Análisis Funcional I – 2020
Práctico 1

A lo largo de toda la materia consideraremos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

(1) Un espacio métrico (X, d) es un conjunto no vacío X junto con una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguentes propiedades para todo x, y y z en X:

(D1) $d(x, y) \geq 0$ (*positividad*)

(D2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(D3) $d(x, y) = d(y, z)$ (*simetría*)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*desigualdad triangular*)

Dicha función d se llama *métrica.*

Probar que las propiedades (D2), (D3) y (D4) implican la propiedad (D1).

(2) Sea $\{x_n\}$ es una sucesión en un espacio de Banach $\mathcal{X}$.

Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

(3) Sea ℓ^2 el espacio vectorial de las sucesiones de cuadrado sumable. Probar lo siguiente:

(a) ℓ^2 tiene dimensión infinita.

(b) ℓ^2 es separable.

(c) $\{x \in \ell^2 : ||x||_2 = 1\}$ es cerrado pero no compacto.

(d) $\{x \in \ell^2 : x_i = 0$ salvo un número finito de i's$\}$ es denso.

(4) Definimos

$$\ell^p := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

$$\ell^\infty := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_\infty = \sup_i |x_i| < \infty\}.$$

(a) Dar ejemplos de:

- una sucesión $\{x^n\} \subset \ell^2$ que converja en $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ pero que no converja en $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$.
- una sucesión $\{x^n\} \subset \ell^1$ que converja en $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ pero que no converja en $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

(b) Probar que ℓ^1 y ℓ^∞ son de Banach con las normas $|| \cdot ||_1$ y $|| \cdot ||_\infty$ respectivamente, pero ℓ^1 no es de Banach con la norma $|| \cdot ||_\infty$ (i.e. ℓ^1 no es subespacio cerrado de ℓ^∞.)

(c) ℓ^1 es subespacio vectorial denso (propio) de ℓ^2. (Por lo tanto no es completo con la $|| \cdot ||_2$).

(d) Probar que a clausura de ℓ^1 y ℓ^2 en ℓ^∞ es $c_0 := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \lim_{i\to\infty} |x_i| = 0\}$.

Deducir que c_0 es de Banach con la $|| \cdot ||_\infty$.

(e) Mostrar que

$$\ell^1 \subsetneqq \ell^2 \subsetneqq c_0 \subsetneqq c := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \subsetneqq \ell^\infty.$$

(f) ¿Es c cerrado en ℓ^∞ ?

(g) Probar que $||x||_q \leq ||x||_p$ para todo $x \in \ell^p$ para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
(Primero suponer que $||\cdot||_p = 1$.)

(5) (a) Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con un producto interno $(\cdot,\cdot)$. Definimos $||x|| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Probar que $||\cdot||$ es una norma.

(b) En todo pre-Hilbert (espacio vectorial con producto interno, no necesariamente completo) vale la "regla del paralelogramo" $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x-y||^2 + ||x+y||^2$ y además vale

$$(x,y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2\}, \qquad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$
$$(x,y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2 \ + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\}, \qquad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Nota: *El producto escalar se rescata a partir de la norma y está determinado por sus valores en la diagonal o sea por* $(x,x) = ||x||^2$.

(c) Las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ no cumplen con la regla del paralelogramo y por lo tanto ℓ^1 y ℓ^∞ no son de Hilbert. Pero ℓ^1 es pre-Hilbert con la $||\cdot||_2$. ¿Son ℓ^1, c y c_0 espacios pre-Hilbert con la norma $||\cdot||_\infty$?

(6) Sea $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < \infty$

(a) Si $X = [0,1]$ con la medida de Lebesgue, ¿Para qué valores de α, $f_\alpha \in L^p(X)$?
(b) Si $X = [1,\infty)$ con la medida de Lebesgue, ¿Para qué valores de α, $f_\alpha \in L^p(X)$?

(7) Construir una sucesión de funciones en $C([0,1])$ que converja a 0 para casi todo punto pero que diverja respecto de la norma $\|\cdot\|_1$.

(8) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C([0,1])$ que converge *uniformemente* a una función f. Mostrar que f es continua y que a su vez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f respecto de la $\|\cdot\|_1$.

(9) (a) Probar que en todo espacio vectorial existe una norma.

(b) Si X es un espacio normado entonces

$$| \, ||x|| - ||y|| \, | \leq ||x - y||$$

y

$$||x_1 + x_2 + \cdots + x_n|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots + ||x_n||.$$