

Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2020/2
FAMAF

1. Cociente y resto

1. Hallar el cociente y el resto de la división de:

- | | | |
|-------------------|-----------------------|----------------|
| a) 135 por 23, | c) 135 por -23 , | e) 127 por 99, |
| b) -135 por 23, | d) -135 por -23 , | f) 98 por 73. |

2. a) Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b .
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.
3. Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.

2. Desarrollos en base b

4. Expresar en base 10 los siguientes enteros:

- | | | |
|---------------|------------------|----------------|
| a) $(1503)_6$ | c) $(1111)_{12}$ | e) $(12121)_3$ |
| b) $(1111)_2$ | d) $(123)_4$ | f) $(1111)_5$ |

5. Convertir

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $(133)_4$ a base 8, | c) $(3506)_7$ a base 2, |
| b) $(B38)_{16}$ a base 8, | d) $(1541)_6$ a base 4. |

6. Calcular: a) $(2234)_5 + (2310)_5$ b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.

3. Divisibilidad

7. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

- a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
b) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$ y $a|(b - c)$.

- e) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b+c)$, entonces $a|c$.
- f) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.
8. Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:
- a) 0 es par y 1 es impar.
- b) Si b es par y $b|c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).
- c) Si b y c son pares, entonces $b+c$ también lo es.
- d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2 .
- e) La suma de un número par y uno impar es impar.
- f) $b+c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
9. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.
10. Probar que $n(n+1)$ es par para todo n entero.
11. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.
- a) $a|b \cdot c \Rightarrow a|b$ ó $a|c$.
- b) $a|(b+c) \Rightarrow a|b$ ó $a|c$.
- c) $a|c$ y $b|c \Rightarrow a \cdot b|c$.
- d) $a|c$ y $b|c \Rightarrow (a+b)|c$.
- e) $a, b, c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.
12. Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:
- a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
- b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.
13. Decir si es verdadero o falso justificando:
- a) $3^n + 1$ es múltiplo de n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
- b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- c) $(n+1) \cdot (5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
14. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.
15. Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.
16. a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

- b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: el número combinatorio $\binom{n}{4}$ es entero).
17. Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

4. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

18. Encontrar $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.
19. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:
- a) 14 y 35, d) 12 y -52 , g) 606 y 108.
b) 11 y 15, e) 12 y 532,
c) 12 y 52, f) 725 y 441,
20. Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.
21. a) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
22. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $\frac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.
23. Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.
24. a) Probar que si d es divisor común de a y b , entonces $\frac{(a, b)}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$.
b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\frac{a}{(a, b)}$ y $\frac{b}{(a, b)}$ son coprimos.

5. Factorización en primos

25. Probar que 3 y 5 son números primos.
26. Dar todos los números primos positivos menores que 100.
27. Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
28. Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.
29. a) Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.
b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.

c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.

d) Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.

30. Probar que si p_k es el k -ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

31. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$.

c) $a = 140$ y $b = 150$.

e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

b) $a = 11$ y $b = 13$.

d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$.