (X, d), $(Y, \tilde{d})$ se dicen *isométricos* si existe una isometría biyectiva entre ambos.

Luego si dos espacios son isométricos, es como si fueran "iguales" en el sentido que puedo identificar puntos en uno y otro y las propiedades geométricas (que tienen que ver con medir, como encontrar caminos de distancia mínima entre puntos, etc) pasan por la isometría de uno a otro.

Así podemos dar una definición "categórica" de la completación de un espacio métrico.

DEFINICIÓN. Sea (X, d) es un espacio métrico, y supongamos dados un espacio métrico $(Y, \tilde{d})$ completo y una isometría $f : X \to Y$. El subespacio $\overline{f(X)}$ se llama la *completación de X*.

Si existen un espacio métrico $(Y, \tilde{d})$ y $f : X \to Y$ isometría, denotamos por $\widehat{X}$ al espacio $\overline{f(X)}$. El espacio $\widetilde{X}$ es un espacio métrico completo, por el Lema 4.18.

Notar que en la notación $\widetilde{X}$ nunca hicimos mención al espacio $(Y, \tilde{d})$ ni a la isometría d. El término "categórico" tiene que ver con que la completación es independiente de tales cosas, y satisface una "propiedad universal".

Lema 4.21. *Una completación de X (si existe) satisface lo siguiente: si (Z, d') es un espacio métrico completo, y $g : X \to Z$ es una isometría, entonces podemos extender g a todo $\widehat{X}$, o sea existe una isometría $\tilde{g} : \widehat{X} \to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \widehat{X} \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Recordar que por definición $\widehat{X} = \overline{f(X)}$, e identificamos X con su imagen (por eso hablaremos de puntos de X en $\widehat{X}$ pensando en su imagen por f). Definimos $\tilde{g}(x) = g(x)$ si $x \in X$ (pues queremos que la función $\tilde{g}$ coincida con g en los puntos de X). Si $x \in \widehat{X} \setminus X$, al ser $\widehat{X}$ una clausura, x es un punto de acumulación, con lo cual existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$. En particular, $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como g es una isometría, la sucesión $\{g(x_n)\} \subset Z$ también es de Cauchy, y como Z es completo, dicha sucesión converge a un punto z. Definimos $\tilde{g}(x) = z$.

Veamos que la función $\tilde{g}$ así definida satisface las dos propiedades que queremos, a saber: 1) no depende de la sucesión $\{x_n\}$ con la que empezamos, y 2) es una isometría.

1) Supongamos que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son dos sucesiones distintas que convergen al mismo punto x. Queremos ver que entonces $\{g(x_n)\}$ y $\{g(y_n)\}$ convergen también al mismo punto (que definimos como $\tilde{g}(x)$). Llamemos z_1 al punto al que converge $\{g(x_n)\}$ y z_1 al punto al que converge $\{g(y_n)\}$. Por definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(x, x_n) \leq \varepsilon$ y también $d(x, y_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ (en particular, $d(x_n, y_n) \leq 2\varepsilon$ para $n \geq n_0$). Luego $d(z_1, g(x_n)) \leq \varepsilon$ y $d(z_2, g(y_n)) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. En particular, $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, g(x_n)) + d(g(x_n), g(y_n)) + d(g(y_n), z_2) \leq 4\varepsilon$ si $n \geq n_0$. Pero entonces $d(z_1, z_2) \leq 4\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, con lo cual dicho valor debe ser 0 y en consecuencia $z_1 = z_2$ como queríamos ver.

2) Veamos que $\tilde{g}$ es isometría. Queremos ver que si $x, y \in \widehat{X}$ entonces $d(x, y) = d'(\tilde{g}(x), \tilde{g}(y))$. Si $x, y \in X$, entonces es cierto por ser g una isometría (y $\tilde{g}$ coincide con g en X). Supongamos en general que $\{x_n\}$ es una sucesión en X que converge a x, y $\{y_n\}$ es una sucesión en X que converge a Y. Como antes, llamemos z_1 al punto al que converge $\{g(x_n)\}$ y z_2 al punto al que converge $\{g(y_n)\}$ (con lo cual $\tilde{g}(x) = z_1$ y $\tilde{g}(y) = z_2$). Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $d'(z_1, g(x_n)) \leq \varepsilon$ y $d'(z_2, g(y_n)) \geq \varepsilon$. Luego

$$d'(z_1, z_2) \leq d'(z_1, g(x_n)) + d'(g(x_n), g(y_n)) + d'(g(y_n), z_2) \leq d(x_n, y_n) + 2\varepsilon.$$

Por otro lado, $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \leq d(x, y) + 2\varepsilon$, con lo cual

$$d'(z_1, z_2) \leq d(x, y) + 4\varepsilon,$$

o sea $d'(z_1, z_2) - d(x, y) \leq 4\varepsilon$. Análogamente,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq 2\varepsilon + d'(g(x_n), g(y_n)),$$

y como $d'(g(x_n), g(y_n)) \leq d'(g(x_n), z_1) + d'(z_1, z_2) + d(z_2, g(y_n)) \leq d'(z_1, z_2) + 2\varepsilon$, tenemos que

$$d(x, y) \leq d'(z_1, z_2) + 4\varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos que $|d(x, y) - d'(z_1, z_2)| \leq 4\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, con lo cual ambos números son iguales. □

La ventaja de la propiedad universal es que implica que si existen dos completaciones de un espacio métrico (X, d) entonces son homeomorfas por una isometría (ergo "iguales").

La razón es la siguiente: sean $(Y, \tilde{d})$ un espacio métrico completo y $f : X \to Y$ es una isometría, y (Z, d') otro espacio métrico completo con $g : X \to Z$ una isometría. Por el lema anterior existen isometrías:

- $\tilde{g} : \overline{f(X)} \to Z$ tal que $\tilde{g}(f(x)) = g(x)$,
- $\tilde{f} : \overline{g(X)} \to Y$ tal que $\tilde{f}(g(x)) = f(x)$.

Como $\tilde{g}(f(X)) \subset g(X)$, y $\tilde{g}$ es una isometría, $\tilde{g}(\overline{f(X)}) \subset \overline{g(X)}$. Análogamente, $\tilde{f}(\overline{g(X)}) \subset \overline{f(X)}$. Luego podemos pensar $\tilde{g} : \overline{f(X)} \to \overline{g(X)}$ y $\tilde{f} : \overline{g(X)} \to \overline{f(X)}$. Veamos que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}$ (la función identidad de $\overline{f(X)}$) y $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{id}$.

Si $x \in X$, $\tilde{f}(\tilde{g}(f(x))) = \tilde{f}(g(x) = f(x)$, con lo cual $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ evaluado en puntos de $f(X)$ es la identidad. Como es una isometría, debe ser la identidad en todo $\overline{f(X)}$ (piensen en una sucesión que converge a z, va a parar a la misma sucesión por la función $\tilde{f} \circ \tilde{g}$). La otra composición vale por un argumento similar (cambiando el orden de la composición).

En particular, si existe la completación de un espacio métrico, la misma es "única".

Teorema 4.22. *Sea (X, d) un espacio métrico, entonces existe una completación de X.*

Demostración. Miremos el siguiente conjunto:

$$\mathscr{C} = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión de Cauchy en } X\}.$$

En el conjunto $\mathscr{C}$ definimos una relación, dada por $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ si y sólo si $d(x_n, y_n) \to 0$. Moralmente, identificamos dos sucesiones que "tienden" al mismo punto (aunque las sucesiones de Cauchy no tienen por qué converger en X pues no necesariamente es completo).

Dejamos como ejercicio verificar que la relación $\sim$ define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathscr{C}$, y llamamos $Y = \mathscr{C}/\sim$ (el conjunto de coclases).

Definimos una función $\iota : X \to Y$ dada por $\iota(x) = \{x\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o sea es la sucesión idénticamente x). Notar que la función ι es inyectiva, pues dados $x, y \in X$, si $\iota(x) = \iota(y)$ entonces $d(x, y) \to 0$, con lo cual $d(x, y) = 0$ y por propiedades de distancia $x = y$.

Aún no definimos la distancia en Y. Para eso, dados $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ puntos en Y, definimos

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n). \tag{3}$$

Notar que el valor $d(x_n, y_n)$ es un número real, con lo cual si probamos que la sucesión de números reales $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, al ser $\mathbb{R}$ completo, existe el límite en (3).

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe n_0 tal que $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n, m \geq n_0$. Análogamente, existe n_1 tal que $d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n, m \geq n_1$. Si $n, m \geq$ $\max\{n_0, n_1\}$ entonces

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n.x_m) + d(x_m.y_m) + d(y_m, y_n) \leq d(x_m, y_m) + \varepsilon,$$

con lo cual $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq \varepsilon$. Si hacemos la misma cuenta comenzando por $d(x_m, y_m)$ obtenemos que $d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq \varepsilon$, con lo cual $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq \varepsilon$, si $n, m \geq \max\{n_0.n_1\}$, con lo cual $\{d(x_n.y_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y la definición (3) tiene sentido.

Dejamos como ejercicio (sale de una cuenta muy similar a la anterior) verificar que:

- la definición (3) que la dimos en $\mathscr{C}$ en realidad pasa al cociente, o sea si $\{x_n\} \sim \{\widetilde{x_n}\}$ y $\{y_n\} \sim \{\widetilde{y_n}\}$ entonces $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = d(\{\widetilde{x_n}\}, \{\widetilde{y_n}\})$.
- la función d define una distancia en Y, o sea $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$ si y sólo si $\{x_n\} = \{y_n\}$ (inmediato de la definición de la relación $\sim$) y que además vale la desigualdad triangular (sugerencia: usar que d es una distancia en Y, con lo cual satisface la desigualdad triangular, y el hecho de que el límite de la suma de dos sucesiones es igual a la suma de los límites si ambos existen).

Es claro que ι es una isometría, pues

$$d(\iota(x), \iota(y)) = d(\{x\}_n, \{y\}_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Luego simplemente nos queda por demostrar que el espacio (Y, d) es completo. Para ello, tomemos una sucesión de puntos en Y que sea de Cauchy, esto es $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $y_n \in Y$, o sea cada punto es en particular una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy en X, esto es: $y_n = \{a_m^{(n)}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Podemos pensar que tenemos una matriz infinita (indexada por pares de números enteros) formada por los números $a_m^{(n)}$ (donde n denota la fila y m la columna). Ellos cumplen:

1. Como $\{y_n\}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(y_n, y_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$, o sea $\lim_{t\to\infty} d(a_t^{(n)}, a_t^{(m)}) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$.
2. Como cada y_n es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe N (que depende de n) tal que $d(a_r^{(n)}, a_s^{(n)}) < \varepsilon$ si $r, s \geq N$.

A partir de esta gran matriz, queremos extraer entradas que formen una sucesión de Cauchy $z = \{b_u\}_{u\in\mathbb{N}}$, que sea el candidato al límite.

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{u}$ (con $u \in \mathbb{N}$). Por 1., sabemos que existe N_u tal que $d(y_n, y_m) < \frac{1}{u}$ si $n, m \geq N_u$. Fijemos un valor cualquiera $n \geq N_u$ (por ejemplo tomemos $n = N_u$). Por otro lado, de la condición 2., sabemos que la sucesión $a_r^{(n)}$ (variando r) es de Cauchy, con lo cual existe M (que depende de n) tal que $d(a_r^{(n)}, a_s^{(n)}) < \frac{1}{u}$ si $r, s \geq M$. Defino $b_u = a_n^{(t)}$ para n, t que cumplan las propiedades anteriores (o sea $n \geq N_u$ y $t \geq M$), y además, de forma tal que b_{n+1} este abajo y a la derecha de b_n (notar que al hacer crecer a n nos movemos hacia la derecha de la matriz, y al hacer crecer t nos movemos hacia abajo, con lo cual siempre podemos construir un término de forma que quede abajo y a la derecha del anterior).

Una vez definido el candidato a límite, debemos ver: 1. que $\{b_n\} \in Y$ (o sea que es una sucesión de Cauchy) y 2. que $y_n \to z$.

1. $\{b_n\}$ es de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{n_0} < \varepsilon$. Luego, si $n, m \geq n_0$ (digamos $n \leq m$), $d(b_n, b_m) = d(a_i^{(v)}, a_j^{(w)})$ (olvidémonos por un segundo como los elegimos). O sea queremos comparar dos elementos que están en distinta fila y columna, pero sabemos que b_m está abajo y a la derecha de b_n (pues $n \leq m$), o sea $v \leq w$ e $i \leq j$. Sabemos que:

- Por la primera propiedad de la construcción, $d(y_v, y_w) < \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
- Por la segunda propiedad de la construcción, si t es grande, ambos $d(a_i^{(v)}, a_t^{(v)}) < \frac{1}{n}$ y también $d(a_j^{(w)}, a_j^{(t)}) < \frac{1}{m}$.

Tomemos t grande tal que vale lo segundo, y a la vez $d(a_t^{(v)}, a_t^{(w)}) < \frac{1}{n}$ (esto existe por el primer ítem, recordar la definición de $d(y_v, y_w)$). Luego,

$$d(a_i^{(v)}, a_j^{(w)}) \leq d(a_i^{(v)}, a_t^{(v)}) + d(a_t^{(v)}, a_t^{(w)}) + d(a_t^{(w)}, a_j^{(w)}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Luego $z = \{b_n\}$ es de Cauchy y un elemento de Y.

2. Veamos que $y_n \to z$, o sea $d(y_n, z) = \lim_{m\to\infty} d(a_m^{(n)}, b_m) \to 0$. Esto quiere decir que dado $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que si $n \geq N_0$, $\lim_{m\to\infty} d(a_m^{(n)}, b_m) < \varepsilon$. Por definición de límite, queremos ver que existe N_0 tal que si $n \geq N_0$, existe $M(n)$ (que depende de n) tal que si $m \geq M$ entonces $d(a_m^{(n)}, b_m) < \varepsilon$.

Comencemos entonces con un n_0 tal que $\frac{3}{n_0} < \varepsilon$. Por construcción de la sucesión b_n, sabemos que para todo $n \geq n_0$, el b_n elegido es miembro de alguna sucesión y_u, para valores $u \geq N_0$ que hacen que $d(y_u, y_v) \leq \frac{1}{n_0}$ si $u, v \geq N_0$. A la vez, si b_n es miembro de la sucesión y_u, digamos $b_n = a_t^{(u)}$, elegimos el término b_n de modo que para todo $s \geq t$ vale que $d(a_t^{(u)}, a_s^{(u)}) \leq \frac{1}{n}$.

Luego, si $n \geq N_0$ y tomamos la sucesión y_n, existe $M(n)$ (depende de n) tal que $d(a_r^{(n)}, a_s^{(n)}) \leq \frac{1}{n_0}$ si $r, s \geq M(n)$. Así, si $b_n = a_t^{(u)}$, y tomamos $m \geq M(n)$ tenemos que

$$d(a_m^{(n)}, a_t^{(u)}) \leq d(a_m^{(n)}, a_R^{(n)}) + d(a_R^{(n)}, a_R^{(u)}) + d(a_R^{(u)}, a_t^{(u)}) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{u} + \frac{1}{R} \leq \frac{3}{n_0} < \varepsilon,$$

donde $R = \max\{m, t\}$. $\square$

3. Una construcción de los números reales

Veamos como la construcción de la completación de un espacio métrico permite a la vez construir los números reales a partir de los números racionales. Vamos a asumir que valen las siguientes propiedades:

- El conjunto $\mathbb{Q}$ tiene dos operaciones binarias: $+ : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ y $\cdot : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
- El conjunto $(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo abeliano, o sea la suma es asociativa, conmutativa, existe neutro (el 0) y todo elemento tiene inverso.
- El conjunto $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
- Vale la distributiva de la multiplicación sobre la suma: para toda terna de números $a, b, c \in \mathbb{Q}$ vale que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

La forma de demostrar estas propiedades (para el que no lo haya visto antes) es probar las que valen en los números naturales por inducción (sobre todo las propiedades asociativa y conmutativa), y luego extender la demostración a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$.

Como hicimos con espacios métricos, tenemos una función “distancia”, $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $d(a,b) = |a - b|$. En particular, tiene sentido de hablar de sucesiones de Cauchy (entendiendo que pedimos para todo $\epsilon > 0$ en $\mathbb{Q}$).

Definimos $\mathbb{R} = \mathscr{C}/\sim$ como el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Igual que antes, tenemos una isometría $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Veamos como definir las operaciones en $\mathbb{R}$. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son dos sucesiones, definimos:

- $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$ (o sea la suma de dos sucesiones es la sucesión que se obtiene sumando miembro a miembro las sucesiones).
- $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$ (o sea el producto de dos sucesiones es la sucesión que se obtiene multiplicando miembro a miembro las sucesiones).

Lema 4.23. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces está acotada, o sea existe $N \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_n| \leq N$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Tomemos $\varepsilon = 1$, entonces existe n_0 tal que $d(x_n, x_m) \leq 1$ si $n, m \geq n_0$. En particular, si $n \geq n_0$

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Si tomamos $N = \text{máx}\{1 + |x_{n_0}|, |x_i| \ : \ 1 \leq i \leq n_0\}$ el resultado sigue. $\square$

Lema 4.24. *La suma y el producto de sucesiones de Cauchy es de Cauchy. Mas aún, si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ entonces $\{x_n\} + \{z_n\} \sim \{y_n\} + \{z_n\}$. Lo mismo sucede con el producto.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, y sean n_0, n_1 tales que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$ y $d(y_n, y_m) < \varepsilon$ si $n \geq n_1$. Sea N tal que $|x_n| \leq N$ y $|y_n| \leq N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d(x_n + x_m, y_n + y_m) = |x_n + x_m - y_n - y_m| \leq |x_n - y_n| + |x_m - y_m| < 2\varepsilon.$$

Análogamente,

$$|x_n \cdot x_m - y_n \cdot y_m| \leq |x_n \cdot x_m - x_n \cdot y_m| + |x_n \cdot y_m - y_n \cdot y_m| < 2\varepsilon N.$$

Para ver que no depende de la clase, notar que $|(x_n+z_n)-(y_n+z_n)| = |x_n-y_n|$, que tiende a cero. $\square$

Ver que la suma y el producto en $\mathbb{R}$ cumplen las propiedades asociativas y conmutativas es inmediato de que vale en las sucesiones (o sea la operación vale en los términos de la sucesión, y la suma es término a término). El neutro para la suma en $\mathbb{R}$ es la clase de la sucesión constantemente 0, y el neutro del producto es la clase de la sucesión constantemente 1.

Si $\{x_n\} \in \mathbb{R}$, su inverso aditivo es $\{-x_n\}$.

Lema 4.25. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy que no tiende a cero, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|x_n| \geq \delta$ para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Como $\{x_n\} \not\to 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo n_0, $|x_n| \geq \delta$ para algún $n \geq n_1$.

Tomemos $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, como la sucesión es de Cauchy, $|x_n - x_m| < \frac{\delta}{2}$ para todo $n, m \geq n_0$. Entonces existe n_1 tal que $n_1 > n_0$ y $|x_{n_1}| > \delta$, y para $n \geq n_0$ vale

$$\delta < |x_{n_1}| \leq |x_n| + |x_n - x_{n_1}| \leq |x_n| + \frac{\delta}{2}.$$

Pasando restando, tenemos que $|x_n| > \frac{\delta}{2}$ si $n \geq n_0$. □

Para ver la existencia de inversos, si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy no nula, $x_n \not\to 0$, con lo cual existe $\delta > 0$ (racional) tal que $|x_n| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por el lema). Luego el inverso multiplicativo de $\{x_n\}$ es la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$. Veamos que es de Cauchy:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} \leq \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2},$$

como δ es una constante, podemos hacer la diferencia tan chica como queramos (notar que debíamos usar en algún lugar que el número $\{x_n\}$ es distinto de cero, sino no puede haber inverso).

Nos resta definir un *orden* en el conjunto de números reales.

Definición. Dadas $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathbb{R}$, decimos que $\{x_n\} < \{y_n\}$ si existe $\delta > 0$ (racional) y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n + \delta < y_n$ para todo $n \geq n_0$.

Proposición 4.26 (Tricotomía). *Dados $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathbb{R}$, entonces vale exactamente una de las siguientes: $\{x_n\} < \{y_n\}$, $\{y_n\} < \{x_n\}$ ó $\{x_n\} = \{y_n\}$.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\} \neq \{y_n\}$, o sea $|x_n - y_n| \not\to 0$. Por el Lema 4.25, existe $\delta > 0$ tal que $|x_n - y_n| \geq \delta$ si $n \geq n_0$. Notar que además, como las sucesiones son de Cauchy, vale siempre que $x_n - y_n \geq \delta$ o $y_n - x_n \geq \delta$ si n es grande.

En el primer caso, $x_n \geq y_n + \delta$ para todo $n \geq n_0$, con lo cual $\{y_n\} < \{x_n\}$ mientras que en el segundo $y_n \geq \delta + x_n$ con lo cual $\{x_n\} < \{y_n\}$, como queríamos ver. □

Proposición 4.27 (Axioma del supremo). *Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente entonces tiene supremo.*

Demostración. Por hipótesis, existe $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ que es cota superior. Para aliviar la notación, veamos que a la sucesión $\{x_n\}$ la podemos tomar como una sucesión constante (digamos $x_n = M \in \mathbb{Q}$). Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, por el Lema 4.23 sabemos que existe $M \in \mathbb{Q}$ tal que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual la sucesión $\{x_n\} \leq \{M\}$ (la sucesión de Cauchy constantemente M), con lo cual M es también cota superior.

Como A es no vacío, existe un punto $\{a_n\} \in A$ (recordar que los puntos de $\mathbb{R}$ son sucesión de Cauchy). Afirmo que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que la sucesión constante $\{M - \frac{b}{m}\}$ es menor que $\{a_n\}$. La razón es que si tomamos $\epsilon = 1$, existe n_0 tal que $|a_n - a_{n_0}| < 1$ para todo $n \geq n_0$ (en particular, $-1 < a_n - a_{n_0}$).

Ahora a_{n_0} es un número racional, con lo cual existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $M - \frac{b}{m} + \frac{1}{m} < a_{n_0} - 1$. Luego, si $n \geq n_0$ vale que

$$M - \frac{b}{m} + \frac{1}{m} < a_{n_0} - 1 < a_{n_0} + a_n - a_{n_0} = a_n.$$

En particular, por la definición del orden en $\mathbb{R}$ (tomando $\delta = \frac{1}{m}$) tenemos que la sucesión constante $M - \frac{b}{m} < a_n$.

Luego construimos el supremo de la siguiente manera: tomamos $m = 1$; por el argumento anterior, si para cada $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ miramos los elementos de $\mathbb{R}$ dados por la sucesión constante $M - \frac{b}{2^1}$, hay un máximo valor b_1 tal que $M - \frac{b_1}{2^1}$ es cota superior de A pero $M - \frac{(b_1+1)}{2^1}$ no lo es. Definimos $y_1 = M - \frac{b_1}{2^1}$.

Análogamente, para cada m, tenemos b_m tal que la sucesión constante $M - \frac{b_m}{2^m}$ es cota superior de A pero $M - \frac{(b_m+1)}{2^m}$ no lo es. Definimos $y_m = M - \frac{b_m}{2^m}$.

Si $y_m = M - \frac{b_m}{2^m}$, la igualdad $M - \frac{b_m}{2^m} = M - \frac{2b_m}{2^{m+1}}$, nos dice que este último valor es una cota superior de A y por definición debe valer que $b_{m+1} \geq 2b_m$. Notar que esto nos dice que la sucesión y_n de números racionales es decreciente.

Por otro lado, de la definición de y_m sabemos que el valor $M - \frac{2b_m+2}{2^{m+1}}$ no es cota superior de A, con lo cual $b_{m+1} < 2b_m + 2$. Luego,

$$|y_m - y_{m+1}| = \left| \frac{2b_m - b_{m+1}}{2^{m+1}} \right| \leq \frac{1}{2^m}.$$

El hecho de que la serie $\frac{1}{2^m}$ converge nos asegura que la sucesión y_m es de Cauchy, pues dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq n_0$. Así, si $n, m \geq n_0$, sigamos $n \leq m$, tenemos que

$$|y_n - y_m| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |y_i - y_{i+1}| \leq \sum_{i \geq n} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^n} < \varepsilon.$$

En particular $\{y_n\} \in \mathbb{R}$ y es nuestro candidato a supremo. Veamos que es cota superior y que no hay cota superior menor.

Supongamos que $\{y_n\}$ no es cota superior. Luego existe $\{a_n\} \in A$ tal que $\{y_n\} < \{a_n\}$. Recordar que esto quiere decir que existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n + \delta < a_n$ para todo $n \geq n_0$.

Tomemos $n_1 > n_0$ tal que $\frac{2}{n_1} < \delta$. Como $\{y_n\}$ es de Cauchy, existe n_2 tal que $|y_n - y_m| < \frac{1}{n_1}$ si $n, m \geq n_2$. Sea $N \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ vale que si $n \geq N$,

$$y_N + \frac{1}{N} = y_N - y_n + y_n + \frac{1}{N} \leq \frac{1}{n_1} + y_n + \frac{1}{n_0} < y_n + \delta < a_n.$$

Luego por definición, la sucesión constante $\{y_N\}$ es menor que la sucesión $\{a_n\}$, ¡lo que contradice que es cota superior!

Por último, veamos que no puede haber cota superior mas pequeña (es similar a la última cuenta). Supongamos que $\{z_n\}$ es cota superior y $\{z_n\} < \{y_n\}$, o sea existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n + \delta < y_n$ para todo $n \geq n_0$. Sea n_1 tal que $\frac{1}{2^{n_1}} < \frac{\delta}{3}$. Como $\{y_n\}$ es de Cauchy, existe n_2 tal que $|y_n - y_m| < \frac{1}{2^{n_1}}$ si $n, m \geq n_2$. Tomemos $N = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ entonces si $n \geq N$ vale que

$$(y_N - \frac{1}{2^N}) - \frac{1}{2^N} = y_N - y_n + y_n - \frac{2}{2^N} > y_n - \frac{1}{2^{n_1}} - \frac{2}{2^N} > y_n - \delta > z_n.$$

Luego, de la definición de orden en $\mathbb{R}$ (tomando $\delta = \frac{1}{2^N}$) obtenemos que la sucesión constante $y_N - \frac{1}{2^N}$ es mayor que $\{z_n\}$, que es cota superior, por ende $y_N - \frac{1}{2^N} = M - \frac{(b_N+1)}{2^N}$ es cota superior, ¡lo que contradice como lo construimos! $\square$

Capítulo 5

Producto de espacios topológicos II

Vimos en la sección 3.2 como dados $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ espacios topológicos, como definir una topología en el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$, donde una base de abiertos consistía en tomar producto de abiertos en cada uno de ellos. A la vez, vimos en el Ejemplo 17 que si queremos poner una topología similar a un producto infinito de espacios topológicos, algunas propiedades dejan de valer (por ejemplo que el producto de espacios compactos sea compacto).

Una propiedad importante que vimos en el producto finito de espacios topológicos, era que las funciones proyección:

$$\pi_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i,$$

son continuas. Mas aún, vimos que la topología producto es la topología menos fina con esta propiedad. Teniendo en cuenta que esta propiedad caracteriza a la topología producto, podemos preguntarnos que sucede si tomamos ahora un producto arbitrario de conjuntos. Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y para cada $i \in I$ miremos a la función proyección

$$\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \to X_i,$$

y pensemos cual es la menor topología en $\prod_{j \in I} X_j$ que las hace continuas. Para ello tenemos que mirar a la topología con sub-base dada por $\pi_i^{-1}(U)$, donde $U \in \mathcal{T}_i$. Por definición,

$$\pi_i^{-1}(U) = \prod_{j \in I}(V_j), \text{ donde } V_j = \begin{cases} X_j & \text{si } j \neq i, \\ U & \text{si } j = i. \end{cases},$$

o sea el conjunto $\pi_i^{-1}(U)$ tiene a U en la “coordenada” i, y a todo el espacio X_j en las otras coordenadas. Recordar que la forma de obtener una base de una topología es a partir de tomar intersecciones finitas de una sub-base. Esto sugiere que la menor topología que hace a las proyecciones continuas tiene como base a los conjuntos que tienen en finitas coordenadas a un abierto del espacio topológico correspondiente, y en las otras todo el espacio topolígico, o sea

$$\left\{ \prod_{\substack{j \in J \\ J \subset I}} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \ : \ J \subset I \text{ finito} \right\}. \tag{4}$$

Definición. Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ son espacios topológicos, definimos a la *topología producto* en $\prod_{i \in I} X_i$ como la topología que tiene como base los conjuntos como (4).

A la vez, tenemos otra generalización del caso finito al caso infinito, dada por la siguiente topología.

Definición. Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ son espacios topológicos, definimos a la *topología de cajas* en $\prod_{i\in I} X_i$ como la topología que tiene como base los conjuntos $\prod_{i\in I} U_i$ donde $U_i \in \mathcal{T}_i$.

Notar que como $X_i \in \mathcal{T}_i$ (por definición de una topología) la topología de cajas es mas fina que la topología producto, con lo cual las proyecciones también son continuas para la topología de cajas.

Observación.

- Si el conjunto I es finito, claramente la topología producto coincide con la topología de cajas. La diferencia aparece recién en productos infinitos.
- Si el conjunto I **no** es finito, ambas topologías son realmente distintas. La topología de cajas tiene mas abiertos que la topología producto si la topología en infinitos espacios X_i no es la trivial (claramente si la topología $\mathcal{T}_i$ es trivial, hay un único abierto no vacío para elegir). Tomemos para cada $i \in I$ in conjunto $U_i \in \mathcal{T}_i$, y que sea propio (o sea $U_i \subsetneq X_i$) para infinitos valores de i. Luego el conjunto $\prod_{i\in I} U_i$ es abierto en la topología de cajas, pero no es abierto en la topología producto porque no contiene a ningún elemento de la base.

Proposición 5.1. *Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ son espacios topológicos, y $X = \prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto o la topología de cajas, entonces las funciones proyección $\pi_i : X \to X_i$ son abiertas. Mas aún, si $J \subset I$ es no vacío, entonces la función proyección $\prod_{j\in J} : X \to \prod_{j\in J} X_j$ es abierta (donde en este espacio ponemos la misma topogía que X, o sea producto si X tiene la producto o de cajas si X tiene la de cajas).*

Demostración. Si probamos el enunciado mas general, tomando $J = \{i\}$ obtenemos el primer enunciado. Sea entonces $J \subset I$ un subconjunto no vacío. Como la imagen de uniones es la unión de las imágenes, y la imagen de una intersección finita es la intersección de las imágenes, basta ver las afirmaciones para abiertos de la base. Sea entonces $\mathcal{J} \subset I$ (que será finito si tomamos la topología producto, o todo I para la topología de cajas) y sea $U_j \in \mathcal{T}_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$, y sea $U = \prod_{j\in\mathcal{J}} U_j \times \prod_{i\in I\setminus\mathcal{J}} X_i$. Por definición,

$$\prod_{j\in J} \pi_j(U) = \prod_{j\in J\cap\mathcal{J}} U_j \times \prod_{i\in J\setminus\mathcal{J}} X_i.$$

Por definición de la topología producto/de cajas en $\prod_{j\in J} X_j$, este último conjunto es abierto. $\square$

Proposición 5.2. *Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. Entonces X es Hausdorff para la topología de cajas (respectivamente la topología producto) si y sólo si cada X_i lo es.*

Demostración. $\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. En particular, difieren en alguna coordenada, digamos que $\pi_k(x) \neq \pi_k(y)$ (o sea difieren en la coordenada k). Como X_k es Hausdorff, existen abiertos $U, V \in \mathcal{T}_k$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, si tomamos los abiertos $\tilde{U} = \pi_k^{-1}(U)$ y $\tilde{V} = \pi_k^{-1}(V)$ (que son abiertos en ambas topologías pues las proyecciones son continuas), vale que $x \in \tilde{U}$, $y \in \tilde{V}$, y $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ (pues no hay ningún valor en común en la coordenada k).

$\Rightarrow$). Miremos un espacio X_{i_0}, y veamos que es Hausdorff. Sean x, y dos puntos en X_{i_0} distintos. Para cada índice $j \in I$ distinto de i_0 elegimos un punto $z_j \in X_j$

(siempre precisamos asumir que vale el axioma de elección al trabajar con conjuntos no finitos), y definimos los elementos de X:

$$(\tilde{x})_j = \begin{cases} z_j & \text{si } j \neq i_0, \\ x & \text{si } j = i_0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (\tilde{y})_j = \begin{cases} z_j & \text{si } j \neq i_0, \\ y & \text{si } j = i_0. \end{cases}$$

Como X es Hausdorff, existen abiertos (que podemos suponer de la base) U, V de X tales que $\tilde{x} \in U$, $\tilde{y} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como la proyección π_{i_0} es abierta, $\pi_{i_0}(U)$ y $\pi_{i_0}(V)$ son abiertos en X_i, el primero contiene a x y el segundo contiene a y. Si $\pi_{i_0}(U) \cap \pi_{i_0}(V) \neq \emptyset$ (digamos que t es un elemento de la intersección), entonces el elemento

$$(\tilde{t})_j = \begin{cases} z_j & \text{si } j \neq i_0, \\ t & \text{si } j = i_0, \end{cases}$$

es un elemento que está tanto en U como en V (recordar que los elementos de la base son productos cartesianos de conjuntos), lo que es un absurdo. □

Teorema 5.3. *Sean $(X_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in I}$, $(Y, \tilde{\mathfrak{T}})$ espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto. Una función $f : Y \to X$ es continua si y sólo si $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ lo es para todo $i \in I$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es continua, como π_i es continua, la composición también lo es.

$\Leftarrow$). Basta verlo para una base de abiertos. Sea $J \subset I$ finito, y sea $U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$ un abierto de X (donde cada $U_j \in \mathfrak{T}_j$). Claramente se tiene que $f^{-1}(U) = \cap_{j \in J} (\pi_j \circ f)^{-1}(U_j)$, como $\pi_j \circ f$ es continua, cada conjunto es abierto, y el resultado sigue de que la intersección finita de abiertos es abierto. □

Ejemplo 19. Supontamos que tomamos $(X_i, \mathfrak{T}_i) = [-1, 1]$, con conjunto de índices $I = \mathbb{N}$, y miramos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(t) = (t, t, \ldots, t, \ldots)$. Claramente, si $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i \circ f = \mathrm{id}$, que esuna función continua. Por otro lado, el intervalo $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ es abierto en $\mathbb{R}$, con lo cual $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ es abierto en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas. Por definición,

$$f^{-1}(U) = \cap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\},$$

que no es un abierto en $\mathbb{R}$. Luego el resultado anterior es falso si en lugar de tomar la topología producto tomamos la topología de cajas.

Ejercicio 28. Probar que el gráfico de la función anterior es cerrado. Esto en particular tiene dos implicancias interesantes: un ejercicio de la guía pedía probar que si una función es continua, entonces su gráfico es cerrado. Con esto vemos que la recíproca no vale en general. Por otro lado, la segunda parte de dicho ejercicio pedía demostrar que si $f : X \to Y$ tiene gráfico cerrado y el espacio Y es compacto, entonces f es continua. Este ejemplo da otra demostración de que el espacio $\prod_{n \in \mathbb{N}} [-1, 1]$ con la topología de cajas no es compacto.

Teorema 5.4. *Sean $(X_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in I}$ espacios topológicos, y $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto. Entonces X es conexo si y sólo si cada X_i lo es.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si X es conexo, $X_i = \pi_i(X)$, y como π_i es continua, X_i lo es por el Teorema 3.4.

$\Leftarrow$) Supongamos que X no es conexo, con lo cual por el Lema 3.1 existe una función continua y suryectiva $f : X \to \{0,1\}$ (pensado con la topología discreta). Fijemos $a \in X$ tal que $f(a) = 0$ (sabemos que existe un tal a), y definamos para cada $i \in I$ el conjunto A_i dado por todos los elementos de X cuyas coordenadas coinciden con las de a salvo en el lugar i, o sea

$$A_i = \{x \in X \ : \ \pi_j(x) = \pi_j(a) \text{ para todo } j \in I, j \neq i\}.$$

Notemos que el conjunto $A_i \simeq X_i$ (homeomorfo) pensando $A_i \subset X$ con la topología de subespacio, con lo cual como X_i es conexo, A_i también lo es. Como f es continua, debe valer que f es constante en cada conjunto A_i (por ser ellos conexos), con lo cual $f(A_i) = f(a) = 0$.

Dados dos índices $i, j \in I$ distintos, podemos definir de manera análoga el conjunto

$$A_{i,j} = \{x \in X \ : \ \pi_k(x) = \pi_k(a) \text{ para todo } k \in I, k \neq i, k \neq j\},$$

o sea los elementos que coinciden con a salvo en las coordenadas i, j. Como sucedía con un sólo índice, $A_{i,j} \simeq X_i \times X_j$, que es un conjunto conexo (por el Teorema 5.4). Luego $f(A_{i,j}) = f(a) = 0$. Con un argumento similar, si tomamos $J \subset I$ finito, y definimos el conjunto A_J como los elementos de X que coinciden con a fuera de J, vale que $A_J \simeq \prod_{j \in J} X_j$, que es conexo por el Teorema 5.4, y entonces $f(A_J) = f(a) = 0$.

Afirmo: el conjunto

$$\mathscr{A} = \bigcup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finito}}} A_J$$

es denso en X.

Luego, como f vale cero en un denso ($\mathscr{A}$), y es continua, es la función idénticamente cero, lo que contradice la suryectividad.

Veamos entonces que $\mathscr{A}$ es denso. Por definición esto quiere decir que si U es abierto, entonces $U \cap \mathscr{A}$ es no vacío. A la vez, basta para probarlo para abiertos de la base. Sea entonces $U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$. Claramente $U \cap A_J$ es no vacío, pues si $u_j \in U_j$ para cada $j \in J$, entonces el emenento

$$(\tilde{u})_k = \begin{cases} u_k & \text{si } k \in J, \\ a_k & \text{si } k \notin J, \end{cases}$$

es un elemento que está en U y en A_J. □

Ejercicio 29. El objetivo de este ejercicio es probar que el resultado anterior deja de ser cierto si en lugar de tomar la topología producto tomamos la topología de cajas.

Sea $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ con la topología de cajas. Como conjunto, X lo podemos pensar como las sucesiones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Probar que X no es conexo, demostrando por ejemplo que el conjunto

$$U = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \ \lim_{n \to \infty} f(n) = 0\},$$

es abierto y su complemento también lo es.

Teorema 5.5 (Tychonoff). *Si $(X_i, \mathcal{T}_i)$ son espacios topológicos compactos, y $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto, entonces X es compacto.*

Antes de dar la demostración del Teorema de Tychonoff, precisamos de algunos resultados preliminares. Comencemos por recordar el Lema de Zorn.

Lema 5.6 (Zorn). *Todo conjunto parcialmente ordenado, no vacío, en el que todo subconjunto totalmente ordenado admite cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

Veamos el siguiente resultado técnico.

Lema 5.7 (Alexander). *Si $\mathcal{S}$ es una sub-base de un espacio topológico X que cumple que todo cubrimiento de X por elementos de $\mathcal{S}$ admite un subcubrimiento finito, entonces X es compacto.*

Notar que este Lema lo que dice es que en lugar de probar compacidad para un cubrimiento arbitrario, alcanza con probarlo para cubrimientos que se obtienen a partir de una sub-base de la topología de X.

Demostración del Lema de Alexander. Supongamos que X no es compacto, con lo cual existe un cubrimiento de X que no admite subcubrimiento finito. Miremos el siguiente conjunto:

$$\mathscr{F} = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \ : \ \mathcal{B} \text{ cubre a } X \text{ y no admite subcubrimiento finito}\}.$$

O sea $\mathscr{F}$ contiene a todos los cubrimientos que muestran que X no es compacto. Por hipótesis, $\mathscr{F}$ es no vacío (porque X no es compacto). En $\mathscr{F}$ ponemos un orden dado por la "inclusión", o sea decimos que $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ si todo elemento de $\mathcal{B}_1$ está en $\mathcal{B}_2$ (o sea $\mathcal{B}_1$ es un subcubrimiento de $\mathcal{B}_2$). Veamos que $\mathscr{F}$ tiene entonces elementos maximales. Para ello queremos utilizar el Lema de Zorn, con lo cual debemos verificar que todo subconjunto no vacío y totalmente ordenado admite cota superior.

Sea entonces $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ un subconjunto totalmente ordenado (o sea si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathscr{F}_0$ entonces vale que $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ o viceversa). Definimos $\tilde{B} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathscr{F}_0} \mathcal{B}$ (o sea el cubrimiento de X formado por todos los abiertos de todos los cubrimientos pertenecientes a $\mathscr{F}_0$).

Es claro que $\tilde{B}$ es un cubrimiento (pues $\mathscr{F}_0$ es no vacío, con lo cual tiene al menos un cubrimiento de X), y de estar en $\mathscr{F}$, también es claro que es cota superior (pues es mayor que todos los elementos de $\mathscr{F}_0$). Veamos que $\tilde{B}$ no admite subcubrimientos finitos. Si lo admitiera, digamos que existen $U_1, \ldots, U_N \in \tilde{B}$ que cubren a X. Por construcción, cada $U_i \in \mathcal{B}_i \in \mathscr{F}_0$ (para $1 \leq i \leq N$), y como el orden es total, uno de ellos es el mas grande de todos (digamos $\mathcal{B}_N$). En particular, todos los abiertos U_i pertenecen a $\mathcal{B}_N$ y por ende $\mathcal{B}_N$ admite un subcubrimiento finito, lo que contradice que $\mathcal{B}_N \in \mathscr{F}$.

Como se cumplen la hipótesis del Lema de Zorn, existe $\mathscr{M} \in \mathscr{F}$ maximal (o sea que no admite otro elemento mayor que él). El conjunto $\mathscr{M}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Si A es un abierto, $A \notin \mathscr{M}$, entonces existen $U_1, \ldots, U_N \in \mathscr{M}$ tales que $A \cup U_1 \cup \cdots \cup U_N = X$.
   Demostración: como $\mathscr{M}$ es maximal, $\{A \cup \mathscr{M}\} \notin \mathscr{F}$, con lo cual existen $U_1, \ldots U_N \in \mathscr{M}$ tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_N \cup A$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$ cumplen que $A \notin \mathscr{M}$ y $B \notin \mathscr{M}$ entonces $A \cap B \notin \mathscr{M}$.
   Demostración: por el ítem anterior, existen $U_1, \ldots, U_N$ y $V_1, \ldots V_M$ en $\mathscr{M}$ tales que $X = A \cup U_1 \cup \ldots \cup U_N$ y $X = B \cup V_1 \cup \ldots \cup V_M$ con lo cual

$X = (A \cap B) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_N \cup V_1 \cup \ldots \cup V_M$, con lo cual $A \cap B$ no puede estar en $\mathscr{M}$ (caso contrario tendría un subcubrimiento finito).

3. Si $U \in \mathscr{M}$ y $V \subset U$ entonces $V \in \mathscr{M}$.
   Demostración: si $V \notin \mathscr{M}$ entonces existen $V_1, \ldots, V_N \in \mathscr{M}$ tales que $X = V \cup V_1 \cup \cdots \cup V_N$ con lo cual $X = U \cup V_1 \cup \cdots \cup V_N$ y $\mathscr{M}$ admite un subcubrimiento finito, absurdo.

Veamos como estas tres propiedades implican el Lema. Por un lado, sabemos que $\mathscr{M}$ es un cubrimiento de X, o sea dado $x \in X$, existe $U \in \mathscr{M}$ tal que $x \in U$.

Si $U \in \mathscr{M}$ y $x \in U$, como $\mathcal{S}$ es sub-base de la topología, existen $S_1, \ldots S_k \in \mathcal{S}$ tales que $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_k \subset U$. La propiedad 3. nos dice que entonces $S_1 \cap \cdots \cap S_k \in \mathscr{M}$ y (el contrarecíproco de) la propiedad 2. nos dice que alguno de los $S_i \in \mathscr{M}$.

En particular, obtenemos que para cada $x \in X$, existe $S_x \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S_x \in \mathscr{M}$. Por hipótesis, el cubrimiento $\{S_x\}_{x \in X}$ admite un subcubrimiento finito, con lo cual también lo admite $\mathscr{M}$. Absurdo. □

Ahora sí, veamos la demostración del Teorema de Tychonoff.

Demostración del Teorema de Tychonoff. Tomemos como sub-base de la topología al conjunto $\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \; : \; U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$. Por el Lema de Alexander, basta con probar que cualquier cubrimiento por elementos de $\mathcal{S}$ admite un subcubrimiento finito.

Sea entonces $\mathscr{A}$ un cubrimiento de X por elementos de $\mathcal{S}$. Para cada $i \in I$, miremos el conjunto $A_i = \{U \in \mathcal{T}_i \; : \; \pi_i^{-1}(U) \in \mathscr{A}\}$. Notemos que en particular A_i nos dice que elementos de X puedo cubrir a partir de abiertos en la coordenada i. Como $\mathscr{A}$ cubre a todo X y todos los elementos de $\mathscr{A}$ están en $\mathcal{S}$, existe i_0 tal que $A_{i_0} = X_{i_0}$ (caso contrario, para cada $i \in I$ tomamos $x_i \in X_i \setminus A_i$, y el elemento que en la coordenada i tiene a x_i no puede ser cubierto). Pero X_i es compacto, con lo cual A_i lo puedo cubrir con finitos conjuntos $U_1, \ldots, U_N$, y luego

$$X = \pi_i^{-1}(X_i) = \pi_i^{-1}(\bigcup_{i=1}^{N} U_i) = \bigcup_{i=1}^{N} \pi_i^{-1}(U_i),$$

y cada uno de estos elementos está en $\mathscr{A}$, con lo cual $\mathscr{A}$ admite un subcubrimiento finito. □

Capítulo 6

Grupos topológicos

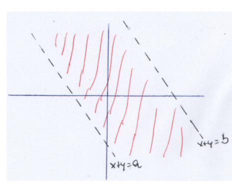
Definición. Un *grupo topológico* es un par $(G, *)$ que satisface:

- G es un espacio topoógico que es T_1 (sus puntos son cerrados).
- $* : G \times G \to G$ es una operación binaria que hace al conjunto G un grupo (o sea la operación es asociativa, existe un neutro y todo elemento tiene inverso).
- La operación $* : G \times G \to G$ es continua, para la topología producto en $G \times G$.
- La función $\text{inv} : G \to G$ dada por $\text{inv}(g) = g^{-1}$ (el inverso) es continua.

Ejemplos. 1. El par $(\mathbb{Z}, +)$, donde $\mathbb{Z}$ tiene la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ (y por ende la discreta) es un grupo topológico.

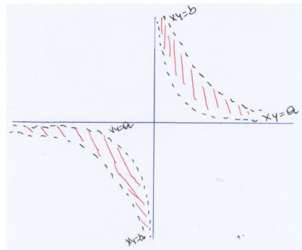
2. Más generalmente, si $(G, *)$ es un grupo, y ponemos en G la topología discreta, obtenemos un grupo topológico.
3. El par $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo topológico. Es claro que $\mathbb{R}$ es T_1, y que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo. Nos queda simplemente verificar las propiedades topológicas.

   Para ver que la función suma $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua, debemos tomar $(a, b) \in \mathbb{R}$ (que son una base de abiertos) y calcular su preimagen. Pero
   $$+^{-1}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x + y < b\},$$
   que es un conjunto abierto. Con respecto a la inversa, $\text{inv}(a) = -a$, con

   lo cual para ver su continuidad, calculamos $\text{inv}^{-1}(a, b) = (-b, -a)$ que es abierto, con lo cual la función inv también es continua, y así $(\mathbb{R}, +)$ resulta un grupo topológico.
4. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo topológico. Nuevamente, los puntos son cerrados, y como conjunto $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo, con lo cual debemos verificar que el producto es continuo, y lo mismo con la función inversa.

   Para ver que la función producto $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua, debemos tomar $(a, b) \in \mathbb{R}$ (que son una base de abiertos) y calcular su preimagen. Pero
   $$\cdot^{-1}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x \cdot y < b\},$$
   que es un conjunto abierto. Con respecto a la inversa, $\text{inv}(a) = \frac{1}{a}$, con lo cual para ver su continuidad, calculamos $\text{inv}^{-1}(a, b)$ cuando ambos $a, b > 0$



o ambos $a, b < 0$. En dichos casos, $\operatorname{inv}^{-1}(a,b) = (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ que es abierto, con lo cual función inv también es continua, y así $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ resulta un grupo topológico.

5. Miremos $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \; : \; ad - bc \neq 0 \right\}$, con la topología que tiene como subconjunto de $\mathbb{R}^4$ (identificando $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con (a, b, c, d)). Como vieron en Algebra II, las matrices invertibles formas un grupo (no abeliano), con lo cual hay que verificar que el producto es continuo. Pero
$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{smallmatrix}\right)$$
Notar que en cada coordenada, lo que hacemos es sumar y multiplicar números reales, y los dos ejemplos anteriores muestran que dichas operaciones son continuas, con lo cual el producto también lo es. Para ver que la inversa es una función continua, recordar que la inversa de una matriz coincide con la adjunta dividido el determinante, o sea
$$\operatorname{inv}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{1}{(ad-bc)} \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right),$$
lo que es continuo coordenada a coordenada.
6. Una cuenta similar muestra que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Ejercicio 30. Probar que si $(G, *)$ es un grupo topológico, y $H \subset G$ es un subgrupo (como conjunto), entonces la topología de G hace a $(H, *)$ un grupo topológico en sí mismo. En particular, todo subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Si $(G, *)$ es un grupo topológico, fijado $g \in G$ podemos mirar la función dada por “traslación a izquiera”, o sea $m_g : G \to G$, $m_g(h) = g * h$.

Lema 6.1. *La función m_g es un homeomorfismo.*

Demostración. Claramente la función es biyectiva, con inversa $m_{g^{-1}}$, pues
$$m_{g^{-1}}(m_g(h)) = m_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}(gh) = h.$$
La otra composición se ve de forma análoga. Debemos ver que la función m_g es continua. Definamos la función $\iota_g : G \to G$ como la función constantemente g, o sea $\iota_g(h) = g$. Claramente ι_g es continua (queda como ejercicio escribirlo). Luego miremos la siguiente composición:
$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(\iota_g, \mathrm{id})} & G \times G & \xrightarrow{\ *\ } & G \\ \\ h & \longrightarrow & (g,h) & \longrightarrow & gh \end{array}$$

Luego m_g es la composición de ambas funciones, y como ellas son continuas (recordar el Ejercicio 15), m_g lo es. Por la misma razón su inversa es continua. $\square$

Lo interesante de los grupos topológicos es la interacción de la aritmética del grupo con la topología.Por ejemplo, el Lema nos dice que si $U \subset G$ es un conjunto abierto, y $g \in G$, entonces $g \cdot U$ es otro conjunto abierto en G. En particular, si entendemos en un grupo topológico los abiertos alrededor del neutro, luego podemos entender los abiertos en cualquier otro punto trasladando entornos por las funciones m_g.

Proposición 6.2. *Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo abierto entonces H es cerrado.*

Demostración. Como H es un subgrupo, podemos definir una relación de equivalencia (a derecha) en G a partir de él, definiendo $g_1 \sim g_2$ si $g_1^{-1}g_2 \in H$ (equivalentemente si $g_1H = g_2H$). Luego, si denotamos por G/H al conjunto de clases de equivalencia, entonces tenemos que

$$G = \dot{\bigcup_{g\in G/H}} (g \cdot H) = H \cup \left(\dot{\bigcup_{\substack{g\in G/H \\ g\notin H}}} (g \cdot H) \right), \tag{5}$$

donde el punto en el símbolo de unión significa que la unión es disjunta. El Lema anterior dice que cada $g \cdot H$ es abierto, con lo cual el complemento de H es abierto, y así H es cerrado. $\square$

Claramente, si reemplazamos H abierto por H cerrado, sigue siendo cierto que los trasladados $g \cdot H$ siguen siendo cerrados, pero precisamos que la unión sea finita para poder asegurar que unión de cerrados es cerrado. Pero si por ejemplo H tiene índice finito en G, entonces la demostración anterior prueba que H es abierto si y sólo si es cerrado.

Corolario 6.3. *Si G es un grupo topológico compacto, y $H < G$ es un subgrupo abierto, entonces $[G : H]$ es finito.*

Demostración. La ecuación (5) da un cubrimiento de G por abiertos disjuntos. Si G es compacto, dicho cubrimiento admite un subcubrimiento finito, pero al ser los conjuntos disjuntos, el número de conjuntos es finito. $\square$

Proposición 6.4. *Sea $(G, *)$ es un grupo topológico, y K_1, K_2 son subgrupos de G compactos entonces $K_1 * K_2 \subset G$ es compacto.*

Demostración. Por definición $K_1 \cdot K_2$ es la imagen de la multiplicación del producto cartesiano $K_1 \times K_2$. El resultado sigue de que producto de compactos es compacto, y la imagen de un compacto por una función continua es compacto. $\square$

Proposición 6.5. *Si $(G, *)$ es un grupo topológico, y 1 es el elemento neutro, entonces la componente conexa de 1 es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Denotemos por $\mathscr{C}$ a la componente conexa de 1. Si $g, h \in \mathscr{C}$, sabemos que $m_g(\mathscr{C}) = g * \mathscr{C}$ es conexo y contiene a g (pues $1 \in \mathscr{C}$). Como $\mathscr{C} \cap g * \mathscr{C}$ es no vacío, $g * \mathscr{C} \subset \mathscr{C}$ (recordar que unión de conexos con un punto en común es conexo). Pero $g * h \in g * \mathscr{C}$, con lo cual $g * h \in \mathscr{C}$.

Para ver inversos, como invertir es una función continua, $\mathscr{C}^{-1}$ es conexo y contiene al 1, con lo cual $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{-1}$. Finalmente, si $g \in G$ cualquiera, el conjunto $g * \mathscr{C} * g^{-1}$ es un conjunto conexo que contiene al 1, con lo cual $g * \mathscr{C} * g^{-1} = \mathscr{C}$ y por ende $\mathscr{C}$ es un subgrupo normal. □

El siguiente resultado es un poco técnico, pero es fundamental en la demostración de varios resultados (y en la resolución de los ejercicios de la guía).

Lema 6.6. *Sea $(G, *)$ un grupo topológico, y U un abierto en G que contiene al neutro (llámemoslo 1). Entonces, existe $V \subset G$ abierto con las siguientes propiedades:*

- $1 \in V$,
- $V = V^{-1}$,
- $V * V \subset U$.

Demostración. La función $* : G \times G \to G$ es continua, con lo cual la preimagen de U es un conjunto abierto en $G \times G$. A la vez, como $(1, 1) \in *^{-1}(U)$, existen abiertos V_1, V_2 de G que contienen al 1 tales que $V_1 \times V_2 \subset *^{-1}(U)$.

Si definimos $V_3 = V_1 \cap V_2$, es un abierto no vacío que contiene al 1, y cumple que $V_3 * V_3 \subset U$. El conjunto $V = V_3 \cap (V_3)^{-1}$ (este último entendido como la imagen inversa de la función invertir en el grupo) es abierto y satisface todas las propiedades requeridas. □

Proposición 6.7. *Todo grupo topológico $(G, *)$ es Hausdorff.*

Demostración. Recordemos que le pedimos a un grupo topológico ser siempre T_1. Si $g, h \in G$ son distintos, en particular $1 \neq gh^{-1}$. Como son distintos, existe un abierto U tal que $1 \in U$ y $gh^{-1} \notin U$ (por ejemplo podemos tomar el complemento del punto cerrado gh^{-1}).

Apliquemos ahora el Lema 6.6 al abierto U. Existe entonces V abierto que contiene al 1 y satisface las propiedades anteriores. Miremos los abiertos $V*g$ y $V*h$. El primero contiene a g, y el segundo contiene a h. Si su intersección es no vacía, existen $u, v \in V$ tales que $ug = vh$, con lo cual $u^{-1}v = gh^{-1}$. Notemos que $u^{-1} \in V$, y el producto de cosas de V cae en U, con lo cual $gh^{-1} \in U$, lo que supusimos no vale. Luego ambos abiertos son disjuntos, y el espacio es Hausdorff. □

Teorema 6.8. *Si $(G, *)$ es un grupo topológico, y H es un subgrupo, entonces $\overline{H}$ también lo es.*

Demostración. Claramente $\overline{H}$ contiene al 1, con lo cual para ver que es un subgrupo, alcanza con verificar las siguientes dos propiedades:

1. Si $g, h \in \overline{H}$ entonces $g * h \in \overline{H}$.
2. Si $g \in \overline{H}$ entonces $g^{-1} \in \overline{H}$.

Veamos que es cerrado para el producto. Queremos ver que si $g, h \in \overline{H}$ entonces si U es un abierto que contiene a $g * h$, $U \cap H \neq \emptyset$.

El par $(g, h) \in *^{-1}(U)$ (pues su producto cae en U), con lo cual existen abiertos V, W de 1 tales que $g*V \times h*W \subset *^{-1}(U)$ (recordar que los abiertos son trasladados de abiertos del neutro). Como $g \in \overline{H}$, $g * V \cap H$ es no vacío, sea g_1 un elemento en dicha intersección. A la vez, $h * W \cap H \neq \emptyset$, sea h_1 en dicha intersección. Luego, como H es un subgrupo, $g_1 * h_1 \in H$, y a la vez, dicho producto está en U como queríamos ver.

Para ver los inversos, sea $g \in \overline{H}$, y U un abierto que contiene a g^{-1}. Queremos ver que $U \cap H \neq \emptyset$. Como invertir es continuo, U^{-1} es un abierto en G que contiene a g, con lo cual $U^{-1} \cap H \neq \emptyset$ (pues $g \in \overline{H}$). Tomemos un elemento h en dicha intersección. Como H es un subgrupo, $h^{-1} \in H$, y además está en U, con lo cual $U \cap H$ es no vacío, como queríamos ver. $\square$

Bibliografía

[DD92] Isabel Dotti and María Druetta. *Topología*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 1992. Serie C, N. 2/1992.

[Mun00] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition of [MR0464128].