Análisis Funcional I – 2020
Práctico 2

(1) Hacer los siguientes ejercicios de capítulo 2 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson:
- ejercicio 2.3 (página 38),
- ejercicios 2.6, 2.7 y 2.8 (páginas 44 y 45),
- ejercicios 2.10, 2.11 y 2.12[1] (página 50).

(2) Espacios de funciones continuas
  (a) Probar que $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ es de Banach si y sólo si $p = \infty$
  (b) Probar que
  - $C_b := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ f \text{ es acotada } \}$,
  - $C_0 := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ y
  - $C_p := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ f(x) = f(x + 2\pi) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$

  son espacios de Banach con $\|\cdot\|_\infty$
  (c) Probar que $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ no es de Banach.

(3) Si $0 < p < 1$, probar que ℓ^p con la métrica $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$ no es localmente convexo (i.e. los puntos no tienen base de entornos convexos).
Dibujar en $\mathbb{R}^2$ la bola unitaria para $p = 1/2$.

(4) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos el operador de traslación por x:

$$L_x : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad L_x(f)(y) := f(y - x).$$

  (a) Probar que la aplicación

$$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad (x, f) \longmapsto L_x(f)$$

  define una acción del grupo $(\mathbb{R}, +)$ sobre $L^1(\mathbb{R})$.
  (b) Dada $g \in L^1(\mathbb{R})$, probar que el operador

$$T : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad T(f) := f * g$$

  es invariante por traslaciones, es decir, $L_x(T(f)) = T(L_x(f))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y toda $f \in L^1(\mathbb{R})$.
  (c) ¿De qué manera interpretan a este operador?

(5) ¿Cuáles son los homomorfismos de $\mathbb{R}$ con repecto a la operación de suma? Es decir, ¿qué funciones $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumplen $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$?

[1] En 2.12(b), $z_n = (1 - n^{-1})z$.

(6) Hacer los siguientes ejercicios de capítulo 3 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson:
- ejercicio 3.1 (página 59),
- ejercicios 3.8, 3.10 y 3.11 (páginas 64 y 65),
- ejercicios 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17 (página 72).

(7) Sea S subespacio vectorial del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.
(a) S es denso si y sólo si $S^{\perp} = 0$.
(b) $\overline{S} = S^{\perp\perp}$.
(c) Si S es un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$, entonces $\overline{Sp}(S) = S^{\perp\perp}$

(8) Sea $\mathcal{P}$ un pre-Hilbert. Si $S \subset \mathcal{P}$ no vacío, entonces
(a) $S \subset (S^{\perp})^{\perp} \doteq S^{\perp\perp}$.
(b) $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp} = (\overline{S})^{\perp}$.
(c) $S \cap S^{\perp} \subset \{0\}$.

(9) Consideremos el espacio $C[0,1]$, con la norma $||\cdot||_{\infty}$. Sea $S = \left\{ f \in L^{\infty} : \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que no existe una f en S con distancia mínima al cero.

(10) Consideremos $C[0,1]$ con la $||\cdot||_1$. Sea $S = \left\{ f \in L^1 : \int_0^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que existen infinitas f con distancia mínima al cero.