FAMAF

Geometría Diferencial

Período | 2020-II

Práctico 5

Funciones Suaves y Plano Tangente

Ej. 1 Sea I un intervalo abierto y sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular suave de la forma $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, con $r(t) > 0$ para todo $t \in I$ y sea $\phi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(s,t) = (r(t)\cos s, r(t)\operatorname{sen} s, h(t)).$$

La notación anterior es: r por radio y h por altura. Si γ satisface:

- γ es inyectiva con inversa continua, o bien
- $I = \mathbb{R}$ y γ es periódica de período a e inyectiva en $[0, a)$,

entonces S, la imagen de ϕ, resulta una superficie regular, llamada *superficie de revolución con curva generatriz* γ.

- Mostrar que el toro $T(R, r)$ es un ejemplo de S como arriba. ¿Con cuál γ?
- Verificar que ϕ es una parametrización de S.
- Definir paralelos y meridianos.

Ej. 2 Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Recordar que se dice que A es un *conjunto abierto* en $\mathbb{R}^n$, si para cada $p \in A$, existe un $\epsilon > 0$, tal que la bola con centro en p y radio ϵ esta contenida en el conjunto A. Mostrar que:

- Si A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y B es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1}(B)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$.
- Si S es una superficie regular y B es un abierto de $\mathbb{R}^3$, entonces $S \cap B$ es una superficie regular.

Ej. 3 Sea S la esfera de centro cero y radio uno y sea $\psi : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\psi(s,t) = (\cos t(\cos s, \operatorname{sen} s), \operatorname{sen} t).$$

Hallar las funciones de cambio de coordenadas de ϕ_1^+ a ψ, y de ϕ_1^- a ϕ_3^+, incluyendo la descripción de los dominios.

Ej. 4 Sea S una superficie regular y sea $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función que lleva cada punto $(x, y, z) \in S$ al punto (x, y). ¿Es la función π diferenciable?

Ej. 5 Recordar que dos superficies M y N se dicen *difeomorfas* si existe un *difeomorfismo* $F : M \to N$; es decir, F es una función biyectiva suave con inversa F^{-1} suave. Mostrar que:

- El *paraboloide* $\{(x, y, x^2 + y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ es difeomorfo al plano $z = 0$.
- La esfera de centro cero y radio uno S es difeomorfa al *elipsoide* E de semiejes $a, b, c > 0$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}.$$

Ej. 6 Sean M y N dos superficies regulares y sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función suave tal que $F(M) \subset N$. Mostrar que $f = F|_M : M \to N$ es una función suave y que $df_p = dF_p|_{T_pM}$ para todo $p \in M$.

Ej. 7 Sean M y N superficies regulares. Supongamos que M puede ser cubierta con una sola carta $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función diferenciable tal que $F(U) \subseteq N$. Mostrar que la función $\overline{F} : M \to N$ definida por

$$\overline{F}(p) \quad = \quad F(s,t),$$

, si $p = \varphi(s,t)$, es una función bien definida y es suave.

Ej. 8 Sea $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$. Mostrar que todos los planos tangentes a S en los puntos $(x, y, 0)$ contienen al eje z.

Ej. 9 Sea $A : S \to S$, $A(q) = -q$, la *aplicación antipodal* de la esfera y sea $p \in S$. Mostrar que A es un difeomorfismo, $T_pS = T_{A(p)}S$ y calcular dA_p sin recurrir a sistemas coordenados de S.

Ej. 10 Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ funciones suaves entre superficies y sea $p \in M$. Mostrar que $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ (regla de la cadena).

Ej. 11 Sea S la esfera de centro cero y radio uno y sea

$$C = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\right\}$$

el cilindro circular que circunscribe a la esfera. Denotando con N y S respectivamente los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, -1)$, se define $F : C \to S^2 - \{N, S\}$ la función que a cada punto p del cilindro le asigna la intersección con S del segmento horizontal que une p con el eje z. Mostrar que F es un difeomorfismo de dos maneras: primero, calculando la inversa de F; después, sin hallar la inversa, usando el teorema de la función inversa.

Ej. 12 Sea T el toro $T(R, r)$ con su parametrización usual $\phi : \mathbb{R}^2 \to T \subseteq \mathbb{R}^3$ como en el Ejercicio 7 del práctico 4, y sea $f : T \to S^2$ dada por:

$$f(p) = (\cos(s - t), \operatorname{sen}(s - t), 0),$$

si $p = \phi(s, t)$. Mostrar que f está bien definida y es suave; esto es si $p = \phi(s, t)$ y $p = \phi\left(\widehat{s}, \widehat{t}\right)$, entonces

$$(\cos(s - t), \operatorname{sen}(s - t), 0) = (\cos(\widehat{s} - \widehat{t}), \operatorname{sen}(\widehat{s} - \widehat{t}), 0).$$

Ej. 13 Sea T el toro $T(2, 1)$ con su parametrización usual $\phi : \mathbb{R}^2 \to T \subseteq \mathbb{R}^3$ como en el Ejercicio 7 del práctico 4. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, considerar $F : T \to T$ definida por

$$F(p) = \phi(as + ct, bs + dt),$$

si $p = \phi(s, t)$.

- Mostrar que F está bien definida y es suave.
- Probar que si $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 1$, entonces F es un difeomorfismo. Para $a = b = c = 1$, $d = 2$ se tiene la *transformación del gato de Arnold*.
- Hallar la matriz de $dF_{\phi(0,0)}$ en la base $\{\phi_s(0, 0), \phi_t(0, 0)\}$.

Ej. 14 Sea S la superficie regular dada por

$$S = \{(u \cos v, u \sin v, \log u) : u > 0,\ v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- Calcular el plano tangente a S en cada punto de S.
- Sea C el cilindro $C = \{(\cos v, \sin v, \log u) : u > 0,\ v \in \mathbb{R}\}$ y considerar

  $$F : S \to C, \qquad F(u \cos v, u \sin v, \log u) = (\cos v, \sin v, \log u).$$

  Demostrar que F es diferenciable.
- Dado $p = (1, 0, 0) \in S$, calcular la matriz de $(dF)_p$ con respecto a alguna base de los planos tangentes de salida y llegada.
- ¿Es F un difeomorfismo? Justificar.

Ej. 15

Sea $S = \{(u^2, v^2, uv) : u, v > 0\}$.

- Probar que S es una superficie regular.
- Sea $F : S \to C$,

$$F(u^2, v^2, uv) = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2}, uv \right),$$

  donde C es el cilindro $C = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que F es diferenciable y, dado $p = (1, 1, 1)$, calcular la matriz de $(dF)_p$ con respecto a alguna base de los planos tangentes de salida y llegada.

Ej. 16 (Opcional) Recordar que el *helicoide* es la superficie regular H dada por la imagen de $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$, la cual puede ser vista como la forma que genera una recta coincidente al eje x mientras rota y se desplaza simultáneamente a lo largo del eje z; con velocidades angular y de desplazamiento iguales. Las rectas $\gamma_{v_0} : \mathbb{R} \to H$, $\gamma_{v_0}(u) = (0, 0, v_0) + u(\cos(v_0), \sin(v_0), 0)$ (v_0 constante), son llamadas *rayos del helicoide*. En el ejercicio 1, se ve que el toro es una superficie de revolución cuya apariencia la da cierta curva cuando rota con respecto al eje z. Dar una función suave del helicoide al toro que mande rayos del helicoide a meridianos del toro.

Ej. 17 Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave. Un punto $p \in S$ se dice crítico para f si $df_p = 0$.

- Sea $p_0 \in S$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$, $f(p) = \|p - p_0\|^2$. Mostar que $p \neq p_0$ es crítico para f si y sólo si la recta que pasa por p y p_0 es perpendicular a S en p.
- Mostrar que si todos los puntos de una superficie conexa son puntos críticos de una función f, entonces f es constante.

Ej. 18 Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave. Se dice que f tiene un máximo (o mínimo) local en un punto p de S, si existe una carta de S en p, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$, con $p = \varphi(q)$, tal que $f \circ \varphi$ tiene un máximo (o mínimo) en q. Mostrar que los puntos donde f alcanza tales *extremos* locales son puntos críticos de f.
[Hint: Seguir la definición de diferencial de f y usar el Teorema de Fermat de Análisis 1.]

Ej. 19 Demostrar que si una superficie regular S interseca a un plano P únicamente en un punto p, entonces dicho plano es el plano tangente afín a S en p.
[Hint: Sea n un vector normal al plano P y estudiar la *función altura* h de S con respecto de n. Mostrar que la hipótesis implica que el punto p debe ser un punto donde h tiene un *máximo/mínimo local*.]

Ej. 20 Mostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto, entonces la superficie está contenida en una esfera.

Ej. 21 Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave con un punto crítico p. Mostrar que el hessiano H_p de f en p está bien definido por

$$H_p : T_pS \to \mathbb{R}, \qquad H_p\left(\alpha'(0)\right) = \left(f \circ \alpha\right)''(0),$$

donde α es una curva suave en S con $\alpha(0) = p$.
[Hint: Pensar primero el problema tomando a S como si fuera un abierto de $\mathbb{R}^2$. En general, usar una carta $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de p para expresar la curva α, en un intervalo de tiempo del 0, en términos de una curva suave $\widetilde{\alpha}$ con trayectoria en U].

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Sea I un intervalo abierto y sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular suave de la forma $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, con $r(t) > 0$ para todo $t \in I$ y sea $\phi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$,
$$\phi(s,t) = (r(t)\cos s, r(t)\operatorname{sen} s, h(t)).$$
La notación anterior es: r por radio y h por altura. Si γ satisface:
   - γ es inyectiva con inversa continua, o bien
   - $I = \mathbb{R}$ y γ es periódica de período a e inyectiva en $[0, a)$,

   entonces S, la imagen de ϕ, resulta una superficie regular, llamada *superficie de revolución con curva generatriz* γ.
   - Mostrar que el toro $T(R, r)$ es un ejemplo de S como arriba. ¿Con cuál γ?
   - Verificar que ϕ es una parametrización de S.
   - Definir paralelos y meridianos.

2. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Recordar que se dice que A es un *conjunto abierto* en $\mathbb{R}^n$, si para cada $p \in A$, existe un $\epsilon > 0$, tal que la bola con centro en p y radio ϵ esta contenida en el conjunto A. Mostrar que:
   - Si A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y B es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1}(B)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$.
   - Si S es una superficie regular y B es un abierto de $\mathbb{R}^3$, entonces $S \cap B$ es una superficie regular.

3. Sea S la esfera de centro cero y radio uno y sea $\psi : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$$\psi(s,t) = (\cos t (\cos s, \operatorname{sen} s), \operatorname{sen} t).$$
Hallar las funciones de cambio de coordenadas de ϕ_1^+ a ψ, y de ϕ_1^- a ϕ_3^+, incluyendo la descripción de los dominios.

4. Sea S una superficie regular y sea $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función que lleva cada punto $(x, y, z) \in S$ al punto (x, y). ¿Es la función π diferenciable?

5. Recordar que dos superficies M y N se dicen *difeomorfas* si existe un *difeomorfismo* $F : M \to N$; es decir, F es una función biyectiva suave con inversa F^{-1} suave. Mostrar que:
   - El *paraboloide* $\{(x, y, x^2 + y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ es difeomorfo al plano $z = 0$.
   - La esfera de centro cero y radio uno S es difeomorfa al *elipsoide* E de semiejes $a, b, c > 0$:
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}.$$

6. Sean M y N dos superficies regulares y sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función suave tal que $F(M) \subset N$. Mostrar que $f = F|_M : M \to N$ es una función suave y que $df_p = dF_p|_{T_pM}$ para todo $p \in M$.

7. Sean M y N superficies regulares. Supongamos que M puede ser cubierta con una sola carta $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función diferenciable tal que $F(U) \subseteq N$. Mostrar que la función $\overline{F} : M \to N$ definida por
$$\overline{F}(p) \quad = \quad F(s,t),$$
, si $p = \varphi(s,t)$, es una función bien definida y es suave.

8. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Mostrar que todos los planos tangentes a S en los puntos $(x, y, 0)$ contienen al eje z.

9. Sea $A : S \to S$, $A(q) = -q$, la *aplicación antipodal* de la esfera y sea $p \in S$. Mostrar que A es un difeomorfismo, $T_pS = T_{A(p)}S$ y calcular dA_p sin recurrir a sistemas coordenados de S.

10. Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ funciones suaves entre superficies y sea $p \in M$. Mostrar que $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ (regla de la cadena).

11. Sea S la esfera de centro cero y radio uno y sea
$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$$
el cilindro circular que circunscribe a la esfera. Denotando con N y S respectivamente los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, -1)$, se define $F : C \to S^2 - \{N, S\}$ la función que a cada punto p del cilindro le asigna la intersección con S del segmento horizontal que une p con el eje z. Mostrar que F es un difeomorfismo de dos maneras: primero, calculando la inversa de F; después, sin hallar la inversa, usando el teorema de la función inversa.

12. Sea T el toro $T(R, r)$ con su parametrización usual $\phi : \mathbb{R}^2 \to T \subseteq \mathbb{R}^3$ como en el Ejercicio 7 del práctico 4, y sea $f : T \to S^2$ dada por:
$$f(p) = (\cos(s - t), \operatorname{sen}(s - t), 0),$$
si $p = \phi(s, t)$. Mostrar que f está bien definida y es suave; esto es si $p = \phi(s, t)$ y $p = \phi(\widehat{s}, \widehat{t})$, entonces
$$(\cos(s - t), \operatorname{sen}(s - t), 0) = (\cos(\widehat{s} - \widehat{t}), \operatorname{sen}(\widehat{s} - \widehat{t}), 0).$$

13. Sea T el toro $T(2,1)$ con su parametrización usual $\phi : \mathbb{R}^2 \to T \subseteq \mathbb{R}^3$ como en el Ejercicio 7 del práctico 4. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, considerar $F : T \to T$ definida por
$$F(p) = \phi(as + ct, bs + dt),$$
si $p = \phi(s,t)$.
    - Mostrar que F está bien definida y es suave.
    - Probar que si $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 1$, entonces F es un difeomorfismo. Para $a = b = c = 1$, $d = 2$ se tiene la *transformación del gato de Arnold*.
    - Hallar la matriz de $dF_{\phi(0,0)}$ en la base $\{\phi_s(0,0), \phi_t(0,0)\}$.

14. Sea S la superficie regular dada por
$$S = \{(u\cos v, u\sin v, \log u) : u > 0,\ v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$
    - Calcular el plano tangente a S en cada punto de S.
    - Sea C el cilindro $C = \{(\cos v, \sin v, \log u) : u > 0,\ v \in \mathbb{R}\}$ y considerar
$$F : S \to C, \qquad F(u\cos v, u\sin v, \log u) = (\cos v, \sin v, \log u).$$
    Demostrar que F es diferenciable.
    - Dado $p = (1,0,0) \in S$, calcular la matriz de $(dF)_p$ con respecto a alguna base de los planos tangentes de salida y llegada.
    - ¿Es F un difeomorfismo? Justificar.

15. Sea $S = \{(u^2, v^2, uv) : u, v > 0\}$.
    - Probar que S es una superficie regular.
    - Sea $F : S \to C$,
$$F(u^2, v^2, uv) = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2}, uv\right),$$
    donde C es el cilindro $C = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que F es diferenciable y, dado $p = (1,1,1)$, calcular la matriz de $(dF)_p$ con respecto a alguna base de los planos tangentes de salida y llegada.

16. (Opcional) Recordar que el *helicoide* es la superficie regular H dada por la imagen de $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$, la cual puede ser vista como la forma que genera una recta coincidente al eje x mientras rota y se desplaza simultáneamente a lo largo del eje z; con velocidades angular y de desplazamiento iguales. Las rectas $\gamma_{v_0} : \mathbb{R} \to H$, $\gamma_{v_0}(u) = (0,0,v_0) + u(\cos(v_0), \sin(v_0), 0)$ (v_0 constante), son llamadas *rayos del helicoide*. En el ejercicio 1, se ve que el toro es una superficie de revolución cuya apariencia la da cierta curva cuando rota con respecto al eje z. Dar una función suave del helicoide al toro que mande rayos del helicoide a meridianos del toro.

17. Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave. Un punto $p \in S$ se dice crítico para f si $df_p = 0$.
    - Sea $p_0 \in S$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$, $f(p) = \|p - p_0\|^2$. Mostar que $p \neq p_0$ es crítico para f si y sólo si la recta que pasa por p y p_0 es perpendicular a S en p.
    - Mostrar que si todos los puntos de una superficie conexa son puntos críticos de una función f, entonces f es constante.

18. Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave. Se dice que f tiene un máximo (o mínimo) local en un punto p de S, si existe una carta de S en p, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$, con $p = \varphi(q)$, tal que $f \circ \varphi$ tiene un máximo (o mínimo) en q. Mostrar que los puntos donde f alcanza tales *extremos* locales son puntos críticos de f.
[Hint: Seguir la definición de diferencial de f y usar el Teorema de Fermat de Análisis 1.]

19. Demostrar que si una superficie regular S interseca a un plano P únicamente en un punto p, entonces dicho plano es el plano tangente afín a S en p.
[Hint: Sea n un vector normal al plano P y estudiar la *función altura* h de S con respecto de n. Mostrar que la hipótesis implica que el punto p debe ser un punto donde h tiene un *máximo/mínimo local*.]

20. Mostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto, entonces la superficie está contenida en una esfera.

21. Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave con un punto crítico p. Mostrar que el hessiano H_p de f en p está bien definido por
$$H_p : T_pS \to \mathbb{R}, \qquad H_p(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)''(0),$$
donde α es una curva suave en S con $\alpha(0) = p$.
[Hint: Pensar primero el problema tomando a S como si fuera un abierto de $\mathbb{R}^2$. En general, usar una carta $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de p para expresar la curva α, en un intervalo de tiempo del 0, en términos de una curva suave $\widetilde{\alpha}$ con trayectoria en U].