Topología

PRÁCTICO N°4: GRUPOS TOPOLÓGICOS. COMPACTIFICACIÓN POR UN PUNTO.

1. Probar que todo grupo topológico es regular.

2. Sean G, H grupos topológicos y $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que f es continuo (respectivamente, abierto) si y sólo si f es continuo (respectivamente, abierto) en e.

3. Sean $f : G \to H$ un morfismo de grupos topológicos y $K = \ker f$. Probar que K es un subgrupo normal cerrado de G.

4. Sean G un grupo topológico compacto y U un entorno de e. Probar que existe un entorno V de e tal que $gVg^{-1} \subseteq U$ para todo $g \in G$.

Encontrar un grupo no compacto donde lo anterior no vale (*Ayuda:* Mirar a $G \subset M(2, \mathbb{R})$ el subgrupo de matrices triangulares superiores de determinante 1).

5. Sean G un grupo topológico con unidad e y $C(G)$ la componente conexa de e. Probar que $C(G)$ es un subgrupo normal cerrado. Probar además que para todo $g \in G$ la componente conexa de g es $gC(G) = C(G)g$.

6. Sea G un grupo conexo, U un entorno de e. Probar que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$.

7. Sea G un grupo topológico, $A, B \subseteq G$ dos subconjuntos. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Si A y B son conexos, entonces AB es conexo.
(b) Si A y B son compactos, entonces AB es compacto.
(c) Si A es compacto y B es cerrado, entonces AB es cerrado.
(d) Si A y B son cerrados, entonces AB es cerrado.

8. Probar que la imagen de un espacio localmente compacto por una función continua y abierta es localmente compacta. Mostrar que ésto deja de cumplirse si la función no es abierta.

9. (a) Probar que $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es (homeomorfo a) la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$.
(b) Probar que S^n es (homeomorfo a) la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$.

10. Sean X, Y espacios localmente compactos y T_2 y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Recordemos que f es **propia** si y sólo si la extensión de f a la función $f^+ : X^+ \longrightarrow Y^+$, con $f^+(\infty_X) = \infty_Y$, es continua.

Encontrar un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ (no propia) que no pueda extenderse a $f^+ : X^+ \longrightarrow Y^+$ como antes de modo continuo.

11. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Probar que todo subconjunto cerrado $C \subseteq X$ también es localmente compacto.

Ejercicios Extra

12. (a) Probar que la acción canónica de $SO(n+1)$ sobre S^n induce una acción de $SO(n+1)$ sobre $\mathbb{R}P^n$ (visto como cociente de S^n).

(b) Sea $\Phi : O(n) \to GL(n+1, \mathbb{R})$, $\Phi(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$. Probar que Φ es un morfismo de grupos topológicos inyectivo, y que $\Phi(O(n))$ es un subgrupo de $SO(n+1)$.