Geometría Diferencial

Período | 2020-II

Práctico 3

Ej. 1 Describir geométricamente las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ inducidas por las siguientes matrices (rota, refleja, etc.).

1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ej. 2 (Opcional) Considerar en el conjunto de los números complejos $\mathbb{C} := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\}$ su estructura usual de espacio vectorial sobre los números reales y sea $u_0 \in \mathbb{C}$. De las siguientes funciones definidas sobre $\mathbb{C}$, decir cuales son transformaciones lineales y en tal caso, dar la matriz de la transformación con respecto a la base $\{1, \sqrt{-1}\}$:

1. $l_{u_0}(z) = u_0 + z$
2. $m_{u_0}(z) = u_0 \cdot z$
3. $c(z) = \overline{z}$
4. $n(z) = z \cdot \overline{z}$
5. $s(z) = \sqrt{z}$
6. $r(z) = u_0 \cdot \overline{z}$.

De las anteriores matrices ¿cuáles son matrices ortogonales? Si la *forma polar* de u_0 es $r(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{-1})$ ¿qué efecto produce multiplicar por u_0 o tomar conjugado en el plano complejo?.

Ej. 3 Mostrar que el conjunto de las matrices ortogonales $n \times n$, que se denota por $\mathrm{O}(n)$, junto con el producto usual de matrices $\cdot$ forman un *grupo*; esto es, verifique que el par $(\mathrm{O}(n), \cdot)$ satisface

1. (Clausurativa) Para todo Q y R en $\mathrm{O}(n)$, se cumple $Q \cdot R$ está en $\mathrm{O}(n)$.
2. (Asociativa) Para todo Q, R y S en $\mathrm{O}(n)$, se cumple $(Q \cdot R) \cdot S$ es igual a $Q \cdot (R \cdot S)$
3. (Elemento identidad) Existe un elemento e en $\mathrm{O}(n)$ con la propiedad de que para cualquier Q en $\mathrm{O}(n)$, $e \cdot Q = Q \cdot e = Q$.
4. (Elemento inverso) Para cada Q en $\mathrm{O}(n)$, existe un elemento R en $\mathrm{O}(n)$ tal que $Q \cdot R = R \cdot Q = e$.

   Se denota por $\mathrm{SO}(n)$ el conjunto de las rotaciones ¿se puede decir que este es un grupo? ¿qué puede decir del conjunto de las *transformaciones euclidianas* o de su subconjunto de las transformaciones rígidas?

Ej. 4 ¿Qué se obtiene de componer la reflexión en el plano respecto del eje x con la reflexión respecto de la recta $\{t\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid t \in \mathbb{R}\}$?

Ej. 5 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria con curvatura κ nunca nula y torsión τ. Sea T una transformación euclidiana de $\mathbb{R}^3$ y sea $\bar{\alpha} = T \circ \alpha$. Mostrar que $\bar{\alpha}$ tiene rapidez unitaria y comparar la curvatura, torsión y el triedro de Frenet de α con los de $\bar{\alpha}$.

Ej. 6 Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma 1. Mostrar que v es de la forma $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ y que los únicos dos vectores ortogonales a v de norma 1 son $(-\varepsilon\operatorname{sen}(\theta), \varepsilon\cos(\theta))$ con $\varepsilon = \pm 1$.

Ej. 7 Mostrar que las rotaciones del plano en general no conmutan con las traslaciones.

Ej. 8 Hallar la composición de las reflexiones de la recta real respecto de los puntos a y b.

Curvas Congruentes

Ej. 9 Escribir la rotación del plano en ángulo $\pi/3$ alrededor del punto $(1,4)$ de las formas $z \mapsto Cz + u$.

Ej. 10 Sea T la transformación euclidiana de $\mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = Cx + u$, con C ortogonal y $u \in \mathbb{R}^n$. Hallar una transformación ortogonal D y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(x) = D(x+v)$ para todo x.

Ej. 11 Probar que toda transformación rígida del plano es una traslación o una rotación alrededor de algún punto del plano.
[Hint: Mostrar que si no es una traslación, entonces tiene un punto fijo]

Ej. 12 Sean w y z dos puntos en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué transformación rígida del plano se obtiene si se compone la rotación en $180°$ alrededor de z con la rotación en $180°$ alrededor de w?

Ej. 13 Dar un ejemplo de dos curvas suaves $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ con las mismas funciones de curvatura (positivas) tales que en un instante $t_0 \in (a,b)$, $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, los triedros de Frenet coinciden en t_0 y no sean congruentes.
[Hint: Pensar en curvas de curvatura constante estudiadas en el práctico anterior]

Ej. 14 Sean $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ dos curvas suaves con las mismas funciones de curvatura (positivas) y torsión. Probar que α y β son *congruentes*, es decir, que existe una transformación rígida T de $\mathbb{R}^3$ tal que $\beta = T \circ \alpha$.
[Hint: Recurrir a la unicidad en el teorema fundamental de las curvas espaciales]

Ej. 15 (Opcional) Sea R un matriz ortogonal y λ un autovalor de A, el cual podría ser un número complejo. Probar que $\lambda\overline{\lambda} = 1$; es decir que el número complejo λ tiene módulo 1.

Ej. 16 (Opcional) Sea Q ortogonal y supongamos que Q tiene dos autoespacios distintos V_α y V_β. Probar que tales subespacios son ortogonales entre sí.

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Describir geométricamente las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ inducidas por las siguientes matrices (rota, refleja, etc.).

   (a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. (Opcional) Considerar en el conjunto de los números complejos $\mathbb{C} := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\}$ su estructura usual de espacio vectorial sobre los números reales y sea $u_0 \in \mathbb{C}$. De las siguientes funciones definidas sobre $\mathbb{C}$, decir cuales son transformaciones lineales y en tal caso, dar la matriz de la transformación con respecto a la base $\{1, \sqrt{-1}\}$:

   (a) $l_{u_0}(z) = u_0 + z$

   (b) $m_{u_0}(z) = u_0 \cdot z$

   (c) $c(z) = \overline{z}$

   (d) $n(z) = z \cdot \overline{z}$

   (e) $s(z) = \sqrt{z}$

   (f) $r(z) = u_0 \cdot \overline{z}$.

   De las anteriores matrices ¿cuáles son matrices ortogonales? Si la *forma polar* de u_0 es $r(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{-1})$ ¿qué efecto produce multiplicar por u_0 o tomar conjugado en el plano complejo?.

3. Mostrar que el conjunto de las matrices ortogonales $n \times n$, que se denota por $\mathrm{O}(n)$, junto con el producto usual de matrices $\cdot$ forman un *grupo*; esto es, verifique que el par $(\mathrm{O}(n), \cdot)$ satisface

   (a) (Clausurativa) Para todo Q y R en $\mathrm{O}(n)$, se cumple $Q \cdot R$ está en $\mathrm{O}(n)$.

   (b) (Asociativa) Para todo Q, R y S en $\mathrm{O}(n)$, se cumple $(Q \cdot R) \cdot S$ es igual a $Q \cdot (R \cdot S)$

   (c) (Elemento identidad) Existe un elemento e en $\mathrm{O}(n)$ con la propiedad de que para cualquier Q en $\mathrm{O}(n)$, $e \cdot Q = Q \cdot e = Q$.

   (d) (Elemento inverso) Para cada Q en $\mathrm{O}(n)$, existe un elemento R en $\mathrm{O}(n)$ tal que $Q \cdot R = R \cdot Q = e$.
   Se denota por $\mathrm{SO}(n)$ el conjunto de las rotaciones ¿se puede decir que este es un grupo? ¿qué puede decir del conjunto de las *transformaciones euclidiana* o de su subconjunto de las transformaciones rígidas?

4. ¿Qué se obtiene de componer la reflexión en el plano respecto del eje x con la reflexión respecto de la recta $\{t\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid t \in \mathbb{R}\}$?

5. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria con curvatura κ nunca nula y torsión τ. Sea T una transformación euclidiana de $\mathbb{R}^3$ y sea $\bar{\alpha} = T \circ \alpha$. Mostrar que $\bar{\alpha}$ tiene rapidez unitaria y comparar la curvatura, torsión y el triedro de Frenet de α con los de $\bar{\alpha}$.

6. Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma 1. Mostrar que v es de la forma $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ y que los únicos dos vectores ortogonales a v de norma 1 son $(-\varepsilon \operatorname{sen}(\theta), \varepsilon \cos(\theta))$ con $\varepsilon = \pm 1$.

7. Mostrar que las rotaciones del plano en general no conmutan con las traslaciones.

8. Hallar la composición de las reflexiones de la recta real respecto de los puntos a y b.

9. Escribir la rotación del plano en ángulo $\pi/3$ alrededor del punto $(1, 4)$ de las formas $z \mapsto Cz + u$.

10. Sea T la transformación euclidiana de $\mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = Cx + u$, con C ortogonal y $u \in \mathbb{R}^n$. Hallar una transformación ortogonal D y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(x) = D(x + v)$ para todo x.

11. Probar que toda transformación rígida del plano es una traslación o una rotación alrededor de algún punto del plano.
    [Hint: Mostrar que si no es una traslación, entonces tiene un punto fijo]

12. Sean w y z dos puntos en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué transformación rígida del plano se obtiene si se compone la rotación en 180° alrededor de z con la rotación en 180° alrededor de w?

13. Dar un ejemplo de dos curvas suaves $\alpha, \beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ con las mismas funciones de curvatura (positivas) tales que en un instante $t_0 \in (a, b)$, $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, los triedros de Frenet coinciden en t_0 y no sean congruentes.
    [Hint: Pensar en curvas de curvatura constante estudiadas en el práctico anterior]

14. Sean $\alpha, \beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ dos curvas suaves con las mismas funciones de curvatura (positivas) y torsión. Probar que α y β son *congruentes*, es decir, que existe una transformación rígida T de $\mathbb{R}^3$ tal que $\beta = T \circ \alpha$.
    [Hint: Recurrir a la unicidad en el teorema fundamental de las curvas espaciales]

15. (Opcionales) Sea R un matriz ortogonal y λ un autovalor de A, el cual podría ser un número complejo. Probar que $\lambda\overline{\lambda} = 1$; es decir que el número complejo λ tiene módulo 1.

16. (Opcionales) Sea Q ortogonal y suponer que Q tiene dos autoespacios distintos V_α y V_β. Probar que tales subespacios son ortogonales entre sí.