Resumen Tesis Doctoral Andrea Gallo

Sea M una variedad diferenciable y sea G un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre M. Si K denota el subgrupo de isotropía de M, entonces M es difeomorfa a G/K, y la acción de G induce una nueva acción sobre $L^2(G/K)$ dada por

$$\rho(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x),\ g \in G,\ x \in G/K,$$

llamada usualmente la representación regular a izquierda. Notemos que M admite una medida G-invariante y por lo tanto la acción en $L^2(G/K)$ es unitaria.

Una pregunta natural es cómo se descompone esta acción como suma o integral directa de representaciones irreducibles de la forma

$$L^2(G/K) = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\lambda H_\lambda \ d\mu(\lambda),$$

donde $\widehat{G}$ denota el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles unitarias de G, $d\mu$ es una medida boreliana sobre $\widehat{G}$ y m_λ es la multiplicidad de H_λ en $L^2(G/K)$. Más aún, nos preguntamos bajo qué condiciones la descomposición es libre de multiplicidad, esto es $m_\lambda = 1$ pp$\mu(\lambda)$. La noción de que (G, K) sea un par de Gelfand está intimamente relacionada con el hecho de que la descomposición de $L^2(G/K)$ en representaciones irreducibles sea libre de multiplicidad.

En esta tesis estudiaremos ejemplos de pares de Gelfand obteniendo la correspondiente descomposición de $L^2(G/K)$. Luego profundizaremos en la teoría de pares de Gelfand generalizados, estudiando particularmente ciertos ejemplos.

Más precisamente, por un lado consideraremos una familia de pares de Gelfand $(K \ltimes N, N)$ (ó abreviadamente (K, N)) donde N es un grupo de Lie 2-pasos nilpotente y K es el grupo de automorfismos ortogonales de N. Descompondremos la acción regular de $K \ltimes N$ sobre $L^2(N)$ buscando la medida de Plancherel y describiremos el conjunto de funciones esféricas genéricas. En el caso del grupo de Heisenberg H_n, obtendremos la descomposición de $L^2(H_n)$ bajo la acción de $K \ltimes H_n$ para todo $K \subseteq U(n)$ tal que (K, H_n) es un par de Gelfand.

Por otro lado introducimos la noción de par de Gelfand generalizado (G, K) donde K no es un grupo necesariamente compacto y desarrollamos la teoría correspondiente, la cual es análoga al caso donde (G, K) par de Gelfand clásico. Un resultado central garantiza que, si (K, N) es un par de Gelfand con N grupo de Lie nilpotente y K subgrupo de $Aut(N)$, entonces N es, a lo sumo, 2-pasos nilpotente. Buscaremos ejemplos de pares de Gelfand generalizados (K, N) en los cuales N sea 3-pasos nilpotente.