Topología

Práctico N°5: Topología producto.

1. Sea I un conjunto de índices. Escribimos $I = J \cup K$, donde J, K son no vacíos y disjuntos. Sean X_i, Y_i espacios topológicos.

(a) Probar que $\prod_{i\in I} X_i \simeq \left(\prod_{j\in J} X_j\right) \times \left(\prod_{k\in K} X_k\right)$.

(b) Si $X_i \simeq Y_i$ para todo $i \in I$, probar que $\prod_{i\in I} X_i \simeq \prod_{i\in I} Y_i$.

2. Probar que las proyecciones de un espacio producto $\prod_{i\in I} X_i$ sobre cualquiera de sus espacios coordenados son funciones abiertas.

3. Sean X_i, $i \in I$, espacios topológicos, y para cada $i \in I$, sea A_i un subconjunto de X_i.

(a) Probar que, si I es finito, $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ = \prod_{i\in I} A_i^\circ$.

(b) Probar que lo anterior puede no ser cierto si I es infinito.

(c) Estudiar las relaciones entre $\overline{\prod_{i\in I} A_i}$ y $\prod_{i\in I} \overline{A}_i$.

4. Sean X_1, X_2 dos espacios topológicos, y A_1, A_2 subconjuntos de X_1, X_2, respectivamente. Probar que

$$\mathrm{Fr}(A_1 \times A_2) = \left(\mathrm{Fr}(A_1) \times \overline{A}_2\right) \cup \left(\overline{A}_1 \times \mathrm{Fr}(A_2)\right).$$

5. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \times Y \to Z$ una función. Para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, definimos las funciones

$$f_x : Y \to Z,\ f_y : X \longrightarrow Z, \qquad f_x(y') := f(x, y'),\ f_y(x') := f(x', y).$$

(a) Probar que, si f es continua, entonces las funciones f_x y f_y son continuas, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$.

(b) Mostrar que la recíproca no vale.

6. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Probar que:

(a) $\prod_{i\in I} X_i$ es T_2 si y sólo si X_i es T_2 para todo i.

(b) Si $\prod_{i\in I} X_i$ es separable, entonces cada X_i es separable.

(c) Si I es numerable, entonces vale la recíproca del ítem (b).

(d) $\prod_{i\in I} X_i$ es N_1 (respectivamente, N_2) si y sólo si cada X_i es N_1 (respectivamente N_2) y todos, salvo una cantidad numerable, son indiscretos.

(e) $\prod_{i\in I} X_i$ es arco-conexo si y solo si cada X_i es arco-conexo.

7. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $a \in X = \prod_{i\in I} X_i$. Probar que el conjunto de elementos de X que difieren de a en un número finito de coordenadas es denso en X.

8. (a) Probar que $\mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. [1]

(b) Probar que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \{0\})$.

[1] Más aún, se puede probar que $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k \simeq S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

9. Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si una cantidad infinita de espacios coordenados son no compactos, entonces todo subconjunto compacto del producto tiene interior vacío.

(b) Si X es localmente compacto, entonces cada X_i es localmente compacto y todos, salvo una cantidad finita, son compactos.

10. Sean (X_i, d_i), $i = 1, \dots, n$ espacios métricos, $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Probar que las métricas

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), \qquad d_\infty(x,y) := \max\{d_i(x_i,y_i) | i = 1, \dots, n\}, \qquad x, y \in X,$$

inducen la topología producto en X.

Ejercicios Extra

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que la topología de X es la menos fina que hace que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sea continua.

12. Sean X, Y espacios topológicos, asumimos que Y es compacto. Probar que la proyección canónica $\pi : X \times Y \to X$ es cerrada.

13. Sean X, Y dos espacios topológicos, y A, B subconjuntos compactos de X e Y, respectivamente. Probar que si W es un entorno de $A \times B$ en $X \times Y$, entonces existen U y V abiertos en X e Y respectivamente tales que $A \times B \subset U \times V \subset W$.

14. Sea $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ con la topología producto de la usual de $\mathbb{R}$.

(a) Considerar $f \equiv 1$ y dar algunos entornos sub-básicos de f.

(b) Si $g = \cos(\pi x)$, dar 3 entornos de f que contengan a g y 3 entornos de f que no contengan a g.

(c) Mostrar que para todo entorno de f y para todo $N > 0$ hay una h en dicho entorno y un $x \in [0, 1]$ tal que $h(x) \geq N$.

(d) Mostrar que para todo entorno de f y para todo $N > 0$ hay una h en dicho entorno tal que $\int_0^1 h(x) \geq N$.

15. Sean (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$ espacios métricos, $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

(a) Probar que $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1 + d_n(x_n,y_n)}, \qquad x, y \in X,$$

es una métrica en X.

(b) Probar que la métrica d induce la topología producto en X.