Análisis Funcional I – 2020
Práctico 4

(1) ¿Qué ejercicio del Práctico 1 permite aseguar que la inclusión de ℓ^p en ℓ^q para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ es continua?

(2) Consideramos (X, μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$.
  (a) Probar que $L^q(d\mu) \subset L^p(d\mu)$ y que $||f||_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_q$, si $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
  Concluir que inclusión de $L^q(X)$ en $L^p(X)$ para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ es continua.
  (b) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, probar que

$$||f||_1 \leq \mu(X)^{\frac{1}{p'}}||f||_p \leq \mu(X)||f||_\infty$$

  y $||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p$

(3) Sean $r \leq p \leq s$. Mostrar entonces $L^p(X) \subset L^r(X) + L^s(X)$, donde el conjunto de la derecha es $\{f + g : f \in L^r(X) \text{ y } g \in L^s(X)\}$

(4) Hacer los ejercicios 4.1, 4.2 y 4.3 de la página 96 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

(5) Dar un ejemplo de una isometría entre dos espacios de Banach que no sobreyectiva.

(6) Probar que la composición de isometrías entre espacios normados es isometría.

(7) ¿Cuáles son todas las aplicaciones lineales que son isometrías de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con respecto a $\|\cdot\|_2$?

(8) Hacer los ejercicios 4.6, 4.7, 4.10 y 4.11 de la Sección 4.2 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

(9) Transformada de Fourier en $\mathbb{R}$.
  Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define su transformada de Fourier como la función $\widehat{f}$ dada por

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx.$$

  (a) Probar que la aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ es lineal y continua de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.
  (b) Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ probar que $\widehat{f}$ es continua y que $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, es decir $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.
  (c) Sea L_x el operador de traslación. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ calcular $\widehat{L_x f}$.
  (d) Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ calcular $\widehat{e^{2\pi i\lambda\,(\cdot)}f}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.
  (e) Para $\lambda \neq 0$ sea $D_\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ calcular $\widehat{D_\lambda(f)}$.
  (f) Dadas f y g en $L^1(\mathbb{R})$, probar que $\int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g$.

(g) Calcular $\widehat{e^{-x^2/2}}$.

(h) Probar que si f y $\widehat{f}$ están en $L^1(\mathbb{R})$, entonces vale la fórmula de inversión

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x}\, d\xi \qquad ppx.$$

(i) Probar que la transformada de Fourier se extiende de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dando lugar a un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ (ver "Teorema de Plancherel").

(10) Sean X e Y espacios de Banach. Sea $A : X \to Y$ lineal que satisface cada vez que $x_n \to 0$ en X y $Ax_n \to y$ en Y entonces $y = 0$. Probar que A es continua.

(11) Sean X_0, X_1, X_2, X_3 espacios de Banach y sean $A_i : X_i \to X_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$ operadores lineales tales que

(a) A_0, A_2, $A_2 A_1 A_0$, son continuas,

(b) A_0 es biyectiva,

(c) A_2 es inyectiva.

Probar que A_1 es continua.

(12) El Teorema de Banach-Steinhauss (o Principio de Acotación Uniforme) no vale cuando X no es completo. Considerar

$$X := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ x_i = 0 \text{ salvo un número finito de i's } \}.$$

X es un normado con la $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ o $||\cdot||_\infty$.

Sea $A_n(x) := n x_n$. Probar

(a) $A_n \in X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

(b) $\sup_n |A_n(x)| < \infty$ y $\lim_{n\to\infty} ||A_n|| \to \infty$ (verificarlo con $||\cdot||_1$).

(13) Hacer los ejercicios 4.18, 4.19 y 4.21 de la página 120 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.