PARCIAL 1

1. Sea X un espacio topológico. Demostrar que X es Hausdorff si y sólo si el conjunto diagonal $\Delta = \{(x,x) : \; x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.

2. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

   a) Probar que el conjunto $\{x \in X : \; f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

   b) Sea $h : X \to \mathbb{R}$ la función $h(x) = \min\{f(x), \, g(x)\}$. Demostrar que h es continua.

3. Sea X un espacio topológico T_2. Decimos que $A \subset X$ es un *retracto de* X si existe una función continua $r : X \longrightarrow A$ tal que la restricción de r a A es la identidad de A.

   Probar que A es cerrado en X (se puede asumir que X es N_1, aunque no es preciso).

4. *a*) Sea X un espacio métrico, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos compactos tal que $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y U un abierto de X tal que $U \cap (\cap_n C_n) = \emptyset$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap C_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

   b) Consideramos un espacio métrico compacto X y una familia de subconjuntos conexos cerrados $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $C_{n+1} \subseteq C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es conexo.

   c) Hallar una familia de subconjuntos conexos cerrados $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$, tal que $C_{n+1} \subseteq C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ no es conexo.

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   a) Sea (X, τ) un espacio topológico tal que toda función $f : X \longrightarrow X$ es continua. Entonces τ es la topología discreta o la indiscreta/trivial.

   b) Si $f : X \to Y$ es una función continua y abierta entonces es cerrada.

   c) Todo espacio compacto localmente conexo tiene un número finito de componentes conexas.

   d) Todo espacio métrico es separable.

Segundo Parcial

1. En $\mathbb{R}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim y$ si y sólo si una de las siguientes 3 condiciones se verifica: o bien $x, y \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, o bien $x, y \in [2,3]$, o bien $x = y \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup [2,3]$.

   a) Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ la proyección al cociente. Decidir si p es cerrada o abierta.

   b) Decidir si $\mathbb{R}/\sim$ es compacto, Hausdorff.

2. Sea G un grupo topológico Hausdorff y $H < G$ un subgrupo discreto (o sea la topología de G restringida a H es la topología discreta). Probar que existe un abierto U de G que contiene al neutro para el cual los trasladados $L_h(U)$ por elementos $h \in H$ son disjuntos, o sea $L_h(U) \cap L_{h'}(U) = \emptyset$ si h, h' son elementos de H distintos.

3. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacio topológicos, y $X = \prod_{i\in I} X_i$, con la topología producto. Para cada $i \in I$ sean $x_i \in X_i$, y C_i su componente conexa. Probar que la componente conexa de $x = (x_i)_{i\in I}$ en X es $C := \prod_{i\in I} C_i$.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   a) Si $\pi : X \to Y$ es una función cociente y X es Hausdorff entonces Y es Hausdorff.

   b) Todo subgrupo discreto de S^1 es finito.

   c) La bola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ tiene el mismo tipo homotópico que $\mathbb{R}^3$.

   d) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos localmente conexos entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es localmente conexo.

Justificar debidamente todas las respuestas!