Una $G_2$-estructura en una variedad diferenciable de dimensión 7 es una 3-forma diferenciable $\varphi$ que cumple cierta condición de positividad, y por lo tanto induce una métrica riemanniana y una forma de volumen en la variedad. Cuando la $G_2$-estructura es libre de torsión (o equivalentemente paralela respecto de la conexión de Levi-Civita inducida por la métrica), la holonomía de la variedad riemanniana queda contenida en $G_2$, el grupo de Lie simple excepcional dado en la clasificación de Berger.

Tener condiciones topológicas suficientes para que una variedad admita una métrica con holonomía en $G_2$ es un problema abierto. Existen en la literatura muchos enfoques para probar la existencia de $G_2$-estructuras paralelas. Lo interesante es que todos estos enfoques parten de una $G_2$-estructura cerrada ($d\varphi = 0$) con el fin de construir una paralela. El método más reciente, introducido por Bryant, consiste en considerar la solución al llamado flujo laplaciano:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta\varphi(t),$$

partiendo de una $\varphi$ cerrada. Es natural entonces preguntarse cuáles son las $G_2$-estructuras cerradas más lindas, en algún sentido, para luego evolucionar a través del flujo laplaciano.

Cuando $\varphi$ es cerrada, la única componente de torsión que sobrevive es la 2-forma $\tau := -*d*\varphi \in \Omega^2_{14}M$ y se dice que $\varphi$ es Extremally Ricci Pinched (ERP), si se da la siguiente igualdad para la forma de torsión $\tau$,

$$d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6}*(\tau\wedge\tau).$$

Las estructuras ERP fueron introducidas por Bryant y en el caso compacto juegan un rol importante porque son, en algún sentido, lo más cerca que puede llegar la métrica a ser Einstein. Previo a este trabajo había solo dos ejemplos conocidos de $G_2$-estructuras ERP, uno dado por Bryant y el otro por Lauret, ambos homogéneos. Por otro lado, Fino y Raffero probaron que si se parte de una estructura ERP, la solución al flujo laplaciano se mantiene ERP.

En esta tesis estudiamos grupos de Lie con una $G_2$-estructura ERP invariante a izquierda. En primera instancia probamos fuertes condiciones necesarias de estructura que se deben cumplir en el álgebra de Lie para la existencia de estructuras ERP. Usando esos resultados obtuvimos luego una clasificación completa de $G_2$-estructuras ERP invariantes a izquierda en grupos de Lie, salvo equivalencia y multiplicación por escalar. La clasificación consiste de exactamente cinco estructuras, todas definidas en respectivos cinco grupos de Lie completamente solubles no isomorfos dos a dos. La 3-forma resulta exacta en todos los casos excepto en el único caso donde el grupo de Lie involucrado es unimodular. Por otro lado, calculamos ciertos subgrupos de simetrías de cada estructura ERP obtenida, como así también los números de Betti y el grado de nilpotencia del nilradical de cada álgebra de Lie involucrada.

Por último, fijamos una $G_2$-estructura invariante a izquierda $\varphi$ (no necesariamente cerrada) en un grupo de Lie con corchete de Lie determinado por una matriz real $2 \times 2$ y tres matrices reales $4 \times 4$. Probamos varias fórmulas que pueden ser útiles para $\varphi$, como por ejemplo el laplaciano de Hogde y las formas de torsión de $\varphi$. Más aún, aplicamos estas fórmulas para obtener una nueva familia de ejemplos de solitones de Laplace de contracción, es decir $G_2$-estructuras que satisfacen la ecuación,

$$d\tau = \lambda\varphi + \mathcal{L}_X\varphi,$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ negativo y $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo. Estas estructuras son de particular interés porque producen soluciones autosimilares al flujo laplaciano con una singularidad en tiempo finito, de las cuales se conocía solo un ejemplo en la literatura.