Práctico 1
Matemática Discreta I – Año 2020 – 2C
FAMAF

1. Propiedades de los números enteros

Asumimos que existe un conjunto de objetos llamados **números enteros** (denotado $\mathbb{Z}$) los cuales satisfacen ciertas propiedades o **axiomas** (asociatividad, conmutatividad, existencia de neutro, etc). En los siguientes ejercicios probaremos algunas propiedades básicas de estos números, recuerda justificar cada paso citando el axioma necesario.

1. Dados a, b y c números enteros, demostrar las siguientes afirmaciones:
   a) $a = -(-a)$
   b) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$
   c) $a + a = a$ implica que $a = 0$.
   d) $(a + b)c = ac + bc$.

2. Podemos dotar a los enteros de una relación que denotamos $<$ y que satisface cuatro axiomas (transitividad, tricotomía y compatibilidad con las operaciones aritméticas). Dados a, b y c números enteros, probar:
   a) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$
   b) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$

3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ diremos que $a \leq b$ si $a < b$ o $a = b$. Probar que se satisfacen las siguientes propiedades:
   a) (reflexividad) $a \leq a$.
   b) (antisimetría) $a \leq b$ y $b \leq a \implies a = b$.
   c) (transitividad) $a \leq b$ y $b \leq c \implies a \leq c$.
   Una relación que satisface estas tres propiedades se dice una **relación de orden**.

4. Usando los axiomas y la definición de "$\leq$", dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, probar:
   a) Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.
   b) Si $a \leq b$ entonces $-b \leq -a$.
   c) Si $a \leq b$ y $0 \leq c$ entonces $ac \leq bc$.
   d) Si $a \leq b$ y $c \leq 0$ entonces $bc \leq ac$.

5. Teniendo en cuenta las propiedades probadas anteriormente, demostrar las siguientes afirmaciones.
   a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.
   b) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
   c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.
   d) Si $a + c < b + c$ entonces $a < b$.

6. Recordando las **definiciones recursivas** de los símbolos de **sumatoria** y **productoria**, calcular las siguientes expresiones:

   a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} 2r$ *b*) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5}(i+1)$ *c*) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ *d*) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

7. A partir de la definición recursiva de la ***n*-ésima potencia**, calcular:

   a) $2^{10} - 2^9$ *b*) $3^2 2^5 - 3^5 2^2$ *c*) $(2^{2^{17}} + 1)(2^{2^{17}} - 1)$

2. Demostraciones por inducción

Contamos con una técnica que nos permite probar afirmaciones que valen para todo número natural: el **Principio de inducción**. Recordamos que para aplicarlo correctamente lo hacemos en dos instancias: probamos primero el **caso base** y luego el **paso inductivo**, es decir, suponemos que la propiedad es válida para un natural k y probamos que es válida también para $k + 1$. Los siguientes ejercicios se pueden resolver aplicando este principio.

7. Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:

   a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ *b*) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ *c*) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

8. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones. Recuerda que si resulta verdadera debes <u>demostrarlo</u> y si es falsa basta con dar un <u>contraejemplo</u>.
   a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, n, $k \in \mathbb{N}$.
   b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   c) $2^{7+n} = 2^7 + 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

10. Demostrar por inducción las siguientes igualdades:
    a) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
    b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.
    c) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.
    d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.
    e) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$.
    f) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.
    g) $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.
    h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
    i) $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

11. Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:
    a) $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.
    b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2^n$.
    c) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
    d) Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.
    e) Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $\forall i\, 0 < a_i < 1$, entonces $(1-a_1)\cdots(1-a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

12. Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11 \cdot n + 3$.

13. Sea $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^n + 1$.

14. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue:

$$u_1 = 9,\ u_2 = 33,\ u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por:

$$u_1 = 2,\ u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \quad \forall n > 1.$$

  a) Calcular u_2 y u_3.

  b) Proponer una fórmula para el término general u_n y probarla por inducción.

16. En el siguiente ejercicio "demostraremos" dos afirmaciones falsas utilizando incorrectamente el principio de inducción. Hallar el error en el argumento.

  a) Demostraremos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
  Supongamos que $5k + 3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k + 3 = 5p$. Probemos que $5(k + 1) + 3$ es múltiplo de 5: Como

$$5(k + 1) + 3 = (5k + 5) + 3 = (5k + 3) + 5 = 5p + 5 = 5(p + 1),$$

  entonces obtenemos que $5(k + 1) + 3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

  b) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo n, $a^n = 1$.
  Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces $a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1$. Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.