1. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números. Indicar en qué casos los números son coprimos entre sí.

(a) 8 y 23 (b) -11 y -15 (c) 606 y -108. (d) -725 y 441.

2. Si $a \in \mathbb{Z}$, determine los posibles valores de:

(a) $(a, a+1)$, (b) $(a-1, a+1)$, (c) $(4a, 2a+3)$.

3. Probar que si a, b son enteros coprimos entonces $(a+b, a-b) = 1$ ó 2.

4. Sea n un entero no negativo. Probar que:

(a) $(7^n + 2^n, 7^n - 2^n) = 1$. (b) $(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9.

5. Probar que si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a+b, 4) = 4$.

6. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n+1$ y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.

7. Probar:

(a) $(a, b) = 1$, $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.

(b) $(a, b) = 1$ y $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.

8. Determinar todos los números primos positivos menores que 100.

9. Sea p un número natural tal que p, $p+2$ y $p+4$ son primos impares, entonces $p = 3$. Es decir, $3, 5, 7$ es la única terna de números positivos impares consecutivos que son primos.

10. Sea p primo positivo. Probar que $(p, (p-1)!) = 1$.

11. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, existe un número primo p tal que $n < p < n!$
Ayuda: pensar en cuáles primos dividen a $n! - 1$.

12. Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.

13. Sean a y b números naturales y coprimos. Probar que $a \cdot b$ es un cuadrado si y solo si a y b son cuadrados.

14. Si $(a, b) = p$ con p un número primo, hallar los posibles valores para

(a) (a^2, b) (b) (a^3, b) (c) (a^2, b^3)

15. Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que $m^2 = 6n^2$. Deducir que $\sqrt{6}$ es irracional.

16. Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que $m^3 = 47n^3$.

17. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$.

18. (a) Calcular la cantidad de divisores positivos que tiene el número $19^3 47^{11} 79^6$.

(b) Deducir una fórmula para calcular la cantidad de divisores positivos del número $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son primos distintos y $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$.

(c) Hallar el menor número natural que tiene exactamente 10 divisores positivos.

19. Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

(a) 12 y 15.

(b) 11 y 13.

(c) 140 y 150.

(d) $3^2 \cdot 5^2$ y $2^2 \cdot 11$.

(e) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 5 \cdot 7$.

20. Completar y demostrar:

(a) Si $a \in \mathbb{Z}$ no nulo, entonces $[a, a] = \ldots$

(b) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $[a, b] = b$ si y sólo si ...

(c) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si ...

21. Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ son no nulos, entonces $(a + b, [a, b]) = (a, b)$. En particular, si dos números son coprimos, también lo son su suma y su producto.

22. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $28|n$ y $45|n$, entonces $n > 1000$.

(b) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $n^2 = 24m^3$.

(c) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $2n^2 = 3m^2$.

(d) 439 es un número primo.

(e) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $(n^2 - 1, n^3) = 1$.

(f) Si $n \in \mathbb{N}$ tiene una cantidad impar de divisores positivos entonces n es un cuadrado.

Ejercicios adicionales

23. Probar que $p \mid \binom{p}{k}$ para todo primo positivo p y $k = 1, 2, \ldots, p - 1$.

24. Probar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos no es un cuadrado.
Ayuda: usar el Teorema Fundamental de la Aritmética.

25. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si r es el resto de la división de n por m, entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$.

(b) Probar que $(a^n - 1,\ a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

26. (a) ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide a 100!?

(b) ¿En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 100!?

27. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 5$.

(a) Calcular los posibles valores de $(ab, 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $(a^{n-1}b,\ a^n + b^n)$.