Geometría Diferencial
Período | 2020-II
Práctico 4

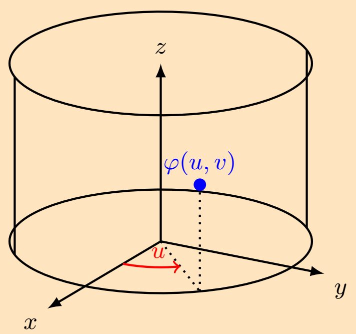
Ej. 1 (Repaso) Sea $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se define el *argumento principal* de p, $\mathrm{Arg}(p)$, como el menor ángulo en sentido antihorario que forma el *semi-eje* $\mathbf{x}$ *positivo* y el segmento formado por el origen y p. Mostrar que Arg es una función bien definida, que $\mathrm{Arg}(p) \in [0, 2\pi)$ y esta *dada a trozos* por:

$$\mathrm{Arg}(p) \;=\; \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0, \end{cases}$$

donde $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}$ es la *función arcotangente*: la única función tal que $\arctan(\tan(x)) = x$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Mostrar también que la función Arg es discontinua en el semi-eje $\mathbf{x}$ positivo, mejor aún, probar que es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ y } y = 0\}$.

Ej. 2 Sea $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ el *cilindro circular*. Mostrar que:

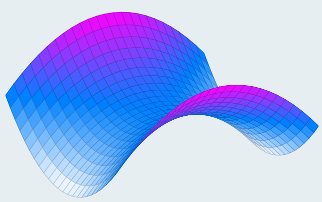
- La imagen de $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ es el cilindro y que $d\psi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
- La función $\varphi : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ satisface las condiciones (1) y (2) de la definición de que C sea una superficie regular.
- Concluir que C es una superficie regular restringiendo ψ a otros abiertos de $\mathbb{R}^2$.
- Sea L una línea recta en $\mathbb{R}^2$ ¿Qué curva describe la imagen de L bajo ψ? ¿Es alguna de estas curvas periódica?



Ej. 3 Sea $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 - y^2\}$ el *paraboloide hiperbólico*. Mostrar que las siguientes funciones son sistemas coordenados de S, verificando que satisfacen las condiciones (1) y (2) de la definición de superficie regular:

- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
  $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$.
- $\psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
  $\psi(u, v) = (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2)$.

Dado $p \in S$, mostrar que existen dos líneas rectas no paralelas contenidas en S y que pasan por el punto p. [Hint: Considerar la función φ.]
Dar curvas cuya trayectoria describan la intersección de S con los planos paralelos al plano $z = 0$.

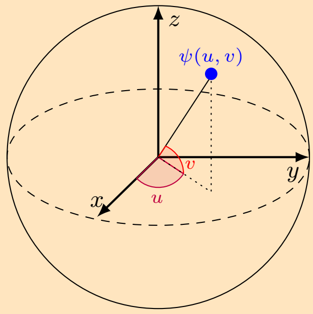


Ej. 4 Sea $S^2 = \left\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\right\}$ la *esfera* de centro cero y radio 1. Se sabe que es una superficie regular.

- Mostrar que la siguiente aplicación es una parametrización de S^2.

$$\psi : \mathbb{R} \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi\,(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v)\,.$$

- Sea ϕ la restricción de ψ a $(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mostrar que ϕ es un sistema coordenado de S^2.
- Escribir en coordenadas los paralelos y los meridianos.
- Describir sistemas coordenados similares a ϕ para cubrir toda la esfera.

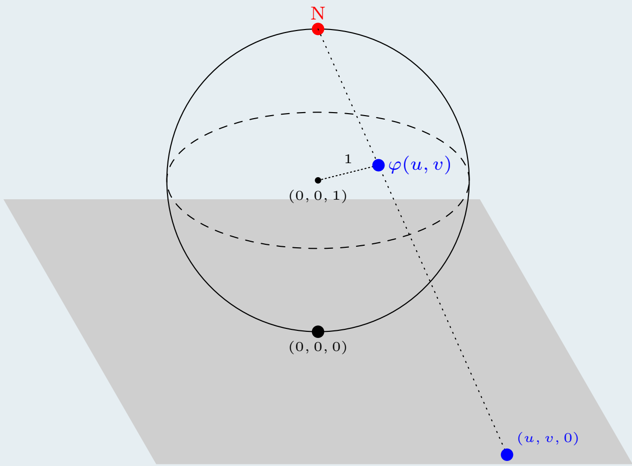


Ej. 5 Sea $S = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\right\}$ la *esfera* de radio 1 y centro $(0, 0, 1)$ y sea $N = (0, 0, 2)$ el polo norte de S. Sea $\pi : S - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue. Dado $p \in S$, $p \neq N$, $\pi\,(p)$ son las coordenadas del punto q del plano $z = 0$ donde la recta que pasa por N y el punto p corta al plano $z = 0$. La aplicación π se llama *proyección estereográ*fica.

- Mostrar que $\varphi =_{\text{def}} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está dada por la fórmula

$$\varphi(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4}(2u, 2v, u^2 + v^2)$$

  y es un sistema coordenado de S (dar por sabido que S es una superficie regular).
- Mostrar que con esta carta y otra similar se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.
- Escribir en coordenadas los paralelos y los meridianos de S.



Ej. 6 Para cada una de las siguientes funciones hallar el dominio y decidir para qué valores de c el conjunto $f^{-1}(c)$ es una superficie regular: $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ y $g(x, y, z) = xyz^2$.

Ej. 7 Sean $R > r > 0$. El toro $T = T(R, r)$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que interseca a cada plano que contiene al eje z en dos circunferencias de radio r con centros en el plano $z = 0$, a distancia R del origen.

- Verificar que T consiste exactamente de los puntos que satisfacen la ecuación

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$

  y mostrar que es una superficie regular.

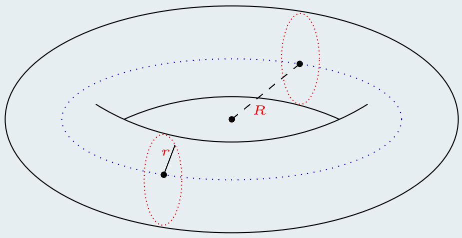
- Mostrar que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u, v) = \left((R + r\cos v)(\cos u, \operatorname{sen} u), r \operatorname{sen} v\right)$$

  es una parametrización de T.

- Restringiendo ϕ a abiertos de $\mathbb{R}^2$, hallar cuatro sistemas coordenados de T que lo cubran.

- Sea $p \in T$, $p = \phi(s, t) = \phi(\widehat{s}, \widehat{t})$. Mostrar que $\widehat{s} = s + 2k\pi$ y $\widehat{t} = t + 2h\pi$, con $k, h \in \mathbb{Z}$.



Ej. 8 Escribir el plano $z = 0$ como el conjunto de nivel cero de una función suave $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que 0 no sea un valor regular de F.

Ej. 9 Dar argumentos (no rigurosos) por los cuales los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ no son superficies regulares.

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

Ej. 10 Sea $\alpha : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(s) = \operatorname{sen}(3s)(\cos s, \operatorname{sen} s)$. Mostrar que no existe una función continua $\Phi : V \to \mathbb{R}$, con V un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a la imagen de α, tal que $\Phi(\alpha(t)) = t$ para todo $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ej. 11 Mostrar que la esfera es conexa.

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. (Repaso) Sea $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se define el *argumento principal* de p, $\operatorname{Arg}(p)$, como el menor ángulo en sentido antihorario que forma el *semi-eje* **x** *positivo* y el segmento formado por el origen y p. Mostrar que Arg es una función bien definida, que $\operatorname{Arg}(p) \in [0, 2\pi)$ y esta *dada a trozos* por:

$$\operatorname{Arg}(p) \quad = \quad \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0, \end{cases}$$

   donde $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}$ es la *función arcotangente*: la única función tal que $\arctan(\tan(x)) = x$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mostrar también que la función Arg es discontinua en el semi-eje **x** positivo, mejor aún, probar que es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ y } y = 0\}$.

2. Sea $C = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ el *cilindro circular*. Mostrar que:
   - La imagen de $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ es el cilindro y que $d\psi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
   - La función $\varphi : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ satisface las condiciones (1) y (2) de la definición de que C sea una superficie regular.
   - Concluir que C es una superficie regular restringiendo ψ a otros abiertos de $\mathbb{R}^2$.
   - Sea L una línea recta en $\mathbb{R}^2$ ¿Qué curva describe la imagen de L bajo ψ? ¿Es alguna de estas curvas periódica?

3. Sea $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 - y^2\}$ el *paraboloide hiperbólico*. Mostrar que las siguientes funciones son sistemas coordenados de S, verificando que satisfacen las condiciones (1) y (2) de la definición de superficie regular:
   - $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
     $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$.
   - $\psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
     $\psi(u, v) = (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2)$.

   Dado $p \in S$, mostrar que existen dos líneas rectas no paralelas contenidas en S y que pasan por el punto p.
   [Hint: Considerar la función φ.]

   Dar curvas cuya trayectoria describan la intersección de S con los planos paralelos al plano $z = 0$.

4. Sea $S^2 = \left\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\right\}$ la *esfera* de centro cero y radio 1. Se sabe que es una superficie regular.
   - Mostrar que la siguiente aplicación es una parametrización de S^2.
   $$\psi : \mathbb{R} \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v).$$
   - Sea ϕ la restricción de ψ a $(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mostrar que ϕ es un sistema coordenado de S^2.
   - Escribir en coordenadas los paralelos y los meridianos.
   - Describir sistemas coordenados similares a ϕ para cubrir toda la esfera.

5. Sea $S = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\right\}$ la *esfera* de radio 1 y centro $(0, 0, 1)$ y sea $N = (0, 0, 2)$ el polo norte de S. Sea $\pi : S - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue. Dado $p \in S$, $p \neq N$, $\pi(p)$ son las coordenadas del punto q del plano $z = 0$ donde la recta que pasa por N y el punto p corta al plano $z = 0$. La aplicación π se llama *proyección estereográfica*.
   - Mostrar que $\varphi =_{\text{def}} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está dada por la fórmula
   $$\varphi(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4}(2u, 2v, u^2 + v^2)$$
   y es un sistema coordenado de S (dar por sabido que S es una superficie regular).
   - Mostrar que con esta carta y otra similar se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.
   - Escribir en coordenadas los paralelos y los meridianos de S.

6. Para cada una de las siguientes funciones hallar el dominio y decidir para qué valores de c el conjunto $f^{-1}(c)$ es una superficie regular: $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ y $g(x, y, z) = xyz^2$.

7. Sean $R > r > 0$. El toro $T = T(R, r)$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que interseca a cada plano que contiene al eje z en dos circunferencias de radio r con centros en el plano $z = 0$, a distancia R del origen.
   - Verificar que T consiste exactamente de los puntos que satisfacen la ecuación
   $$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$
   y mostrar que es una superficie regular.
   - Mostrar que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(u, v) = ((R + r \cos v)(\cos u, \operatorname{sen} u), r \operatorname{sen} v)$ es una parametrización de T.
   - Restringiendo ϕ a abiertos de $\mathbb{R}^2$, hallar cuatro sistemas coordenados de T que lo cubran.
   - Sea $p \in T$, $p = \phi(s, t) = \phi(\widehat{s}, \widehat{t})$. Mostrar que $\widehat{s} = s + 2k\pi$ y $\widehat{t} = t + 2h\pi$, con $k, h \in \mathbb{Z}$.

8. Escribir el plano $z = 0$ como el conjunto de nivel cero de una función suave $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que 0 no sea un valor regular de F.

9. Dar argumentos (no rigurosos) por los cuales los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ no son superficies regulares.

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

10. Sea $\alpha : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(s) = \operatorname{sen}(3s)(\cos s, \operatorname{sen} s)$. Mostrar que no existe una función continua $\Phi : V \to \mathbb{R}$, con V un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a la imagen de α, tal que $\Phi(\alpha(t)) = t$ para todo $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Mostrar que la esfera es conexa.