Topología

Práctico N°7: Homotopía. Grupo fundamental. Cubrimientos.

1. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Mostrar que dos caminos en X con los mismos extremos son homotópicos.

2. Sea $A \subset X$ y sea $r : X \to A$ una retracción (es decir, $r(a) = a$ para cada $a \in A$). Dado $a_0 \in A$, probar que $r_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$ es suryectiva.

En el siguiente ejercicio, $\mathbb{R}^+$ denota a los reales positivos.

3. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios:

(a) El cilindro $S^1 \times [0, 1]$.
(b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$ (idem con > 1 y con < 1).
(c) $S^1 \cup (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$.
(d) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$
(e) El espacio $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, menos una cantidad finita de puntos.

4. (a) ¿Es $S^2 \times S^3$ homeomorfo a $S^1 \times S^4$?
(b) Sea $n > 2$. Probar que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Definimos $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$. Calcular $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$.

6. Sean X e Y espacios topológicos y sean p y q puntos de Y. Probar que las funciones constantes $f(x) = p$ y $g(x) = q$ son homotópicas si y sólo si p y q están en una misma componente arcoconexa de Y.

7. Dados dos espacios X e Y, sea $[X, Y]$ el conjunto de las clases de homotopías de aplicaciones de X en Y. Un espacio X se dice *contráctil* si la aplicación identidad $i_X : X \to X$ es homotópica a una aplicación constante.

(a) Mostrar que $I = [0, 1]$ y $\mathbb{R}$ son contráctiles.
(b) Probar que el *peine infinito*:
$$X := \big(\big(\{0\} \cup \{1/n \ : n \in \mathbb{N}\}\big) \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times \{0\}\big)$$
es contráctil.
(c) Mostrar que un espacio contráctil es arco-conexo.
(d) Mostrar que si Y es contráctil, $[X, Y]$ tiene un solo elemento para cualquier X.
(e) Mostrar que si X es contráctil e Y es arco-conexo, $[X, Y]$ tiene un solo elemento.

8. Sean $p_0 \in S^n$, Y un espacio topológico y $f : S^n \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es homotópica a una constante.
(b) Existe $\widetilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow Y$ continua tal que $\widetilde{f}_{|S^n} = f$.

Sugerencia: $(a) \Rightarrow (b)$ Si $F(x,t)$ es la homotopía entre f y $c(x) = y_0$, entonces

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} y_0 & 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ F(\frac{x}{\|x\|}, 2 - \|x\|) & \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1, \end{cases} \qquad \text{extiende a } f.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Si $\widetilde{f}$ es una extensión de f entonces $F(x,t) = \widetilde{f}((1-t)x + tp_0)$ es una homotopía con una constante.

9. Probar el *Teorema de Brower:* Toda $f : D^2 \longrightarrow D^2$ continua tiene un punto fijo.

Sugerencia: Suponer que existe $f : D^2 \longrightarrow D^2$ tal que $f(x) \neq x$, para todo $x \in D^2$. Entonces la intersección de la recta $tx + (1-t)f(x)$, $t \in [0, \infty)$, con S^1 da una retracción de D^2 a S^1. Por otro lado, probar que S^1 no es retracto de D^2.

10. Probar el *Teorema de Borsuk-Ulam*: Para toda función continua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

11. Mostrar que si A es un retracto de $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 1\}$, entonces toda $f : A \to A$ continua tiene un punto fijo.

12. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubrimiento, X conexo.

(a) Probar que $p^{-1}(x)$ tiene el mismo cardinal para todo $x \in X$.
(b) Si $\widetilde{X}$ es compacto y Hausdorff, probar que $p^{-1}(x)$ es finito para todo $x \in X$.

Ejercicios Extra

13. (opcional) Utilizar el *Teorema de van Kampen* para calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios:

(a) La unión de dos copias de S^1 que tienen un punto en común.
(b) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ (comparar con el Ejercicio 3 (c)).
(c) El plano $\mathbb{R}^2$ menos una cantidad finita de puntos.
(d) La esfera S^2 menos una cantidad finita de puntos.
(e) El espacio $\mathbb{R}^3$ menos una cantidad finita de rectas que pasan por el origen.
(f) El toro sin un punto.
(g) El espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$.
(h) La unión de dos copias de S^2 que tienen un punto en común.
(i) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por las aristas de un cubo.

14. Mostrar que si A es una matriz no singular de $n \times n$ con entradas no negativas, entonces A tiene autovalores reales positivos.

Sugerencia: Usar el Ejercicio 11, buscando un retracto de B_n adecuado y considerar $x \mapsto Ax/\|Ax\|$.

15. Hallar el cubrimiento universal de $\mathbb{R}P^n$.

16. (a) Sean G un grupo topológico y α, β curvas cerradas en G tales que $\alpha(0) = \alpha(1) = e = \beta(0) = \beta(1)$. Definimos $\alpha * \beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$ (producto en G). Probar que $\alpha * \beta \simeq \alpha.\beta$.

(b) Deducir que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

17. Sean G un grupo topológico conexo y localmente arco-conexo, e su unidad, $m : G \times G \to G$ la multiplicación, $I : G \to G$ tal que $I(g) = g^{-1}$.

Sea $p : \widetilde{G} \to G$ un cubrimiento, donde $\widetilde{G}$ es conexo, y $\widetilde{e} \in p^{-1}(e)$. Probar que existe una única estructura de grupo topológico en $\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{e}$ es su unidad y p es morfismo de grupos. Para ello, probar las siguientes afirmaciones:

(a) Mostrar que existen funciones $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G}$ e $\widetilde{I} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, únicas tales que

$$\widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}, \qquad \widetilde{I}(\widetilde{e}) = \widetilde{e}, \qquad p \circ \widetilde{m} = m \circ (p \times p), \qquad p \circ \widetilde{I} = I \circ p.$$

(b) Probar que las funciones $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dadas por $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{g}, \widetilde{e})$ y $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{g})$ coinciden con la función identidad de $\widetilde{G}$ (utilizar la unicidad de levantamientos).

(c) Probar que las funciones $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dadas por $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{g}, \widetilde{I}(\widetilde{g}))$ y $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{I}(\widetilde{g}), \widetilde{g})$ coinciden con la función constante $\widetilde{e}$.

(d) Probar que las siguientes funciones $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ coinciden:

$$(g, h, k) \mapsto \widetilde{m}(g, \widetilde{m}(h, k)), \qquad (g, h, k) \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{m}(g, h), k).$$

18. Sean G, $\widetilde{G}$ grupos topológicos, donde $\widetilde{G}$ es arco-conexo, y $p : \widetilde{G} \to G$ un cubrimiento, que es morfismo de grupos. Probar que existe un isomorfismo natural $p^{-1}(e) \sim \pi_1(G)/\pi_1(\widetilde{G})$, donde identificamos $\pi_1(\widetilde{G}) \simeq p_*(\pi_1(\widetilde{G}))$.