Geometría Diferencial

Período | 2020-II

Práctico 2

Ej. 1 Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$: si $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w = (y_1, \ldots, y_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle v, w\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Mostrar que $\langle v, w\rangle$ es igual a $||v||||w||\cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre los dos vectores v y w.
[Hint: Usar Ley de Cosenos]

Ej. 2 Dados dos vectores $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se muestra que el área del paralelogramo generado por v y w es igual a $||v||||w||\,\mathrm{sen}(\theta)$ donde θ es el ángulo entre los dos vectores v y w. Probar la identidad de Binet-Cauchy: que dicha área también es igual a $||v \wedge w||$, donde

$$\begin{aligned} ||v \wedge w||^2 &= \sum_{1\le i<j\le n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

[Hint: Expandir y mostrar que $\sum_{1\le i<j\le n}(x_i y_j - x_j y_i)^2$ y $||v||^2||w||^2 - \langle v, w\rangle^2$ son iguales, y usar el ejercicio anterior]

Ej. 3 La desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz dice que si V es un espacio vectorial real y $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno sobre V (definido positivo), entonces para todo v, w en V

$$\langle v, w\rangle^2 \;\le\; \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle = ||v||^2||w||^2$$

y la igualdad se da si y solo si v y w son linealmente dependientes (esta desigualdad puede verse como una consecuencia del *teorema de Pitágoras* en el sentido que, en un triángulo rectángulo, la longitud de cualquier cateto siempre es menor que la longitud de la hipotenusa). ¿Qué tan lejos está la cantidad $\langle v, w\rangle^2$ de $||v||^2||w||^2$? Probar la identidad de Lagrange

$$||v||^2||w||^2 \;=\; \langle v, w\rangle^2 + ||v \wedge w||^2.$$

Ej. 4 Mostrar que la siguiente igualdad se satisface para dos ángulos θ y β

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\beta) \\ \sin(\theta) = \sin(\beta). \end{cases}$$

si y solo si $\theta = \beta + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ej. 5 Sean $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables. Hallar $\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t))$ en términos de u, v y sus derivadas.

Ej. 6 Sea $\alpha : (-\infty, \pi) \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\alpha(t) = (1, t, 0)$ para $t < 0$ y $\alpha(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, 0)$ para $t \ge 0$. Mostrar que α es de clase C^1 pero la curvatura no está definida en todo su dominio.

Ej. 7 Graficar la curva $\alpha(t) = \frac{e^t}{\sqrt{3}}(\cos t, \mathrm{sen}\, t, 1)$ y mostrar que su trayectoria está contenida en un *cono circular*. Hallar la reparametrización por longitud de arco β de α con $\beta(0) = \alpha(0)$. Calcular el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de β.

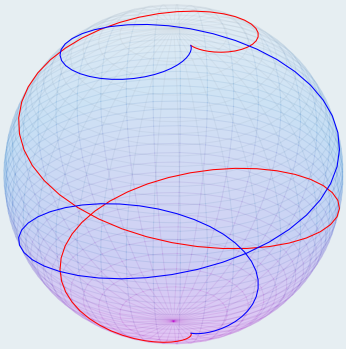
Ej. 8 Considerar la *hélice circular* $\alpha(s) = (a\cos(s/c), a\,\mathrm{sen}(s/c), bs/c)$, con $c^2 = a^2 + b^2$.

- Mostrar que α tiene rapidez unitaria y su trayectoria está contenida en un *cilindro*.
- Calcular el triedro de Frenet de α.
- Hallar el plano osculador y el plano osculador afín de α en $s = \pi$.
- ¿Cómo cambia la curvatura de una hélice circular si se la comprime o dilata en la dirección del eje z? ¿Y si se lo hace en la dirección ortogonal al eje z?
- ¿Qué relación existe entre la torsión de la hélice dada y la torsión de su reflejada respecto del plano x-z?

Ej. 9 Una curva α de rapidez unitaria en $\mathbb{R}^3$ se denomina una *hélice (generalizada)* si existe un vector unitario u fijo tal que $\langle \alpha'(s), u \rangle$ es constante para todo s.

Sea α una curva de rapidez unitaria con curvatura nunca nula. Probar que:

- Si existe una constante c tal que $\tau(s) = c\kappa(s)$ para todo s, entonces α es una hélice (la recíproca se demuestra en la teoría). ¿Son las dos curvas parametrizadas por longitud de arco de los dos ejercicios anteriores hélices generalizadas?



Trayectoria de dos hélices generalizadas sobre la esfera de radio 1 en la trayectoria de

$\gamma(t) = \left(k\cos(t)\cos(kt) + \sin(t)\sin(kt), k\sin(t)\cos(kt) - \cos(t)\sin(kt), \sqrt{1-k^2}\cos(kt)\right)$ con $k = \frac{1}{5}$

Ej. 10 ¿Cambian la curvatura y la torsión de una curva de rapidez unitaria en el espacio si se la recorre en sentido opuesto? Escribir la pregunta de manera precisa.

Ej. 11 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria. Probar que si $\|\alpha(t)\|$ alcanza un máximo local en $t_0 \in (a, b)$, entonces $\kappa(t_0) \geq 1/\|\alpha(t_0)\|$.

Ej. 12 (Opcional) Sean $\alpha : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular y $\beta : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por longitud de arco. Supongamos que β tiene curvatura nunca nula. Mostrar que la torsión de β se puede expresar en términos de α, mas precisamente si s es la longitud de α desde a hasta t, entonces

$$\tau_\beta(s) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2} = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}$$

Ej. 13 Graficar la curva $\alpha(t) = \left(t, t^2, \cosh(t)\right)$, y calcular su curvatura y torsión

Ej. 14 Sea $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ la curva definida por $\alpha(t) = (t, 2t, t^4)$. Probar que α es una curva regular cuya trayectoria está contenida en un plano y describirlo, y computar la curvatura de α.

Ej. 15 Sea $\beta(t) = (x(t), y(t), 0)$ una curva regular de rapidez unitaria (contenida en el plano $z = 0$) y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal inyectiva. Mostrar que la curva $\gamma = T \circ \beta$ es regular y calcular su torsión.

Ej. 16 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria y sean $\kappa, k : (a, b) \to \mathbb{R}$ su curvatura y su curvatura signada, respecivamente. Mostrar que $\kappa = |k|$.

Ej. 17 ¿Cambia la curvatura signada de una curva de rapidez unitaria en el plano si se la recorre en sentido opuesto? Reformular la pregunta con precisión y responderla.

Ej. 18 Si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana. Mostrar que su curvatura signada $k : (a, b) \to \mathbb{R}$ viene dada por

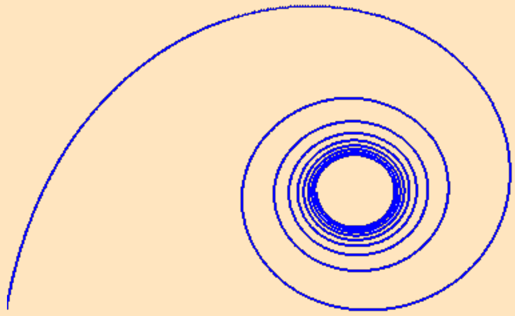
$$k = \det(\alpha', \alpha'') / \|\alpha'\|^3 .$$

Ej. 19 Probar que una curva plana α, parametrizada por longitud de arco, tiene curvatura constante $\kappa \neq 0$ si y solo si su trayectoria esta contenida en un circulo de radio $1/|\kappa|$.

Ej. 20 Sean FresnelC and FresnelS las *funciones integrales seno y coseno de Fresnel* definidas por

$$\mathrm{FresnelC}(s) = \int_0^s \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi u^2\right) du, \qquad \mathrm{FresnelS}(s) = \int_0^s \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi u^2\right) du.$$

Considerar la curva $\alpha : (0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(s) = (\mathrm{FresnelC}(s), \mathrm{FresnelS}(s))$. Mostrar que α es una curva parametrizada por longitud de arco con la propiedad que su curvatura es una función lineal en s. Una curva con esta última propiedad es llamada *Espiral de Euler* (o también, *Clotoide* o *Espiral de Cornú*)



Ej. 21 Encontrar una curva plana β parametrizada por longitud arco $s > 0$, con curvatura $\kappa_\beta(s) = 1/s$. Hacer el mismo ejercicio con la curvatura signada k, en lugar de κ.

Ej. 22 Sea $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ (esta curva se llama *catenaria*). Mostrar que la curvatura signada de α es $k(t) = 1/\cosh^2 t$.

Ej. 23 Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva suave con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(b) = q$. En la teoría se ve que la longitud de α es mayor o igual que la distancia entre p y q.

- Ver que el enunciado sigue siendo válido si se consideran curvas suaves a trozos.
- Probar que si la longitud de α es igual a la distancia entre p y q, entonces α es una reparametrización creciente de $\beta(t) = p + t(q - p)$.
  [Hint: ¿Cuándo se cumple la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz?]

Ej. 24 Probar que una curva espacial α de rapidez unitaria está contenida en una recta si y sólo si existe un punto p tal que cada recta tangente a α pasa por p.

Ej. 25 Probar que si todas las rectas normales a una curva de rapidez unitaria en el plano pasan por un punto fijo, entonces la trayectoria de la curva está contenida en una circunferencia.

Ej. 26 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria y suponer que $0 \in I$. Una circunferencia de centro p y radio r se llama *circunferencia osculatriz* de α en 0 si es una aproximación de orden dos de α en $t = 0$; más precisamente, si la función $f(s) = \|\alpha(s) - p\|^2$ cumple que $f(0) = r^2$ y $f'(0) = f''(0) = 0$.
Sea $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ la curvatura de α. Probar que si $\kappa(0) \neq 0$, entonces la circunferencia de centro

$$p = \alpha(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)^2}\alpha''(0)$$

y radio $1/\kappa(0)$ es la única circunferencia osculatriz de α en $t = 0$.

Ej. 27 Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria que es periódica, es decir, existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(t + a) = \alpha(t) \tag{1}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Mostrar que α tiene un (único) período $a_o > 0$, es decir, el menor de los números positivos a que satisfacen (1) para todo t. ¿La restricción de α al intervalo $(0, a_o)$ es necesariamente inyectiva?
- Suponer que $\alpha'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ para cierta función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que la curvatura signada total de α, es decir, $\int_0^{a_o} k(t)\ dt$, es de la forma $2m\pi$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$. ¿Que mide el número m?

Ej. 28 (Opcional) Considerar el siguiente teorema

> *Sean $N : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva suave (con $N \neq 0$) y $r \in \mathbb{R}$ una constante no nula. Entonces $N'' = -r^2 N$ si y solo si existen u y v vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que*
>
> $$N(t) = \cos(rt)u + \operatorname{sen}(rt)v.$$

Sea $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que su curvatura κ y su torsión τ son constantes no nulas. Usando el anterior resultado, demostrar que β es una *hélice circular* : existen una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\beta(s) = \left(\frac{\kappa}{r^2}\cos(rs)u + \frac{\kappa}{r^2}\sin(rs)v + \frac{|\tau|}{r}sw\right) + p_0$$

donde r es una constante tal que $r^2 = \kappa^2 + \tau^2$.

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$: si $v = (x_1,\ldots,x_n)$ y $w = (y_1,\ldots,y_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$,
$$\langle v,w\rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
Mostrar que $\langle v,w\rangle$ es igual a $||v||||w||\cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre los dos vectores v y w.
[Hint: Usar Ley de Cosenos]

2. Dados dos vectores $v = (x_1,\ldots,x_n)$ y $w = (y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se muestra que el área del paralelogramo generado por v y w es igual a $||v||||w||\operatorname{sen}(\theta)$ donde θ es el ángulo entre los dos vectores v y w. Probar la identidad de Binet-Cauchy: que dicha área también es igual a $||v\wedge w||$, donde
$$\begin{aligned} ||v\wedge w||^2 \quad &= \quad \sum_{1\le i<j\le n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &= \quad \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$
[Hint: Expandir y mostrar que $\sum_{1\le i<j\le n}(x_i y_j - x_j y_i)^2$ y $||v||^2||w||^2 - \langle v,w\rangle^2$ son iguales, y usar el ejercicio anterior]

3. La desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz dice que si V es un espacio vectorial real y $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno sobre V (definido positivo), entonces para todo v, w en V
$$\langle v,w\rangle^2 \quad \le \quad \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle = ||v||^2||w||^2$$
y la igualdad se da si y solo si v y w son linealmente dependientes (esta desigualdad puede verse como una consecuencia del *teorema de Pitágoras* en el sentido que, en un triángulo rectángulo, la longitud de cualquier cateto siempre es menor que la longitud de la hipotenusa). ¿Qué tan lejos está la cantidad $\langle v,w\rangle^2$ de $||v||^2||w||^2$? Probar la identidad de Lagrange
$$||v||^2||w||^2 \quad = \quad \langle v,w\rangle^2 + ||v\wedge w||^2.$$

4. Mostrar que la siguiente igualdad se satisface para dos ángulos θ y β
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\beta) \\ \sin(\theta) = \sin(\beta). \end{cases}$$
si y solo si $\theta = \beta + 2k\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

5. Sean $u, v : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ funciones diferenciables. Hallar $\frac{d}{dt}\left(u\left(t\right)\times v\left(t\right)\right)$ en términos de u, v y sus derivadas.

6. Sea $\alpha : (-\infty,\pi) \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\alpha\left(t\right) = (1,t,0)$ para $t<0$ y $\alpha\left(t\right) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ para $t\ge 0$. Mostrar que α es de clase C^1 pero la curvatura no está definida en todo su dominio.

7. Graficar la curva $\alpha\left(t\right) = \frac{e^t}{\sqrt{3}}\left(\cos t, \operatorname{sen} t, 1\right)$ y mostrar que su trayectoria está contenida en un *cono circular*. Hallar la reparametrización por longitud de arco β de α con $\beta(0) = \alpha(0)$. Calcular el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de β.

8. Considerar la *hélice circular* $\alpha(s) = \left(a\cos(s/c), a\operatorname{sen}(s/c), bs/c\right)$, con $c^2 = a^2 + b^2$.
   - Mostrar que α tiene rapidez unitaria y su trayectoria está contenida en un *cilindro*.
   - Calcular el triedro de Frenet de α.
   - Hallar el plano osculador y el plano osculador afín de α en $s=\pi$.
   - ¿Cómo cambia la curvatura de una hélice circular si se la comprime o dilata en la dirección del eje z? ¿Y si se lo hace en la dirección ortogonal al eje z?
   - ¿Qué relación existe entre la torsión de la hélice dada y la torsión de su reflejada respecto del plano x-z?

9. Una curva α de rapidez unitaria en $\mathbb{R}^3$ se denomina una *hélice (generalizada)* si existe un vector unitario u fijo tal que $\langle\alpha'\left(s\right), u\rangle$ es constante para todo s. Sea α una curva de rapidez unitaria con curvatura nunca nula. Probar que:
   - Si existe una constante c tal que $\tau\left(s\right) = c\kappa\left(s\right)$ para todo s, entonces α es una hélice (la recíproca se demuestra en la teoría). ¿Son las dos curvas parametrizadas por longitud de arco de los dos ejercicios anteriores hélices generalizadas?

10. ¿Cambian la curvatura y la torsión de una curva de rapidez unitaria en el espacio si se la recorre en sentido opuesto? Escribir la pregunta de manera precisa.

11. Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria. Probar que si $\|\alpha(t)\|$ alcanza un máximo local en $t_0\in(a,b)$, entonces $\kappa\left(t_0\right) \ge 1/\left\|\alpha(t_0)\right\|$.

12. (Opcional) Sean $\alpha : [a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una curva regular y $\beta : [0,L]\to\mathbb{R}^3$ su reparametrización por longitud de arco. Supongamos que β tiene curvatura nunca nula. Mostrar que la torsión de β se puede expresar en términos de α, mas precisamente si s es la longitud de α desde a hasta t, entonces
$$\tau_\beta(s) = \frac{\det(\alpha^{'}(t),\alpha^{''}(t),\alpha^{'''}(t))}{||\alpha^{'}(t)\times\alpha^{''}(t)||^2} = \frac{\langle\alpha^{'}(t)\times\alpha^{''}(t),\alpha^{'''}(t)\rangle}{||\alpha^{'}(t)\times\alpha^{''}(t)||^2}$$

13. Graficar la curva $\alpha(t) = \left(t, t^2, \cosh(t)\right)$ calcular su curvatura y torsión

14. Sea $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ la curva definida por $\alpha(t) = (t, 2t, t^4)$. Probar que α es una curva regular cuya trayectoria está contenida en un plano y describirlo, y computar la curvatura de α.

15. Sea $\beta(t) = (x(t), y(t), 0)$ una curva regular de rapidez unitaria (contenida en el plano $z = 0$) y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal inyectiva. Mostrar que la curva $\gamma = T \circ \beta$ es regular y calcular su torsión.

16. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria y sean $\kappa, k : (a, b) \to \mathbb{R}$ su curvatura y su curvatura signada, respecivamente. Mostrar que $\kappa = |k|$.

17. ¿Cambia la curvatura signada de una curva de rapidez unitaria en el plano si se la recorre en sentido opuesto? Reformular la pregunta con precisión y responderla.

18. Si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana. Mostrar que su curvatura signada $k : (a, b) \to \mathbb{R}$ viene dada por
$$k = \det\left(\alpha', \alpha''\right) / \left\|\alpha'\right\|^3 .$$

19. Probar que una curva plana α, parametrizada por longitud de arco, tiene curvatura constante $\kappa \neq 0$ si y solo si su trayectoria esta contenida en un circulo de radio $1/|\kappa|$.

20. Sean FresnelC and FresnelS las *funciones integrales seno y coseno de Fresnel* definidas por
$$\mathrm{FresnelC}(s) = \int_0^s \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi u^2\right) du, \qquad \mathrm{FresnelS}(s) = \int_0^s \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi u^2\right) du.$$
Considerar la curva $\alpha : (0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(s) = (\mathrm{FresnelC}(s), \mathrm{FresnelS}(s))$. Mostrar que α es una curva parametrizada por longitud de arco con la propiedad que su curvatura es una función lineal en s. Una curva con esta última propiedad es llamada *Espiral de Euler* (o también, *Clotoide* o *Espiral de Cornú*)

21. Encontrar una curva plana β parametrizada por longitud arco $s > 0$, con curvatura $\kappa_\beta(s) = 1/s$. Hacer el mismo ejercicio con la curvatura signada k, en lugar de κ.

22. Sea $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ (esta curva se llama *catenaria*). Mostrar que la curvatura signada de α es $k(t) = 1/\cosh^2 t$.

23. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva suave con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(b) = q$. En la teoría se ve que la longitud de α es mayor o igual que la distancia entre p y q.
   - Ver que el enunciado sigue siendo válido si se consideran curvas suaves a trozos.
   - Probar que si la longitud de α es igual a la distancia entre p y q, entonces α es una reparametrización creciente de $\beta(t) = p + t(q - p)$.
   [Hint: ¿Cuándo se cumple la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz?]

24. Probar que una curva espacial α de rapidez unitaria está contenida en una recta si y sólo si existe un punto p tal que cada recta tangente a α pasa por p.

25. Probar que si todas las rectas normales a una curva de rapidez unitaria en el plano pasan por un punto fijo, entonces la trayectoria de la curva está contenida en una circunferencia.

26. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria y suponer que $0 \in I$. Una circunferencia de centro p y radio r se llama *circunferencia osculatriz* de α en 0 si es una aproximación de orden dos de α en $t = 0$; más precisamente, si la función $f(s) = \|\alpha(s) - p\|^2$ cumple que $f(0) = r^2$ y $f'(0) = f''(0) = 0$.
Sea $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ la curvatura de α. Probar que si $\kappa(0) \neq 0$, entonces la circunferencia de centro
$$p = \alpha(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)^2}\alpha''(0)$$
y radio $1/\kappa(0)$ es la única circunferencia osculatriz de α en $t = 0$.

27. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria que es periódica, es decir, existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que
$$\alpha(t + a) = \alpha(t) \tag{1}$$
para todo $t \in \mathbb{R}$.
   - Mostrar que α tiene un (único) período $a_o > 0$, es decir, el menor de los números positivos a que satisfacen (1) para todo t. ¿La restricción de α al intervalo $(0, a_o)$ es necesariamente inyectiva?
   - Suponer que $\alpha'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ para cierta función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que la curvatura signada total de α, es decir, $\int_0^{a_o} k(t)\ dt$, es de la forma $2m\pi$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$. ¿Que mide el número m?

28. (Opcional) Considerar el siguiente teorema

   Sean $N : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva suave (con $N \neq 0$) y $r \in \mathbb{R}$ una constante no nula. Entonces $N'' = -r^2 N$ si y solo si existen u y v vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que
$$N(t) = \cos(rt)u + \mathrm{sen}(rt)v.$$
Sea $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que su curvatura κ y su torsión τ son constantes no nulas. Usando el anterior resultado, demostrar que β es una *hélice circular* : existen una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que
$$\beta(s) = \left(\frac{\kappa}{r^2}\cos(rs)u + \frac{\kappa}{r^2}\sin(rs)v + \frac{|\tau|}{r}sw\right) + p_0$$
donde r es una constante tal que $r^2 = \kappa^2 + \tau^2$.