Geometría Diferencial
Período 2020-II
Práctico 1

Curvas suaves

Ej. 1 Sean $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables. Hallar $\frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle$ en términos de u, v y sus derivadas.

Ej. 2 Escribir una curva que parametrice la circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio 3.

Ej. 3 ¿Qué se puede decir de una curva α tal que $\alpha''(t) = 0$ para todo t? Hallar una curva α cuya imagen sea una recta, pero tal que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo t.

Ej. 4 Mostrar que la curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$ es suave pero no es regular, y ver que su imagen tiene una *esquina*. ¿Cómo se detecta una esquina? (Dar una definición razonable.)

Ej. 5 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva que no pasa por el origen y sea $t_o \in (a, b)$. Probar que si $\alpha(t_0)$ es el punto más cercano al origen, entonces el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal al vector $\alpha'(t_0)$.

Ej. 6 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t. Probar que $\|\alpha(t)\|$ es constante (es decir, que el gráfico $\alpha(t)$ está contenido en una esfera de centro cero) si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo t.

Ej. 7 Decidir si las curvas $\alpha(t) = (t^3, 2t^3)$ y $\beta(t) = (\operatorname{sen}(3t)\cos t, \operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen} t)$ son regulares y dibujar sus trayectorias.

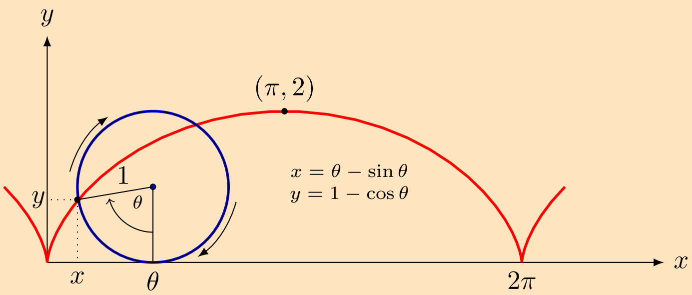
Ej. 8 Sea α una curva regular con $\|\alpha'\| = c$, constante. Mostrar que si s es la longitud de arco medida a partir de un instante, entonces $s(t) = ct + b$ para alguna constante b.

Ej. 9 Graficar la espiral $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$, con $t \geq 0$. ¿Cuál es la longitud de cuatro vueltas de espiral? ¿Y de toda la espiral? Reparametrizar α por longitud de arco.

Ej. 10 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Suponer que existe una sucesión t_n de puntos distintos en el intervalo (a, b) tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = T \in (a, b)$ y $\alpha(t_n) = p$ para todo n. Probar que α no es regular. Mostrar que esto implica que una curva regular en un intervalo cerrado y acotado puede intersecarse en un mismo punto a lo sumo una cantidad finita de veces.

Ej. 11 Un disco de radio 1 en el plano x-y rueda sin deslizar a lo largo del eje x. La figura que describe un punto fijo de la circunferencia del disco se llama *cicloide*.

- Mostrar que la trayectoria de la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta) = (\theta - \operatorname{sen}(\theta), 1 - \cos(\theta))$ coincide con la cicloide. Determinar dónde se anula α'.
- Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

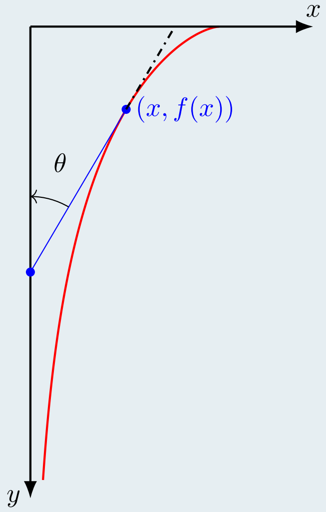


Ej. 12 Se coloca un botón en el punto $(1,0)$ del plano y se le ata un hilo inextensible de longitud 1. Se toma el otro extremo del hilo y se lo desliza sobre el piso a lo largo de la semirrecta negativa del eje y, a partir del punto $(0,0)$. El botón describe una trayectoria (llamada apropiadamente *tractriz*) igual al gráfico de una función $f:(0,1)\to(-\infty,0)$, creciente y biyectiva.

- Plantear una ecuación para f' y resolverla.
- Mostrar que la tractriz coincide con la trayectoria de la curva $\alpha:(0,\pi/2)\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(\theta)=(\operatorname{sen}\theta,\cos\theta+\log(\tan(\theta/2)))\,.$$

donde θ es el ángulo entre el hilo y el eje y.



Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Sean $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables. Hallar $\frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle$ en términos de u, v y sus derivadas.

2. Escribir una curva que parametrice la circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio 3.

3. ¿Qué se puede decir de una curva α tal que $\alpha''(t) = 0$ para todo t? Hallar una curva α cuya imagen sea una recta, pero tal que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo t.

4. Mostrar que la curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$ es suave pero no es regular, y ver que su imagen tiene una *esquina*. ¿Cómo se detecta una esquina? (Dar una definición razonable.)

5. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva que no pasa por el origen y sea $t_o \in (a, b)$. Probar que si $\alpha(t_0)$ es el punto más cercano al origen, entonces el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal al vector $\alpha'(t_0)$.

6. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t. Probar que $\|\alpha(t)\|$ es constante (es decir, que el gráfico $\alpha(t)$ está contenido en una esfera de centro cero) si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo t.

7. Decidir si las curvas $\alpha(t) = (t^3, 2t^3)$ y $\beta(t) = (\operatorname{sen}(3t)\cos t, \operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen} t)$ son regulares y dibujar sus trayectorias.

8. Sea α una curva regular con $\|\alpha'\| = c$, constante. Mostrar que si s es la longitud de arco medida a partir de un instante, entonces $s(t) = ct + b$ para alguna constante b.

9. Graficar la espiral $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$, con $t \geq 0$. ¿Cuál es la longitud de cuatro vueltas de espiral? ¿Y de toda la espiral? Reparametrizar α por longitud de arco.

10. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Suponer que existe una sucesión t_n de puntos distintos en el intervalo (a, b) tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = T \in (a, b)$ y $\alpha(t_n) = p$ para todo n. Probar que α no es regular. Mostrar que esto implica que una curva regular en un intervalo cerrado y acotado puede intersecarse en un mismo punto a lo sumo una cantidad finita de veces.

11. Un disco de radio 1 en el plano x-y rueda sin deslizar a lo largo del eje x. La figura que describe un punto fijo de la circunferencia del disco se llama *cicloide*.

    - Mostrar que la trayectoria de la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta) = (\theta - \operatorname{sen}(\theta), 1 - \cos(\theta))$ coincide con la cicloide. Determinar dónde se anula α'.
    - Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

12. Se coloca un botón en el punto $(1, 0)$ del plano y se le ata un hilo inextensible de longitud 1. Se toma el otro extremo del hilo y se lo desliza sobre el piso a lo largo de la semirrecta negativa del eje y, a partir del punto $(0, 0)$. El botón describe una trayectoria (llamada apropiadamente *tractriz*) igual al gráfico de una función $f : (0, 1) \to (-\infty, 0)$, creciente y biyectiva.

    - Plantear una ecuación para f' y resolverla.
    - Mostrar que la tractriz coincide con la trayectoria de la curva $\alpha : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ dada por

    $$\alpha(\theta) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta + \log(\tan(\theta/2))).$$

    donde θ es el ángulo entre el hilo y el eje y.