Topología

Práctico N°6: Topología cociente.

1. Sean $I = [-1, 1]$, $X = I/\sim_1$, $Y = I/\sim_2$, donde $\sim_1$ está dada por la partición

$$\left\{\tfrac{1}{2}, 1\right\}, \quad \{x\} \; \left(x \neq \tfrac{1}{2}, 1\right),$$

y $\sim_2$ está dada por la partición

$$\left\{\tfrac{1}{2}, 1\right\}, \quad \left\{-\tfrac{1}{2}, -1\right\}, \quad \{x\} \; \left(x \neq \pm 1, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1\right).$$

Probar que X no es homeomorfo a Y.

2. En $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definimos $x \sim y$ si y sólo si $\|x\| = \|y\|$.

(a) Probar que la proyección canónica $p : X \to X/\sim$ es abierta y cerrada.
(b) Probar que $X/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

3. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\sim$ la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Probar que la topología cociente en $\mathbb{R}/\sim$ es la indiscreta y que la proyección canónica es abierta pero no es cerrada.

4. Sea $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) \in X : x \in \mathbb{R}\}$ y $\sim$ la relación de equivalencia asociada a la partición de X formada por A y los subconjuntos $\{(x, y)\}$ tales que $y \neq 0$.

(a) Probar que la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ es cerrada pero no abierta.
(b) Hallar una familia de entornos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la clase de equivalencia de A en $X/\sim$ tales que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{A\}$.
(c) Probar que $X/\sim$ no es N_1, y decidir si es T_2.
(d) Probar que para cada entero no negativo m la sucesión $\{(m, \frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ converge en el espacio cociente. Por otro lado, probar que si $\{N_n\}_n$ es una subsucesión de $\mathbb{N}$, entonces la sucesión $\left\{\left(n, \frac{1}{N_n+1}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ no converge a A.

5. Consideramos en $[0, 1]$ la partición cuyas clases de equivalencia son $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y los singuletes $\{x\}$ si $x \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sea $\theta : [0, 1] \to [0, 1]/\sim$ la correspondiente aplicación cociente.

(a) Probar que θ es abierta pero no cerrada.
(b) Probar que X no es T_2.
(c) Decidir si $[0, 1]/\sim$ es N_1, localmente conexo.

6. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X, y sea $p : X \longrightarrow X/\sim$ la proyección al cociente. Dado B un subconjunto de X llamamos *saturado de* B al conjunto $p^{-1}(p(B))$. Decimos que B es *saturado* si $B = p^{-1}(p(B))$.

(a) Probar que A es abierto en $X/\sim$ (resp. cerrado) si y sólo si $A = p(B)$ para algún B abierto (resp. cerrado) y saturado en X.
(b) Probar que p es abierta (resp. cerrada) si y sólo si los saturados de conjuntos abiertos (resp. cerrado) son abiertos (resp. cerrado).

7. Sean $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $\sim_i$ relaciones de equivalencia abiertas en X_i. Definimos en el espacio producto la relación de equivalencia $(x_i) \sim (y_i)$ si y sólo si $x_i \sim_i y_i$ para todo $i \in I$. Probar que $\left(\prod_i X_i\right)/\sim$ es homeomorfo a $\prod_i \left(X_i/\sim_i\right)$.

8. Probar que el toro n-dimensional es homeomorfo a $(S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

9. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si X es un espacio T_2 entonces $X/\sim$ es T_2.

b) Si $X/\sim$ es un espacio T_2 entonces X es T_2.

c) Si $X/\sim$ es conexo entonces X es conexo.

10. Si A es un subconjunto de X y $\sim$ es una relación de equivalencia de X tal que toda clase de equivalencia corta a A. Probar que la inclusión de A en X induce un homeomorfismo de $A/\sim$ en $X/\sim$ si el saturado en X de todo abierto (cerrado) de A es abierto (cerrado) en X.

11. Sea X un espacio topológico, y $\sim$ una relación de equivalencia en X.

(a) Probar que si X es localmente conexo entonces $X/\sim$ es localmente conexo.

(b) Supongamos que la clase de equivalencia de cada punto es un conexo de X y que el cociente $X/\sim$ es conexo. Probar que X es conexo.

12. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un espacio topológico X tal que la proyección $p : X \to X/\sim$ es cerrada y las clases de equivalencias son compactas. Probar que si X es T_2 (respectivamente, N_2) entonces $X/\sim$ es T_2 (respectivamente, N_2).

13. Sean $f : G \to H$ un morfismo suryectivo de grupos topológicos y $K = \ker f$. Probar que, si G es compacto, entonces H es isomorfo a G/K.

Ejercicios Extra

14. (a) En S^n, $n \geq 2$, consideramos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x = \pm y$. Probar que $S^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.

(b) En $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ se identifican los puntos antipodales del borde de S^{n-1} (es decir, identificamos x con $-x$, para cada x tal que $|x| = 1$). Probar que $B^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.

(c) Sea M es la cinta de Möbius y $\theta : I^2 \longrightarrow M$ la aplicación canónica. Probar que $\theta(I \times \{0\} \cup I \times \{1\})$ es homeomorfo a S^1.

(d) Probar que el proyectivo complejo n-dimensional, $\mathbb{C}P^n$ es homeomorfo al cociente de S^{2n+1} por la relación de equivalencia: $x \sim y$ sii existe $\lambda \in S^1$ tal que $x = \lambda y$ (aquí estamos identificando $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$).

15. En un espacio topológico X se definen el *cono* de X y la *suspensión* de X respectivamente por

$$\mathrm{C}\,X := \left(X \times [0,1]\right)/\sim_1, \qquad \mathrm{S}\,X := \left(X \times [-1,1]\right)/\sim_2,$$

donde $\sim_1$ es la relación de equivalencia que identifica $(x,1)$ con $(x',1)$ y $\sim_2$ identifica $(x,1)$ con $(x',1)$ y $(x,-1)$ con $(x',-1)$ para todo par de puntos $x, x' \in X$.

Probar que $\mathrm{S}\, S^n$ es homeomorfa a S^{n+1} y $\mathrm{C}\, S^n$ es homeomorfo a D^{n+1}.

16. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. Probar que:

(a) f induce una función continua $\widetilde{f} : P\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$;

(b) más aún, $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo de $P\mathbb{R}^2$ con su imagen.

17. (a) Probar que la acción canónica de $SO(n+1)$ sobre S^n induce una acción de $SO(n+1)$ sobre $\mathbb{R}P^n$ (visto como cociente de S^n).

(b) Sea $\Phi : O(n) \to SO(n+1)$, $\Phi(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$. Identificamos a $O(n)$ como subgrupo de $SO(n+1)$ vía Φ. Probar que $\mathbb{R}P^n \simeq SO(n+1)/O(n)$.

(c) Ahora identificamos a $SO(n)$ como subgrupo de $SO(n+1)$ vía Φ. Probar que $\mathrm{SO}(n)/SO(n-1)$ es homeomorfo a S^{n-1}.

(d) Deducir que $\mathrm{SO}(n)$ es conexo, por inducción en n.

(e) Concluir que $\mathrm{O}(n)$ tiene dos componentes conexas.

18. Probar que $SL(2,\mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z > 0\}$. Probar además que el grupo de isotropía de i es $SO(2)$, y por lo tanto $\mathcal{U} \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$.