Análisis Funcional I – 2020
Práctico 3

(1) Hacer los siguientes ejercicios de capítulo 3 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson:
- ejercicios 3.21, 3.22, 3.23 y 3.24 (página 81),
- ejercicio 3.26 (página 82),
- ejercicio 3.27 (página 85) - Repasar el Teorema de Stone-Weiestrass (Teorema 1.40 del libro.)
- ejercicio 3.28 (página 85)

(2) Sea $\chi_{[0,1]}$ la función característica del intervalo $[0,1]$. Probar que

$$\left\{\chi_{[0,1]}(x-n)\; e^{2\pi i m x}\right\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$$

es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (llamada *base de Gabor*). Deducir que $L^2(\mathbb{R})$ es separable.

(3) Sea $f \in C^k(\mathbb{S}^1)$. Probar que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f^{(k)}, e^{inx}\rangle = (in)^k\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, e^{inx}\rangle\right)$$

donde $\langle g,h\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\overline{h(x)}\; dx$.

(4) Probar que si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ entonces existen sus coeficientes de Fourier

$$a_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\; dx$$

y se cumple que $(a_n(f))_n \in c_0$.

(5) ¿Cuáles son los coeficientes de Fourier $a_n(f)$ de $f := \chi_{[0,\pi]}$?

(6) Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(7) Sean f y g funciones pertenecientes al $L^2((-\pi,\pi])$. Extenderlas a funciones sobre $\mathbb{R}$ de manera tal que resulten periódicas de período 2π. Mostrar que la convolución

$$(f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\; dy$$

está en $L^1((-\pi,\pi))$ y se satisface

$$\langle f*g, e^{inx}\rangle = \langle f, e^{inx}\rangle\langle g, e^{inx}\rangle.$$

(8) Sea f una función par en $L^2([-\pi,\pi])$. Probar que $a_n(f) = a_{-n}(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(9) Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, periódica de período 2π. Dado $\varepsilon > 0$, probar que existe un polinomio trigonométrico $\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$, tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x$.