Práctico 9 — Grafos

Álgebra I
2020, FaMAF - UNC

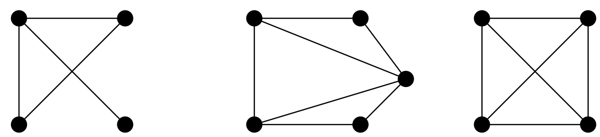
1. Probar que si G es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con la misma valencia.

2. ¿Cuántas aristas tiene un grafo que tiene cuatro vértices de valencia 3, dos vértices de valencia 5, dos de valencia 6 y uno de valencia 8?

3. (a) Sea G un grafo tal que todos sus vértices tienen valencia 21. Probar que el número de aristas es un múltiplo de 21.

(b) ¿Qué hay de particular acerca del número 21? ¿Valdría el ejercicio si se pusiera 15, 17 o 101 en vez de 21? Y si se pusiera 22, ¿qué se podría decir?

4. Sea $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un grafo. El complemento $\overline{G}$ de G es el grafo que tiene los mismos vértices de G y cuyas aristas unen los pares de vértices que no son aristas de G. Hallar el complemento de los siguientes grafos:



5. Si G es un grafo con n vértices y a aristas, calcule la cantidad de aristas de $\overline{G}$ en términos de n y a. Si $\delta(v)$ es la valencia o grado de un vértice de un grafo G de n vértices, calcular la valencia $\overline{\delta}(v)$ de v en $\overline{G}$ en términos de n y $\delta(v)$.

6. Encontrar todos los grafos de 5 vértices y 2 lados, no isomorfos entre sí.

7. Encontrar todos los grafos con cuatro vértices o menos, no isomorfos entre sí. *Ayuda:* Hay uno de 1 vértice, dos con 2, cuatro con 3 y once con 4 vértices.

8. Sean $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ y $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{A}')$ dos grafos isomorfos y sea α un isomorfismo entre ellos. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $|\mathcal{V}| = |\mathcal{V}'|$ y $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}'|$,

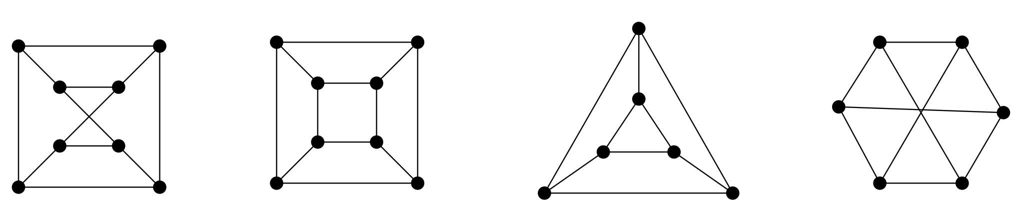
(b) $\delta(v) = \delta(\alpha(v))$, para todo $v \in \mathcal{V}$.

9. Sean $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ y $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{A}')$ dos grafos y sea $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una función biyectiva tal que $\delta(v) = \delta(\alpha(v))$, para todo $v \in \mathcal{V}$.

(a) ¿Se puede afirmar que α es un isomorfismo?

(b) ¿Se puede afirmarlo si $|\mathcal{V}| = 3$ o $|\mathcal{V}| = 4$?

10. Probar que los siguientes grafos no son isomorfos entre sí.



11. Denotamos con C_n al grafo *cíclico* de n vértices $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ con aristas $\mathcal{A} = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}$.

(a) Probar que C_5 es isomorfo a $\overline{C_5}$.

(b) Probar que si $n \neq 5$, entonces C_n no es isomorfo a $\overline{C_n}$.

12. Puesto que, de acuerdo con el ejercicio 7, hay 11 grafos no isomorfos con cuatro vértices, se deduce que debe haber un grafo con 4 vértices isomorfo a su complemento. ¿Cuál es dicho grafo?

13. Sea $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un grafo, y sea $n = |\mathcal{V}|$.

(a) Probar que si $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{A}_1)$ es una componente conexa de G tal que $|\mathcal{V}_1| = k$, con $1 < k < n$, entonces $|\mathcal{A}| \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}$.

(b) Probar que si $1 < k < n$, entonces $\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} \leq \binom{n-1}{2}$.

(c) Probar que si $|\mathcal{A}| > \binom{n-1}{2}$, entonces G es un grafo conexo.

14. Probar que ningún grafo completo (salvo K_2) tiene una caminata euleriana abierta (es decir, que no es un circuito euleriano). ¿Cuáles grafos completos tienen un circuito euleriano?

15. (a) Probar que si G es un grafo en el que cada vértice tiene grado mayor que 1, entonces G tiene un ciclo.

(b) El ítem anterior afirma que si T es un árbol, entonces existe al menos un vértice de grado 1 (llamado una *hoja* del árbol). Más aún, probar que si $T = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ es un árbol y $|\mathcal{V}| \geq 2$, entonces existen al menos dos hojas.

16. Sea $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un grafo con $|\mathcal{V}| = n$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) G es un árbol.

(b) G es conexo, y cualquiera sea $a \in \mathcal{A}$, $G' = (\mathcal{V}, \mathcal{A} - \{a\})$ no es conexo.

(c) G es acíclico y si se le agrega una arista deja de serlo.

(d) G es acíclico y tiene $n - 1$ aristas.

(e) G es conexo y tiene $n - 1$ aristas.

17. Probar que si $G = (T, A)$ es un bosque con c componentes conexas, entonces $|\mathcal{A}| = |\mathcal{V}| - c$.

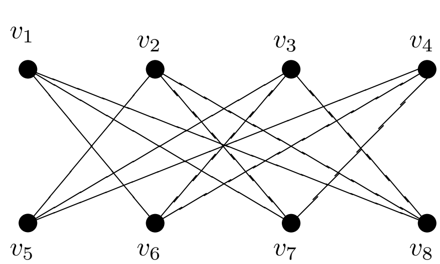
18. (a) Aplique el algoritmo greedy al grafo G_1 usando los siguientes órdenes en los vértices:

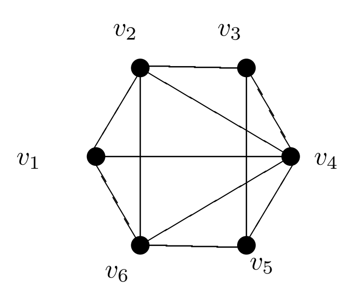
(a) v_1, v_5, v_2, v_6, v_3, v_7, v_4, v_8,

(b) v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8.

(b) Para el grafo G_2 encontrar un orden de los vértices tal que el algoritmo greedy dé una coloración con 4 colores.

G_1





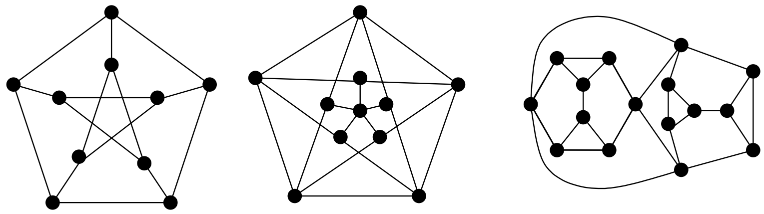
G_2

19. Encuentre los números cromáticos de los siguientes grafos:

(a) K_n, (grafo completo de n vértices).

(b) C_n, (ciclo de n vértices).

(c) Los siguientes tres grafos:



20. Probar que para todo grafo se puede encontrar un orden de los vértices tal que el algoritmo greedy requiera una cantidad de colores igual al número cromático del grafo.

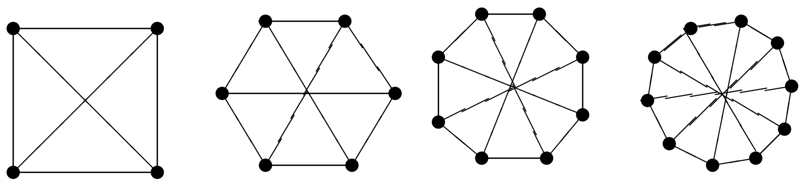
21. Probar que para todo grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ se cumple que $|\mathcal{A}| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

22. Para $r \geq 2$, el grafo M_r se obtiene del grafo C_{2r} agregando las aristas que unen vértices "opuestos", es decir las aristas $\{v_i, v_{r+i}\}$, para $1 \leq i \leq r$. Probar que:

(a) si r es impar, entonces M_r es bipartito,

(b) si r es par y $r > 2$, entonces $\chi(M_r) = 3$, y que

(c) $\chi(M_2) = 4$.



M_2 M_3 M_4 M_5

23. Probar que si G es un grafo bipartito con una cantidad impar de vértices, entonces G no tiene ciclos hamiltonianos.

24. ¿Tiene el siguiente grafo un ciclo hamiltoniano?