1. Demostrar las siguientes congruencias, aclarando las propiedades que usa en cada paso:

(a) $4! \equiv 4\,(5)$ (b) $36^5 \equiv -1\,(37)$ (c) $6^n + 8 \equiv 4\,(5)$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. (a) Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin realizar la división. (Ayuda: $1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1$).

(b) Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que todo número de la forma $4^n - 1$ es divisible por 3.

4. (a) ¿Para cuáles valores de $n \in \mathbb{N}$ es $2^n + 1$ divisible por 3?

(b) ¿Para cuáles valores de $n \in \mathbb{N}$ es $10^n - 1$ divisible por 11?

5. Sean a, b, c números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisible por 3.

6. (a) Probar que el resto de dividir n^2 por 4 es igual a 0 si n es par y 1 si n es impar.

(b) Probar que si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros, entonces los catetos no pueden ser ambos impares.

7. Probar que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el número $n^2 + 4n + 6$ no es múltiplo de 5.

8. (a) Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.

(b) Decir por cuáles de los números 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11 son divisibles los números 12342, 5176, 314573 y 899.

9. Hallar los restos posibles en la división de n^{15} por 3.

10. Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número 7^{15}.

11. Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:

(a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$;

(b) $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$.

12. Hallar todos los x que satisfacen:

(a) $x^2 \equiv 1\ (4)$ (c) $x^2 \equiv 2\ (5)$ (e) $x^3 \equiv 1\ (7)$

(b) $x^2 \equiv x\ (12)$ (d) $x^2 \equiv 0\ (12)$ (f) $x^4 \equiv 1\ (5)$.

13. Sean m, n números enteros.

(a) Probar que $m^2 + n^2$ es múltiplo de 7 si y sólo si m y n son múltiplos de 7.

(b) Probar que $m^2 + 5n^2$ es múltiplo de 11 si y sólo si m y n son múltiplos de 11.

14. Sean a, b, $m \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ tales que $d \mid a$, $d \mid b$ y $d \mid m$. Probar que la ecuación $a \cdot x \equiv b\,(m)$ tiene solución si y sólo si tiene solución la ecuación

$$\frac{a}{d} \cdot x \equiv \frac{b}{d} \left(\frac{m}{d}\right).$$

15. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $2x \equiv -21 \ (8)$ (b) $2x \equiv -12 \ (7)$ (c) $3x \equiv 5 \ (4)$.

16. Resolver la ecuación $221x \equiv 85 \ (340)$. Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 340$.

17. Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es *inversible módulo* m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $th \equiv 1\,(\ m)$.

(a) ¿Es 5 inversible módulo 17?

(b) Probar que t es inversible módulo m si y sólo si $(t, m) = 1$.

(c) Determinar los inversibles módulo m, para $m = 11, 12, 16$.